
Stanford University Libraries



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Fünf und zwanzigster Band.

In vier Heften.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Berlin, 1843.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des fünf und zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

Fragmenta Theoriae aequationum lineariter differentialium.

(Auctore *C. J. D. Hill*, math. prof. Lundae.)

Cum aliquot calculi compendia, quae in hac elaboranda deteximus, in publicum praeire edenda credidimus, sequentia jam praemonenda putamus. Olim jam seriem $cfx + c_1 \partial fx + c_2 \partial^2 fx + \ldots . + \ldots .$ (*tagmaticam* jam nobis dictam) accuratius pensitavimus, et ejus summandae regulas in hoc ipso diario Tom. V. pag. 319 sq. descripsimus; unde facile vidisti, ipsam computatum iri, quoties coëfficientes c, c_1, c_2 etc. aliquatenus convergant, idque si vel functiones derivatae ∂fx, $\partial^2 fx$ etc. minus notae (ut cum $fx = \Gamma x$ apud cel. *Legendre*), vel si hi coëfficientes variabiles essent. Cum haec observaverimus, de functione quacunque X in similem seriem evolvenda cura nobis fuit, et praecipue primum convergentiae obtinendae causa posuimus $fx = a_0 \beta^{w_0 . x} + a_1 \beta^{w_1 . x} + a_2 \beta^{w_2 . x} + \ldots . = \int(a \beta^{wx})$, exsistentibus w_0, w_1, w_2 etc. quantitatibus parvis, et a_0, a_1, a_2 primum constantibus, tum vero variabilibus; deinde vero seriem antea descriptam casu generaliori, quo c, c_1, c_2, ... functiones ipsius x sunt, et fx quaecunque, perscrutati sumus, utque functionis cujusvis X evolutionem consideravimus. Praecipuas huc pertinentes formulas, quivis facile reperiet.*)

Ab altera vero parte, cum diu frustra solutionem aequationum lineariter differentialium quadraturae indefinitae ope instituendam perquisivimus, tandem persuasi fuimus, has suo ipsarum solvendi genere donandas esse, ideoque ipsarum indolem accuratius perscrutandam.

Data igitur ejusmodi aequatione lineari

$$a_0 y + a_1 \underset{x}{\partial} y + a_2 \underset{x}{\partial^2} y + \ldots . + a_n \underset{x}{\partial^n} y = X,$$

observavimus, partim in hac theoria partes, qualis haec sinistra $a_0 y + a_1 \underset{x}{\partial} y + \ldots .$

---

*) Haud forsan importune tamen observare licet, si fx sub forma $c + c_1 x + \frac{c_2 x^2}{1.2} + \frac{c_3 x^3}{1.2.3} + \ldots .$ evoluta fuerit, ita ad aequationes $c = \int a$, $c_1 = \int aw$, $c_2 = \int aw^2$, $c_3 = \int aw^3$ etc. quarum solutionem l. c. dedimus, perventum iri.

est saepissime occurrere, ut neque calcules nostros breviter perfici neque theoremata concinne exprimi possent, nisi talem signo quodam simpliciori et expressivo (ex. gr. $(\overset{n}{a}\partial)y$ vel $\overset{n}{a}\partial y$) breviter indicaremus; partem substitutionem $y = uz$, quam et plurimi Geometrae ante nos sane instituerunt, singularem evolutiones legem introducere.

Posuimus igitur primum $a_0 y + a_1 \partial y + a_2 \partial^2 y + \ldots + a_n \partial^n y = (\overset{n}{a}\partial)y$, existente $\partial^r y = \frac{d^r y}{(dx)^r}$ et $\mathfrak{d}^r y$ seu $\underset{c}{\partial^r} y = \frac{\partial^r y}{1.2.3\ldots r}$, si a_0, a_1, a_2 etc. functiones ipsius x fuerint, — ut aequatio modo proposita breviter par $\overset{n}{a}\partial y = X$ scribatur; deinde vero observavimus aliquid commodi attingi, si partim aequationem sub formam:

$$a_0 y + a_1 \mathfrak{d} y + a_2 \mathfrak{d}^2 y + \ldots + a_n \mathfrak{d}^n y = X,$$

eamque contractam per $(\overset{n}{a}\mathfrak{d})y = X$ vel $(\overset{n}{a}\underset{c}{\partial})y = X$ scriberemus, ubi $\mathfrak{d}^r y = \underset{c}{\partial^r} y$ (apud *Arbogast*) $= \frac{d^r y}{1.2\ldots r(dx)^r}$, et partim si coëfficientes (variabiles, si placet) par n_0, n_1, n_2, ... signaremus, quo casu $n_0 y + n_1 \mathfrak{d} y + n_2 \mathfrak{d}^2 y + \ldots + n_n \mathfrak{d}^n y$ brevius per $(n^0 \mathfrak{d})y$ vel $(n^1 \mathfrak{d})y$ indicatur, quo facto

$$(n^0 \mathfrak{d})y = X$$

brevissime aequationem lineariter differentialem ordinis n^{ti} indicat. Haec ad signa nostra intelligenda sufficiant.

Jam vero si substitutionem memoratam effeceris (vel in dissertatione cel. *Libri* in hoc Diario Tom. IX. divulgata inspexeris), posuerisque $(\overset{n}{a}\partial)(Xy) = b_0 . y + b_1 . \partial y + b_2 . \partial^2 y + \ldots + b_n . \partial^n y$, videbis, coëfficientes b_0, b_1, b_2 etc. valoribus in fragmento mox subsequente exhibitis, gaudere.

Cum vero observavimus, terminum quemcunque ipsius b_1, ex. gr. $r a_r \partial^{r-1} X$, ex correspondente ipsius b_0, $a_r \partial^r X$, eodem modo oriri, ac si hunc secundum ipsum derivationis signum ∂ differentiaremus, $\left(\text{est nempe } \frac{d(a_r \partial^r) X}{d(\partial)} = \frac{a_r d((\partial^r) X)}{d(\partial)} = a_r r \partial^{r-1} X\right)$, similiterque b_2 ex b_1 etc. oriri, perspeximus hujus seriei terminos singulari quodam derivationis genere a se invicem dependere, eoque singulari signo distributivo ϑ vel τ vel $\mathfrak{D}$, (cum naturale $\underset{d}{d}$ minus commode videtur) definiendo; de cujus indole jam sequens fragmentum fusius tractat.

Fragmentum I.

Quoniam, ut jam indicavimus, formula tagmatica seu secundum derivata ipsius y ordinata

$$Y = a_0 y + a_1 \partial y + a_2 \partial^2 y + \dots + a_n \partial^n y,$$

quam et ita breviter scripsimus

$$Y = (\overset{n}{a}\partial) y,$$

ponendo Xy loco ipsius y, mutatur in novam formam linearem

$$Y' = b_0 y + b_1 \partial y + b_2 \partial^2 y + \dots + b_n \partial^n y$$

seu brevius $Y' = (b^n \partial) y$, existentibus

$$b_0 = a_0 X + a_1 \partial X + a_2 \partial^2 X + \dots + a_n \partial^n X = (\overset{n}{a}\partial) X$$

$$b_1 = a_1 X + 2 a_2 \partial X + 3 a_3 \partial^2 X + \dots + n a_n \partial^{n-1} X = \vartheta((\overset{n}{a}\partial) X)$$

$$b_2 = a_2 X + 3 a_3 \partial X + \dots\dots + n \frac{n-1}{2} a_n \partial^{n-2} X = \frac{\vartheta^2}{2}((\overset{n}{a}\partial) X)$$

generatimque $b_r = \frac{\vartheta^r}{1.2\dots r}((\overset{n}{a}\partial) X)$; nemo non videt, formam $(b^n \partial) y$ etiam hunc in modum explicari posse:

$$(b^n \partial) y = b_0 y + \vartheta b_0 . \partial y + \frac{\vartheta^2 b_0}{1.2} . \partial^2 y + \dots + \frac{\vartheta^n b_0}{1.2\dots n} . \partial^n y,$$

ubique scilicet b_0 loco formulae ipsi aequalis $(\overset{n}{a}\partial) X$ introducto. Similiter igitur et forma data $(\overset{n}{a}\partial) y$ per

$$a_0 y + \vartheta a_0 . \partial y + \tfrac{1}{2} \vartheta^2 a_0 . \partial^2 y + \frac{1}{2.3} \vartheta^3 a_0 . \partial^3 y + \dots$$

vel etiam per

$$a y + \vartheta a . \mathfrak{d} y + \vartheta^2 a . \mathfrak{d} y^2 + \vartheta^3 a . \partial^3 y + \dots + \vartheta^n a . \mathfrak{d}^n y,$$

aut per

$$a_0 y + \underset{c}{\vartheta} a_0 . \partial y + \underset{c}{\vartheta^2} a_0 . \partial^2 y + \dots,$$

ponendo $a_1 = \underset{c}{\vartheta} a_0$, $a_2 = \underset{c}{\vartheta^2} a_0 = \tfrac{1}{2} \vartheta^2 a_0$, $a_3 = \underset{c}{\vartheta^3} a_0 = \frac{1}{2.3} . \vartheta^3 a_0$ etc.

explicatur; idemque de forma lineare quacunque, quandoquidem $(\overset{n}{a}\partial) y$ utcunque dari possit, tenendum est.

Quoniam vero coëfficientes $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ ad arbitrium accipi possunt, etiam haec signa a, ϑa, $\vartheta^2 a$, $\vartheta^r a$ etc. similiterque exinde b, $\vartheta b'$, $\vartheta^r b$ etc. functiones quascunque (ipsius X, si y ipsius x est functio habenda, vel $\partial^r y$ loco $\frac{d^r y}{(dx)^r}$ scriptum est) significare possunt, easque diversissimas,

nulloque inter se vinculo junctas, praeterquam quod simul coëfficientes in eadem forma lineari sint. Haeceque praecipua novi nostri calculi est vis, cum ita functiones arbitrariae innumerae in calculum simplicissimum introducantur.

Sin vero harum functionum prima b_0 secundum functionis cujusdam X differentialia aliquo modo explicata datur, (id, quod varie efficitur in formis finitis, quandoquidem coëfficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_r, \ldots a_n$ vel $a, \vartheta a, \vartheta^2 a, \ldots$ arbitrariae sint functiones, numeroque finito n adsint, scilicet ita: $b_0 = (\overset{n}{a}\partial)X$, seu

$$b_0 = a_0 X + a_1 \partial X + a_2 \partial^2 X + \ldots + a_n . \partial^n X$$

seu

$$b = a . X + \vartheta a . \mathfrak{d} X + \vartheta^2 a . \mathfrak{d}^2 X + \ldots + \vartheta^n a . \mathfrak{d}^n X;$$

tum etiam reliquarum explicandi modus datur, nempe

$$\vartheta b = a_1 X + 2 a_2 \partial X + \ldots + n a_n \partial^{n-1} X,$$

$$\left(\text{seu} = \vartheta a . X + \vartheta^2 a . \partial X + \ldots + \frac{\vartheta^n a}{1.2\ldots(n-1)} . \partial^{n-1} X\right),$$

seu brevius $\vartheta b = \vartheta((\overset{n}{a}\partial)X)$; similiterque

$$\vartheta^2 b = \vartheta(\vartheta b) = 2.(a_2 X + 3 a_3 \partial X + \ldots + n_2 . a_n \partial^{n-2} X)$$

seu $\vartheta^2 b = \vartheta^2((\overset{n}{a}\partial)X)$, etc.

Patet vero ϑb esse formam linearem secundum derivata ipsius X uno gradu inferiorem acb; quare et ipsam hunc in modum scribere licet: $\vartheta b = ('a^{n-1}\partial)X$, existente $'a_0 = a_1 = \vartheta a_0$, $\vartheta' a_0 = 2 a_2 = \vartheta^2 a_0$, $\vartheta^2_j('a_0) = 2.3 a_3 = \vartheta^3 a$ generatimque $\vartheta^r('a) = \vartheta^{r+1} a$, seu $\vartheta^r(\vartheta a) = \vartheta^{r+1} a$, unde iterando elicitur $\vartheta^{r+n} a = \vartheta^r \vartheta^n a$.

Est scilicet ϑb tum $= b_1 = a_1 X + 2 a_2 \partial X + 3 a_3 \partial^2 X + \ldots + n a_n \partial^{n-1} X$ tum (ex modo positis) $= 'a X + \vartheta 'a . \partial X + \frac{1}{2} \vartheta^2 'a . \partial^2 X + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2.3\ldots(n-1)} \vartheta^{n-1}('a) . \partial^{n-1} X$, itemque

$$b_1 = \vartheta a . X + 2 . \frac{\vartheta^2 a}{2} . \partial X_1 + 3 . \frac{\vartheta^3 a}{2.3} . \partial^2 X + \frac{+ n . \vartheta^n a}{1.2\ldots n} . \partial^{n-1} X,$$

unde, coëfficientes ipsius $\partial^r X$ comparando, dictae formulae elucent. Evolvendo vero $(\overset{n}{a}\partial)(Xy) + (\overset{n}{c}\partial)(Xy)$ facile evincitur, fore

$$\vartheta^m((\overset{n}{a}\partial)X + (\overset{n}{c}\partial)X) = \vartheta^m(\overset{n}{a}\partial)X + \vartheta^m(\overset{n}{c}\partial)X,$$

seu

$$\vartheta^m(\alpha + \gamma) = \vartheta^m \alpha + \vartheta^m \gamma.$$

Quoniam vero $\vartheta^r(\vartheta a) = \vartheta^{r+1} a$, quod et $= \vartheta^r('a)$, generatim, idque concinnius, ϑa loco $'a$ ponere licet; quare $\vartheta b = ((\vartheta \overset{n-1}{a})\partial)X$, siquidem



$b=(\overset{n}{a}\partial)X$ fuerit. Est igitur $\vartheta((\overset{n}{a}\partial)X)=((\vartheta\overset{n-1}{a})\partial)X$. Similiterque evincitur, esse $\vartheta^2 b=\vartheta^2((\overset{n}{a}\partial)X)=((\vartheta^2\overset{n-2}{a})\partial)X$, generatimque $\vartheta^r b=\vartheta^r((\overset{n}{a}\partial)X)$ $=((\vartheta^r\overset{n-r}{a})\partial)X$.

Est enim

$$b = a.X+\vartheta a.\partial X+\frac{\vartheta^2 a}{1.2}.\partial^2 X+\dots\dots+\frac{\vartheta^r a}{1.2\dots r}\partial^r X$$
$$+\frac{+\vartheta^{r+1}a}{1.2\dots\dots r.r+1}.\partial^{r+1}X+\dots\dots+\frac{\vartheta^{r+s}a}{1.2\dots\dots(r+s)}.\partial^{r+s}X+\dots\dots$$

indeque

$$\vartheta^2 b = \vartheta^2 a.X+\dots\dots+\frac{r.(r-1).\vartheta^r a}{1.2\dots\dots(r-2).(r-1).r}.\partial^{r-2}X+\dots\dots$$

atque

$$\vartheta^r b = \frac{r_1^r.\vartheta^r a}{1.2\dots\dots r}.X+\frac{(r+1)_1^r.\vartheta^{r+1}}{1.2\dots\dots r.(r+1)}a.\partial X+\dots\dots+\frac{(r+s)_1^r.\vartheta^{r+s}a.\partial^s X+\dots\dots}{1.2\dots\dots s.(s+1)\dots\dots(r+s)}$$

existente $n_1^r = n(n-1)\dots\dots(n-(r-1))$ = facultate r factorum arithmetice decrescentium n, $n-1$, $n-2$ etc., seu

$$\vartheta^2 b = \vartheta^2 a.X+\dots\dots+\vartheta^r a.\frac{\partial^{r-2}X}{1.2\dots\dots(r-2)}$$

atque

$$\vartheta^r b = \vartheta^r a.X+\vartheta^{r+1}a.\partial X+\dots\dots+\frac{\vartheta^{r+s}a.\partial^s X+\dots\dots}{1.2\dots\dots s},$$

seu concinnius

$$\vartheta^2 b = \vartheta^2 a.X+\dots\dots+\vartheta^r a.\mathfrak{d}^{r-2}X+\dots\dots$$

atque

$$\vartheta^r b = \vartheta^r a.X+\dots\dots+\vartheta^{r+s}a.\mathfrak{d}^s X+\dots\dots = \vartheta^r(\overset{n}{a}\partial X).$$

At

$$((\vartheta^2\overset{n}{a})\partial)X = (\vartheta^2 a).X+\vartheta(\vartheta^2 a).\mathfrak{d}X+\dots\dots+\vartheta^m(\vartheta^2 a).\mathfrak{d}^m X+\dots\dots$$

atque

$$((\vartheta^r\overset{m}{a})\partial)X = (\vartheta^r a).X+\vartheta(\vartheta^r a).\mathfrak{d}X+\dots\dots+\vartheta^s(\vartheta^r a).\mathfrak{d}^s X+\dots\dots$$

praeterea $\vartheta^{r+s}a=\vartheta^s(\vartheta^r a)$, speciatimque $\vartheta^m(\vartheta^2 a)=\vartheta^{m+2}a=\vartheta^r a$, posito $m=r-2$; quare formarum $\vartheta^r((\overset{n}{a}\partial)X)=((\vartheta^r\overset{n-r}{a})\partial)X$ convenientia bene sibi constat.

Simul vero perspicitur, divisores numericos optime differentialibus ipsius X jungi, et quidem hunc in modum $\frac{\partial^r X}{1.2\dots\dots r}=\mathfrak{d}^r X$ (seu $=\partial^r X$, ut apud cel. *Arbogast*), sub hac enim forma nullum faciunt negotium. Quo facto *theorema* nostrum *universale* pro forma lineari $\overset{n}{a}\partial(Xy)$ evolvenda ita sonat.

Existente $(\overset{n}{a}\partial)y = ay + \vartheta a.\mathfrak{d}y + \vartheta^2 a.\mathfrak{d}^2 y + \dots + \vartheta^n a.\mathfrak{d}^n y$, erit

$$(\overset{n}{a}\partial)(Xy) = (\overset{n}{a}\partial)X.y + (((\vartheta\overset{n-1}{a})\partial)X).\mathfrak{d}y + (((\vartheta^2\overset{n-2}{a})\partial)X).\mathfrak{d}^2 y + \dots$$
$$+ ((\vartheta^r\overset{n-r}{a})\partial)X.\mathfrak{d}^r y + \dots + ((\vartheta^n\overset{n-n}{a})\partial)X\ \mathfrak{d}^n y;$$

ubi

$$((\vartheta^r\overset{n-r}{a})\partial)X = \vartheta^r a.X + \vartheta^{r+1}a.\mathfrak{d}X + \vartheta^{r+2}a.\mathfrak{d}^2 X + \vartheta^{r+3}a.\mathfrak{d}^3 X + \dots$$
$$\dots + \vartheta^n a.\mathfrak{d}^{n-r}X;$$

vel etiam, facto $(\overset{n}{a}\partial)X = \alpha$, erit $(\overset{n}{a}\partial)(Xy) = \alpha y + \vartheta\alpha.\partial y + \vartheta^2\alpha.\underset{c}{\partial^2}y + \dots$ $\dots + \vartheta^n\alpha.\underset{c}{\partial^n}y$; atque $\vartheta^m\alpha = \vartheta^m(\overset{n}{a}\partial)X = ((\vartheta^m\overset{n-m}{a})\partial)X.$ *) Hac igitur forma adhibita, valor transformati polynomii tagmatici omnimodi explicitus, ideoque indepedenter ut dicunt, exhibebitur, nempe in coëfficientibus datis a, ϑa, $\vartheta^2 a$ etc. expressus.

Forma vero $(\overset{n}{a}\partial)(Xy) = (\overset{n}{b}\partial)y$ seu $= (((\overset{n}{a}\partial)X^n)\partial)y$ est implicita. casus evolutio inchoata haec est:

$$(\overset{n}{a}\partial)(Xy) = (\overset{n}{b}\partial)y = (\overset{n}{a}\partial)X.y + \vartheta((\overset{n}{a}\partial)X).\partial y + \vartheta^2((\overset{n}{a}\partial)X).\mathfrak{d}^2 y + \dots \text{**}).$$

---

*) Formula haec facile ope notissima

$$\underset{c}{\partial^r}(Xy) = \underset{c}{\partial^r}X.y + \underset{c}{\partial^{r-1}}X.\partial y + \underset{c}{\partial^{r-2}}X.\underset{c}{\partial^2}y + \dots$$

domoustratur. Ita enim $(\overset{n}{a}\partial)(Xy)$ seu polynomium

$$a.Xy + \vartheta a.\partial(Xy) + \vartheta^2 a.\underset{c}{\partial^2}(Xy) + \dots + \vartheta^r a.\underset{c}{\partial^r}(Xy) + \dots$$

in hoc

$$\begin{aligned}&a.Xy + \vartheta a.(\partial X.y + \quad X.\partial y)\\ &+\vartheta^2 a.(\underset{c}{\partial^2}X.y + \partial X.\partial y + \quad X.\underset{c}{\partial^2}y)\\ &+\vartheta^3 a.(\underset{c}{\partial^3}X.y + \underset{c}{\partial^2}X.\partial y + \partial X.\underset{c}{\partial^2}y + X.\underset{c}{\partial^3}y)\\ &+ \dots\dots\dots\dots\\ &+\vartheta^r a.(\underset{c}{\partial^r}X.y + \underset{c}{\partial^{r-1}}X.\partial y + \underset{c}{\partial^{r-2}}X.\underset{c}{\partial^2}y + \dots)\\ &+ \dots\dots\dots\dots\\ &+\vartheta^n a.(\underset{c}{\partial^n}X.y + \underset{c}{\partial^{n-1}}X.\partial y + \underset{c}{\partial^{n-2}}X.\underset{c}{\partial^2}y + \dots),\end{aligned}$$

ideoque in

$$(\overset{n}{a}\partial)X.y + ((\vartheta\overset{n-1}{a})\partial)X.y + ((\vartheta^2\overset{n-2}{a})\partial)X.\partial y + \dots + ((\vartheta^r\overset{n-r}{a})\partial)X.\underset{c}{\partial^r}y + \dots$$

mutatur, quandoquidem $aX + \vartheta a.\partial X + \vartheta^2 a.\underset{c}{\partial^2}X + \dots + \vartheta^n a.\underset{c}{\partial^n}X$ per $(\overset{n}{a}\partial)X$ et similiter $\vartheta a.\vartheta^2 a.\partial X + \dots + \vartheta^n a.\underset{c}{\partial^{n-1}}X$ per $((\vartheta^{n-1}a)\partial)X$, etc. breviter significatur.

**) Existente igitur $\alpha = (\overset{n}{a}\partial)X$; quantitates $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2\alpha$, ... $\vartheta^r\alpha$ coëfficien-



Praeterea monemus, signum nostrum ϑ vel $\mathfrak{D}$, originarie hoc valebat, ut loco ipsius $a.\partial^r y$, si huic praefigebatur, sumeretur $r a \partial^{r-1} y$, nempe $\vartheta(a.\partial^r y) = r a \partial^{r-1} y$, existentibus a et y quidem functionibus ipsius x, manente tamen a secundum operationem ϑ constante (quare et $\vartheta_y(a\partial^r y)$ scribi potest), praeterea, ut jam innuimus, *distributivum* esse (seu ejus indolis, ut $\vartheta(p+q) = \vartheta p + \vartheta q$ sit, quoties p et q series tagmaticae fuerint), exque hac ipsa modo instituta evolutione novum nancisci significatum. Videmus enim, tagma $b = (\overset{n}{a}\partial)X$ huic operationi (ϑ) subjectum ex forma sua explicata

$$aX + \vartheta a.\mathfrak{d}X + \vartheta^2 a.\mathfrak{d}^2 X + \ldots + \vartheta^n a.\mathfrak{d}^n X = (\overset{n}{a}\underset{c}{\partial})X = (\overset{n}{a}\mathfrak{d})X$$

migrari in

$$\vartheta a.X + \vartheta^2 a.\mathfrak{d}X + \vartheta^3 a.\mathfrak{d}^2 X + \ldots + \vartheta^{r+1} a.\mathfrak{d}^r X + \ldots + \vartheta^n a.\mathfrak{d}^{n-1} X,$$

$$\left(\text{est enim } \vartheta(\mathfrak{d}^r y) = \vartheta\frac{\partial^r y}{1.2\ldots.r} = \frac{r\partial^{r-1}y}{1.2\ldots.(r-1)r} = \frac{\partial^{r-1}y}{1.2\ldots.(r-1)} = \mathfrak{d}^{r-1}y\right),$$

ideoque $\vartheta((\overset{n}{a}\underset{c}{\partial})X)$ significare, non modo in unoquoque ipsius $(\overset{n}{a}\underset{c}{\partial})X$ explicati termino ($\vartheta^{r+1}a.\mathfrak{d}^{r-1}X$) esse sumendum $\mathfrak{d}^r X$ loco ipsius $\mathfrak{d}^{r+1}X$ (quo facto in $\vartheta^{r+1}a.\mathfrak{d}^r X$ migrat), sed etiam, si mavis, mutandum esse $\vartheta^r a$ in $\vartheta^{r+1}a$, existente $\vartheta^{n+1}a = 0$ (utut haudquaquam praesente). Ut igitur totam novi

---

tes derivatarum ∂y, $\mathfrak{d}^2 y$, ... $\mathfrak{d}^r y$ ipsius y in serie tagmatice evoluta $(\overset{n}{a}\partial)(Xy)$ significant. Etiam ex hac notione ipsarum proprietas fundamentalis $\vartheta^\nu\vartheta^m\alpha = \vartheta^{\nu+m}\alpha$ ita demonstrari potest. Suscipiamus scilicet evolutionem formulae $(\overset{n}{a}\partial)(XyZ)$ idque dupliciter, faciendo modo $XyZ = X.(yZ)$ et modo $= (XZ).y$. Illo casu erit, si $\alpha - (\overset{n}{a}\partial)X$ valor aliquatenus evolutus

$$= \alpha.yZ + \vartheta\alpha.\partial(yZ) + \vartheta^2\alpha.\underset{c}{\partial^2}(yZ) + \ldots + \vartheta^r\alpha.\underset{c}{\partial^r}(yZ) + \ldots$$

hoc vero

$$= (\overset{n}{a}\partial)(XZ).y + \vartheta(\overset{n}{a}\partial)(XZ).\partial y + \ldots + \vartheta^\nu(\overset{n}{a}\partial)(XZ).\underset{c}{\partial^\nu} y + \ldots$$

Ut vero hi valores comparari possint, ulterius evolvendum est tum $\partial^r(yZ)$ tum $\vartheta^\nu(\overset{n}{a}\partial)(XZ)$.

Est vero $\underset{c}{\partial^r}(yZ) = Z.\underset{c}{\partial^r}y + \partial Z.\underset{c}{\partial^{r-1}}y + \ldots + \underset{c}{\partial^m}Z.\underset{c}{\partial^{r-m}}y + \ldots + \ldots$, atque si $\vartheta^\nu(\overset{n}{a}\partial)X = \beta$ ponitur, $\vartheta^\nu(\overset{n}{a}\partial)(XZ) = \beta.Z + \vartheta\beta.\partial Z + \ldots + \vartheta^\mu\beta\underset{c}{\partial^\mu}Z + \ldots + \ldots$ Erit itaque in illo casu terminus generalis $= \vartheta^r\alpha.\underset{c}{\partial^m}Z.\partial^{r-m}y$ atque in hoc $= \vartheta^\mu\beta.\underset{c}{\partial^\mu}Z.\underset{c}{\partial^\nu}y$, qui utrique necessario conveniant, si $m = \mu$ atque $\nu = r - m$ seu $r = \nu + m$ facitur. Inde igitur colligitur $\vartheta^m\beta = \vartheta^r\alpha = \vartheta^{\nu+m}\alpha$. Est vero $\beta = \vartheta^\nu\alpha$, ideoque $\vartheta^{\nu+m}\alpha = \vartheta^m(\vartheta^\nu\alpha)$. Q. E. D.

Ex ipsa hac demonstratione vero patet, ϑ ad derivata functionis X referri, secundum quae tum α tum β ordinata sunt.

nostri calculi vim et indolem breviter teneas, ponamus $X = fx$ atque $f(x+e) = fx + ef_1x + e^2f_2x + \dots + e^rf_rx + \dots$, seu $\mathfrak{d}^rX = f_rx$, ut habeamus functionem derivatarum seriem $fx, f_1x, f_2x, \dots f_rx, f_nx$, quarum prima tantum utcunque sumi potest, reliquae vero determinato modo, nempe notissimo derivandi, inde successive generantur; adsumamusque praeterea aequalem $n+1$ functionum omnino arbitrariarum numerum, quae tamen certo ordine sibi invicem subsequuntur, ideoque, ut ipse hic ordo recte teneatur, per a, ϑa, $\vartheta^2 a, \dots \vartheta^r a, \dots$ indicantur; et functiones utriusque seriei ejusdem loci in se invicem ducamus productaque in unam summam colligamus

$$afx + \vartheta a . f_1x + \vartheta^2 a . f_2x + \dots + \vartheta^r a . f_rx + \dots + \vartheta^n a . f_nx \;(=\sigma),$$

quam breviter signo $(\overset{n}{a}\partial)fx$ atque nomine *seriei tagmaticae* ordinis n insignimus. His positis, series tagmatica in similem mutatur, vel functionem quamcunque derivativam (f_rx) in proxime antecedentem $(f_{r-1}x)$ mutando, id quod per ϑ_f insignitur, ut $\vartheta_f(f_rx) = f_{r-1}x$ sit, atque

$$\vartheta_f(\vartheta^r a . f_rx + \vartheta^n f_nx) = \vartheta^r a . f_{r-1}x + \vartheta^n a . f_{n-1}x,$$

vel etiam unamquamque functionem arbitrariam $(\vartheta^r a)$ in ipsam proximo ordine subsequentem $(\vartheta^{r+1} a)$ mutando, id quod per ϑ_a indicari potest, ut $\vartheta_a(\vartheta^r a) = \vartheta^{r+1} a$ fit, atque

$$\vartheta_a(\vartheta^r a . f_rx + \vartheta^n a . f_nx) = \vartheta^{r+1} a . f_rx + \vartheta^{n+1} a . f_nx;$$

utroque vero modo idem obtinebitur, nempe

$$\vartheta a . fx + \vartheta^2 a . f_1x + \dots + \vartheta^r a . f_{r-1}x + \vartheta^{r+1} a . f_rx + \dots + \vartheta^n a . f_{n-1}x,$$

quod ipsius $(\overset{n}{a}\partial)fx$ *tagma primum* dicimus et per $\vartheta((\overset{n}{a}\partial)fx)$ insignimus. Est igitur hoc et $= \vartheta_f((\overset{n}{a}\partial)f(x))$ et $= \vartheta_a((\overset{n}{a}\partial)f(x))$; nam obiter determinatum tantum numerum $(n+1)$tum functionum derivatarum $fx \;(= \partial^0 fx)$, $f_1x, \dots f_nx$, tum arbitrariarum $a, \vartheta a, \vartheta^2 a, \dots \vartheta^n a$ consideramus, quare tum $\vartheta_f fx = 0$, tum $\vartheta_a(\vartheta^n a) = 0$, cum $\vartheta^{n+1} a$ haud detur.

Patet vero similiter *tagma secundum*

$$\vartheta^2((\overset{n}{a}\partial)fx) \text{ per } \vartheta(\vartheta((\overset{n}{a}\partial)fx)),$$

et *tertium*

$$\vartheta^3((\overset{n}{a}\partial)fx) \text{ per } \vartheta(\vartheta^2((\overset{n}{a}\partial)fx)) \text{ etc.}$$

generatimque $\vartheta^r(\overset{n}{a}\partial)fx$ per $\vartheta(\vartheta^{r-1}(\overset{n}{a}\partial)fx)$ definitum iri horumque utrumque duplicem significatum specialem tribui posse, nempe $\vartheta^r_f\sigma$ et $\vartheta^r_a\sigma$, seu

ejusmodi, ut vel ad mutationem functionum derivatarum vel ad arbitrariarum referatur, quod utrumque eodem redit. *)

Praeterea hujusmodi signa proprie non nisi seriei tagmaticae $ay + \vartheta a . \mathfrak{d}y + \ldots + \vartheta^n a . \mathfrak{d}^n y$ vel ejus signo complexo $(\overset{n}{a}\mathfrak{d})y$ praefigi potest, improprie vero signo functionis, ex. gr. ϑFx, quo casu significatu carebit, nisi haec functio in ejusmodi seriem applicata fuerit. Ex. gr. si $Fx = (\overset{n}{a}\partial)fx$ fuerit, sane loco ipsius $\vartheta^r(\overset{n}{a}\partial)fx$ breviter $\vartheta^r Fx$ scribere licebit.

Forma vero $(\overset{n}{a}\mathfrak{d})y$ *novum* quasi *functionum* genus constituit, cujus evolutioni tagmata nostra aeque inserviunt ac vulgaribus differentialia, quodque ab his sejungi nequit, utrisque ad idem doctrinae corpus pertinentibus, et series $(\overset{n}{a}\mathfrak{d})(Xy) = (\overset{n}{a}\mathfrak{d})X . y + \vartheta((\overset{n}{a}\mathfrak{d})X) . \mathfrak{d}y + \frac{1}{2}\vartheta^2((\overset{n}{a}\mathfrak{d})X)\mathfrak{d}^2 y + \ldots$ seu, si $n = \infty$ fuerit, (qui casus singulari cautione tractandus est), ideoque n seu ∞ non adscribitur, haec

$$(\hat{a}\mathfrak{d})(Xy) = \hat{a}\mathfrak{d}X.y + \tfrac{1}{2}\vartheta(\hat{a}\mathfrak{d}X).\mathfrak{d}y + \frac{1}{2.3}\vartheta^2(\hat{a}\mathfrak{d}X)\mathfrak{d}^2 y + \ldots$$

his formis idem est ac series *Taylorea* vulgaribus.

Patet vero formas similes plurium arbitrarium dari, quae considerando aequationem differentialem lineariter particularem

$$\left.\begin{array}{l} a_0 z + a'\underset{x}{\partial} z + a''\underset{x}{\mathfrak{d}^2} z + \ldots \\ \quad + a_,\underset{y}{\partial} z + a_,'\underset{x\,y}{\mathfrak{d}\partial} z + \ldots \\ \qquad + a_{,,}\underset{2}{\mathfrak{d}^2} z + \ldots \end{array}\right\} = Z, \text{ facile inveniuntur,}$$

de quibus tamen alio tempore. In praesente vero exemplum tantum unum alterumve usum calculi nostri monstrans, subjungemus.

Fragmentum II.

Probl. *Functionibus quibusdam* (n) *datis videlicet* $b_0, b_1, b_2, \ldots b_r, \ldots b_n$, insuperque aliqua X, *alias totidem* $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ *ita definire, ut ipsae coëfficientes ad hujus* (X) *differentialia sint, dum lineariter ad has explicantur; nempe*

$$b_0 = (\overset{n}{a}\partial)X, \quad b_1 = \vartheta(\overset{n}{a}\partial)X, \quad b_2 = \frac{\vartheta^2}{2}(\overset{n}{a}\partial)X, \quad \text{etc.}$$

*) Operationis hujus tagmaticae regulae, quales jam in textu demonstrantur, breviter in programmate d. 22. Jun. 1835 dato indicata sunt. (Additamentum editoris.)

Functio vero X quaecunque esse potest, dummodo si algebraica integra fuerit, gradus saltem altioris ac (n). Quae cum ita desiderentur, erit generatim $b_r = \frac{\vartheta^r}{1.2\ldots r}(\overset{n}{a\partial})X$, seu explicatione rite instituta

$b_r = a_r X + (r+1)_1 . a_{r+1}\partial X + \ldots . + (r+s)_s a_{r+s}\partial^r X + \ldots . + n_{n-r} a_n \partial^{n-r} X,$

ideoque speciatim

$$(1)\qquad b_n = a_n X,$$

quandoquidem $a_{n+s} = 0$,

$$(2)\qquad b_{n-1} = a_{n-1}X + n a_n \partial X,$$

$$(3)\qquad b_{n-2} = a_{n-2}X + (n-1)a_{n-1}\partial X + n_2 a_n \partial^2 X,$$

$$(4)\qquad b_{n-3} = a_{n-3}X + (n-2)a_{n-2}\partial X + (n-1)_2 a_{n-1}\partial^2 X + n_3 a_n \partial^3 X,$$

generatimque

$$(5)\qquad b_{n-s} = a_{n-s}X + (n-(s-1)) . a_{n-(s-1)} . \partial X + (n-(s-2))_2 . a_{n-(s-2)} . \partial^2 X + \ldots . + n_s a_n \partial^s X,$$

quas aequationes et retro juxta regulam $\frac{\vartheta b_r}{r+1} = b_{r+1}$, seu

$$\vartheta b_{n-1} = n b_n,\qquad \vartheta b_{n-2} = (n-1)b_{n-1},\qquad \vartheta b_{n-3} = (n-2)b_{n-2},\ \text{etc.}$$

comprobare possis. Harum vera aequationum prima (1) aperte praebet $a_n = \frac{b_n}{X}$, hocque valore in subsidium vocato, secunda (2) suppeditat

$$a_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{X} - \frac{n . b_n \partial X}{X^2};$$

similiterque deinde ex tertia (3) habetur

$$a_{n-2} = \frac{b_{n-2}}{X} - \frac{(n-1)b_{n-1}\partial X}{X^2} + n_2 b_n\left(\frac{2(\partial X)^2}{X^3} - \frac{\partial^2 X}{X^2}\right),$$

item ex sequente habebitur a_{n-3}, et ex reliquis successive a_{n-4}, a_{n-5} etc. usque ad a_0, quae ultima ex aequatione $b_0 = (\overset{n}{a\partial})X = a_0 X + a_1 \partial X + \ldots .$ obtinetur.

Quoniam enim unaquaeque aequatio posterior non nisi unam habet ignotam, quae iis, quae jam ex prioribus quaerantur, accedit, has aequationes solvendi facultas per se constat. At vero et ipsae hae solutiones sub forma brevi memoratu digna exhiberi possunt. Patet enim, ex valoribus modo expositis fore

$$(1')\qquad a_n = b_n X^{-1};$$

$$(2')\qquad a_{n-1} = b_{n-1}X^{-1} + n b_n . \partial(X^{-1});$$

$$(3')\qquad a_{n-2} = b_{n-2}X^{-1} + (n-1) . b_{n-1} . \partial(X^{-1}) + n_2 b_n \partial^2(X^{-1});$$

indeque jam conjicitur

$$(4') \quad a_{n-3} = b_{n-3}.X^{-1} + (n-2).b_{n-2}\partial(X^{-1}) + (n-1)_2.b_{n-1}.\partial^2(X^{-1}) + n_3 b_n \partial^3(X^{-1});$$

id quod et facile comprobatur, hos valores (1′, 2′, 3′, 4′) in aequationem (4) substituendo; ita enim haec evadit

$$(4) \quad b_{n-3} = b_{n-3}.X.X^{-1},$$

quandoquidem coëfficiens ipsius b_{n-2} ita fit $(n-2).(X\partial X^{-1} + X^{-1}\partial X)$ seu $= (n-2)\partial.(X.X^{-1})$, atque ipsius $b_{n-1}: (n-1)_2(X\partial^2(X^{-1}) + 2\partial X.\partial(X^{-1}) + \partial^2 X.(X^{-1}))$ seu $(n-1)_2.\partial^2(X.X^{-1})$, itemque ipsius b_n:

$$n_3.[X\partial^3(X^{-1}) + 3.\partial X.\partial^2(X^{-1}) + 3\partial^2 X.\partial(X^{-1}) + \partial^3 X.(X^{-1})]$$

seu $n_3\partial^3(X^{-1}X)$; quae omnes aperte nihilo aequautur, quaudoquidem $X.X^{-1} = 1 = \text{const.}$ sit, ideoque $\partial^r(X.X^{-1}) = 0$. Eodem vero modo positionis similis

$$a_{n-4} = b_{n-4}X^{-1} + (n-3)b_{n-3}\partial X^{-1} + (n-2)_2 b_{n-2}\partial^2(X^{-1}) + (n-1)_3 b_{n-1}\partial^3(X^{-1}) + n_4 b_n \partial^4(X^{-1})$$

generaliorisque

$$a_{n-s} = b_{n-s}.X^{-1} + (n-(s-1))b_{(n-(s-1))}.\partial(X^{-1}) + (n-(s-2))_2.b_{(n-(s-2))}.\partial^2(X^{-1}) + \ldots + \ldots + (n-(s-r))_r.b_{(n-(s-r))}.\partial^r(X^{-1}) + \ldots$$

veritas evincitur, hujusmodi valores in aequationem (5) vel 5 introducendo quae ita b_{n-m} cum coëfficiente evoluta, quae facile in $(n-m)_{s-m}.\partial^{s-m}(X.X^{-1})$ contrahitur, continere invenitur.

Omnes vero hae coëfficientes aperte nihilo aequantur, praeterquam cum $m = s$ fuerit, quo casu $= \partial^0(X.X^{-1}) = X.X^{-1} = 1$ evadit. Aequatio igitur (5) haec $b_{n-s} = b_{n-s}.1$ fit, quae identica est. Posito igitur $Z = X^{-1}$, ex eis, quae modo demonstrabantur, erit

$$a_m = b_m.Z + (m+1)b_{m+1}\partial Z + (m+2)_2 b_{m+2}.\partial^2 Z + \ldots,$$

speciatimque

$$a_0 = b_0 Z + b_1\partial Z + b_2\partial^2 Z + \ldots + b_n\partial^n Z$$

atque

$$a_1 = b_1 Z + 2b_2\partial Z + 3b_3\partial Z + \ldots + \ldots$$

seu brevius $a_0 = (b^n\partial)Z$ atque $a_1 = \vartheta(b^n\partial)Z$, similiterque $a_2 = \frac{\vartheta^2}{2}(b^n\partial Z)$ $a_3 = \frac{1}{2.3}.\vartheta^3(b^n\partial Z)$ etc. Singulare igitur hinc emergit:

Theorema. *Si junctim fuerint*

$$b_0=(\overset{n}{a}\partial)X,\quad b_1=\vartheta(\overset{n}{a}\partial)X,\quad b_2=\tfrac{1}{2}\vartheta^2(\overset{n}{a}\partial)X,\ \ldots\ b_r=\frac{1}{1.2\ldots.r}\vartheta^r\overset{n}{a}\partial X,\ \ldots$$
$$\ldots\ b_n=\frac{1}{1.2\ldots.n}\vartheta^n(\overset{n}{a}\partial X),$$

inverso ordine erant

$$a_0=(b^n\partial)Z,\quad a_1=\vartheta(b^n\partial)Z,\quad a_2=\frac{\vartheta^2}{2}(b^n\partial)Z,\ \ldots.\ \textit{gereratimque}$$
$$a_r=\frac{1}{1.2\ldots.r}(\vartheta^r(b^n\partial)Z),\ \textit{existente}\ Z=\frac{1}{X}.$$

Hujus Theorematis ope varia *problemata* simplicissime solvuntur. Ex. gr. Datis aequationibus

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0+a_1e+a_2e^2+a_3e^3+ &&= A(e)\\ b_1 &= a_1+2a_2e+3a_3e^2+ &&= \underset{e}{\mathfrak{d}}A(e)\\ b_2 &= a_2+\ a_2\ +3a_3e+ &&= \underset{e}{\mathfrak{d}^2}A(e)\end{aligned}$$

etc.

atque universim $b_n=\underset{e}{\mathfrak{d}^n}(A(e))$, inversim coëfficientes a_0, a_1, a_2, ... functionis $A(e)$ invenire.

Ponendo $X=\beta^{ex}$, $Z=\beta^{-ex}$, atque ad finem $x=0$, invenies primum $a_0=(b^n\partial)\beta^{-ex}=b_0\beta^{-ex}+b_1\partial\beta^{-ex}+b_2\partial^2\beta^{-ex}+\ldots.$, seu $a_0=b_0-b_1e+b_2e^2-\ldots.$, quae series $=B(e)$ ponitur, ut $B_{(e)}$ functio data ipsius e sit, deinde $a_1=b_1-2b_2e+\ldots.$ seu $a_1=-\underset{e}{\partial}B(e)=-B_1e$, et

$$a_2=b_2-3b_3.e+\ldots.=\underset{c}{\partial^2}B(e),$$

et atque igitur universim

$$(-1)^na_n=B_n(e)=\underset{c}{\partial^n}B_{(e)}.$$

Similiter aequationes

$$\begin{aligned} &1.\quad b=a_0+ea_1+e(e-1)a_2+e(e-1).(e-2).a_3+\ldots.=A(e),\\ &2.\quad b_1=a_1+2a_2e+3a_3e(e-1)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\Delta A(e),\\ &3.\quad b_2=a_2+3ea_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\tfrac{1}{2}\Delta^2A(e)\end{aligned}$$

etc.

ponendo $X=x^e$, resolvuntur, etc. innumerae aliae.

Facto scilicet $Z=x^{-e}$, erit ex modo demonstratis

$$a_0=(b^n\partial)(x^{-e})=x^{-e}b_0-eb_1x^{-1-e}+e(e+1)b_2x^{-2-e}-\ldots.+\ldots.$$

seu, posito

$$x=1,\quad a_0=b_0-eb_1+e(e+1)b_2-e(e+1)(e+2)b_3+\ldots.=B(e),$$

et

$$a_1 = \vartheta(b^n \partial)(X^{-e}) = b_1 - 2eb_2 + 3e(e+1)b_3 - 4.e(e+1).(e+2).b_4 - \dots$$
$$= {}'\Delta B(e),$$
$$a_2 = b_2 - 3eb_3 + 6e(e+1)b_4 - \text{ etc. } = +\tfrac{1}{2}{}'\Delta^2 B(e), \text{ etc.}$$
$$(\text{si } {}'\Delta e = -1).$$

Ex his exemplis, quae facile directe demonstrantur, videre licet, theorema nostrum etiam ad valorem $n = \infty$ extendi.

Fragmentum III.

De aequalibus aequationum lineariter differentialium $(\overset{n}{a}\partial)y = 0$ radicibus.

Quoniam ignotae hujusmodi aequationis ope determinandae non nisi functiones sunt, aequales sane habendae sunt radices, quae eadem functione exprimuntur. Olim ideo credidimus, alterutra inventa radice $y_0 = fx$, tum aliam y_1, quae ipsius aequalis sit naturae, per eandem functionem fx simplicissime (ex. gr. per $y_1 = f(gx)$, existente gx functione nota simpliciore, imo hujusmodi, ut $g(gx) = x$, vel $g^n x = x$ sit) exhiberi. Jam vero ex nostra theoria tagmatica demonstramus, *radices aequales per $x^m.fx$*, existente fx ipsarum simplicissima, explicari.

Sint enim $y_0 = fx$, atque $y_1 = x^m.fx$, seu $y_1 = x^m.y_0$, radices aequationis $(\overset{n}{a}\partial)y = 0 (= a_0 y + a_1 \partial y + a_2 \partial^2 y + \dots)$; eritque $(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0$, atque $(\overset{n}{a}\partial)y_1 = (\overset{n}{a}\partial)(x^m y_0) = 0$.

Est vero

$$\overset{n}{a}\partial(x^m y_0) = (\overset{n}{a}\partial)y_0.x^m + \vartheta(\overset{n}{a}\partial)y_0.mx^{m-1} + \tfrac{1}{2}\vartheta^2(\overset{n}{a}\partial)y_0.m(m-1).x^{m-2}$$
$$+ \dots \vartheta^r(\overset{n}{a}\partial)y_0.m_r x^{m-r} + \dots,$$

ubi quidem omnes termini aderunt, si $m > n$ fuerint; sin vero $m < n$ sit et integer, tum certe termini ultimi, inde ab $r = m+1$ usque ad $r = n$, ultro evanescent. Ut igitur aequationi $(\overset{n}{a}\partial)y_1 = 0$ satisfiat, nihil restat, cum praeterea $(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0$ sit, nisi ut ponamus seorsim:

$$\vartheta(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0, \quad \vartheta^2(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0, \quad \vartheta^3(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0 \text{ etc.}$$

usque ad $\vartheta^m(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0$; quae quidem aequationes mutuum coëfficientium habitum, qualis ad $m+1$ radices aequales producendas requiratur, determinant. Patet enim, harum aequationum ope fore $(\overset{n}{a}\partial)(x^r y_0) = 0$, dummodo numerus integer $r =$ vel $< m$ sit; ideoque aequationem $(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0$, seu

$A=0$, siquidem fuerint $\vartheta A=0$, $\vartheta^2 A=0$, $\vartheta^3 A=0$, ... $\vartheta^m A=0$, his gaudere $m+1$ radicibus y_0, xy_0, x^2y_0, x^3y_0, ... x^my_0, quae sane aequales appellari possunt, cum simplicissime per eandem functionem $y_0=fx$ aeque exprimantur, nempe sub forma $(a+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_mx^m)fx$, praetereaque vulgaris analysis, cujus ope radix y_1 per y_0 determinatur, si constantia certo modo accipiantur, $y_1=y_0$ const. suppeditet, ut in exemplo videre licet.

Ex. Ponamus $n=2$, seu $(\overset{2}{a}\partial)y=0$ et $\vartheta(\overset{2}{a}\partial)y=0$; id est

$$a_0y+2a_1\partial y+a_2\partial^2 y=0=A$$

atque

$$a_1y+a_2\partial y=0=B$$

(ubi commoditatis causa $2a_1$ loco a_1 posuimus).

Erit igitur

$$A-\partial B=(a_0-\partial a_1)y+(a_1-\partial a_2)\partial y=0$$

atque

$$-\frac{\partial y}{y}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_0-\partial a_1}{a_1-\partial a_2},$$

indeque ***aequalitatis conditio:***

$$(a_0-\partial a_1)a_2=a_1(a_1-\partial a_2)$$

seu

$$a_0\,.\,a_2=a_1^2+a_2\partial a_1-a_1\partial a_2$$

seu etiam simplicius $a_0=a_1^2+\partial a_1$, siquidem $a_2=1$, ut semper licet, effectum sit.

Haec igitur aequatio $(a_1^2+\partial a_1)y+2a_1\partial y+\partial^2 y=0$, aequalibus gaudet radicibus. Perquisita enim altera y_0 ex aequatione

$$\frac{\partial y_0}{y_0}=-a_1,$$

quae $y_0=\beta^{-\int a_1\partial x}$ suppeditat, alteram y_1 vulgari via quaeramus. Terminis igitur ultimis ex aequationibus

$$\partial^2 y_0+2a_1\partial y_0+(a_1^2+\partial a_1)y_0=0$$
$$\text{et}\quad \partial^2 y_1+2a_1\partial y_1+(a_1^2+\partial a_1)y_1=0$$

exterminatis, oritur $y_1\partial^2 y_0-y_0\partial^2 y_1+2a_1(y_1\partial y_0-y_0\partial y_1)=0$ seu $\partial q+2a_1\,.\,q=0$, posito scilicet $q=y_1\,.\,\partial y_0-y_0\partial y_1$. Integrando igitur obtinetur $Lq=-2\int a_1dx$ seu

$$y_1\partial y_0-y_0\partial y_1=\beta^{-2\int a_1 dx}=c\,.\,y_0^2;\ \text{h. e. } \partial\left(\frac{y_1}{y_0}\right)=c$$

iterumque exhinc $y_1=(a+xc)\,.\,y_0$. Sin vero accipimus $c=0$; erit $\frac{\partial y_1}{y}$

$= \frac{\partial y_0}{y_0}$, ideoque $y_1 = a \cdot y_0$. At radices y_0 et $a y_0$, ratione completae solutionis habita, haud diversae sunt censendae. Istius igitur aequationis solutio completa est $y = (A + Bx)\beta^{-\int a_1 \partial x}$.

Simile quid in altioribus gradibus observare licet. Exhinc igitur sequentia colliguntur *theoremata:*

Si aliqua aequationis $(\overset{n}{a}\partial)y = 0$, *radix* y_0 *ejusmodi sit, ut tagma primum* $\vartheta(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0$ *sit, altera radix erit* $x \cdot y_0$, *et si praeterea* $\vartheta^2(\overset{n}{a}\partial)y_0 = 0$ *fuerit, accedet radix* $x^2 y_0$, *generatimque tot aderunt radices aequales, seu formae* $x^m y_0$, *quot aequationes, nempe ipsa tagmatica atque hujus derivatae.*

Sic, si data fuerit aequatio tertii ordinis $(\overset{3}{a}\partial)y = 0$ seu $(A =) a_0 y + 3a_1 \partial y + 3a_2 \partial^2 y + a_3 \partial^3 y = 0$, simulque fuerit $(\frac{1}{3}\vartheta A =) a_1 y + 2a_2 \partial y + a_3 \partial^2 y = 0$, seu si tagma primum evanuerit, erit tum $(A =) a_0 y + 3a_1 \partial y + 3a_2 \partial^2 y + a_3 \partial^3 y = 0$, tum differentiando $(\frac{1}{3}\partial\vartheta A =) \partial a_1 . y + (a_1 + 2\partial a_2)\partial y + (2a_2 + \partial a_3)\partial^2 y + a_3 \partial^3 y = 0$ ideoque $\partial^3 y$ eliminando

$$(a_0 - \partial a_1) . y + 2(a_1 - \partial a_2)\partial y + (a_2 - \partial a_3)\partial^2 y = 0.$$

Est vero et

$$a_1 y + 2a_2 \partial y + a_3 \partial^2 y = 0,$$

ideoque ipso $\partial^2 y$ ejecto,

$$0 = ((a_0 - \partial a_1) . a_3 - a_1 . (a_2 - \partial a_3))y + 2 . ((a_1 - \partial a_2)a_3 - a_2 . (a_2 - \partial a_3))\partial y.$$

Cujus jam aequationis ope functio y facile determinatur, eaque aequalis est radix. Praeterea si $a_3 = 1$ efficitur, ut licet, ista aequatio simplicior

$$0 = (a_0 - \partial a_1 - a_1 . a_2)y + 2(a_1 - \partial a_2 - a_2^2)\partial y$$

evadit. Haec vero differentiata aequationem

$$0 = (\partial a_0 - \partial^2 a_1 - \partial(a_1 a_2)y + (a_0 - \partial a_1 - a_1 a_2 + 2\partial a_1 - 2\partial^2 a_2 - 2^2 . a_2 \partial a_2)\partial y + 2(a_1 - \partial a_2 - a_2^2)\partial^2 y$$

praebet. Hac vero nova aequatione cum antiqua illa

$$0 = 2(a_1 - \partial a_2 - a_2^2)(a_1 y + 2a_2 \partial y + \partial^2 y)$$

comparata aliam quoque hanc suppeditat aequationem

$$0 = (\partial a_0 - \partial^2 a_1 - a_2 \partial a_1 + a_1 \partial a_2 - 2a_1^2 + 2a_1 a_2^2)y + (\partial a_1 - 2\partial^2 a_2 - 5a_1 a_2 + 4a_2^3)dy,$$

quae etiam $\frac{\partial y}{y}$ determinat.

Utrosque igitur ipsius $dy : y$ valores comparando *conditionem*, ut aequatio proposita aequales habeat radices duas, necessariam elicies, idem-

que in aequatione cujusvis ordinis simili omnino modo facile efficies. Hinc vero alterum elicimus *theorema:*

Aequationem differentialem ordinis cujusvis (n^o) nempe $(\overset{n}{a}\partial)y=0$, in qua aliqua de causa radicum aequalium par unicum ponere liceat, semper methodo Bernoulliana esse solubilem; quem in finem ipsius tagma primum $\vartheta(\overset{n}{a}\partial)y=0$ datae jungendum est, et derivata altiora excutienda, donec $\partial y:y$ in coëfficientibus datis exhibeatur. Sin vero plura aequalium paria adfuerint, prius subsistendum est, ex. gr. ad $(\overset{2}{a}\partial)y=0$, si duo sunt. Inde et simul rei verae conditionem necessariam elicies. Ex. gr. Si $(\overset{2}{a}\partial)y=0$ seu $a_0y+2a_1\partial y+a_2\partial^2y=0$, et coëfficientes a_0, a_1, a_2 constantes fuerint, erit in casu aequalium radicum $a_1y+a_2\partial y=0$, ideoque si $a_1=-\alpha.a_2$ ponitur, $\frac{dy}{y}=\alpha\,dx$, et integrando $\mathrm{L}y=\alpha x+\mathrm{L}C$ seu inverse

$$y=\text{⅂}(\alpha x+\mathrm{L}C)=C.\text{⅂}(\alpha x).\text{*)}$$

Hujus vero solutionis conditio jam antea explicata est $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_0-\partial a_1}{a_1-\partial a_2}$, seu $a_1^2=a_0a_2$, id quod rei notissimae de indole radicum aequationis algebraicae $a^2\partial=0$ seu $a_0+2a_1\partial+a_2\partial^2=0$ optimi, convenit.

Nec diffitemur, nos, cum, solutionis conatubus infinitis frustra susceptis, tandem persuasi fuerimus, has aequationes differentiales nullam quadraturae simplicis ope solutionem universalem admittere, ideoque de harum theoria conscribenda meditandum esse, ex ipsa hac analogia aequationis differentialis et algebraicae, quae saltem in casu coëfficientium constantium in dubium haud vocari potest, varia indicia disquisitionem adjuvantia hausisse. Universim enim ponendo $y=\text{⅂}(\alpha x)$, aequatio $(\overset{n}{a}\partial)y=0$ coefficientibus constantibus gaudens ad aequationem $(\overset{n}{a})^0\alpha=0$ ducit, et utraque non modo aequali radicum numero sed et simili indole gaudent, aequalibus utriusque radicibus sibi invicem concomitantibus. At si $(\overset{n}{a})^0\alpha=0$ aequales habet radices, valet etiam aequatio $\partial_\alpha(\overset{n}{a})^0=0$ seu $a_1+2a_2\alpha+3a_3\alpha^2+\ldots=0$, quae et breviter $(\overset{n1}{a})\alpha=0$ scribi potest. Sin vero similem ipsius $(\overset{n}{a}\partial)y=0$ habitum

*) Duce cel. *Laplace* functiones inversas litteram initialem functionis invertendo designamus. Vulgaris igitur functio exponentialis β^x nobis est $\text{⅂}x$, ex theoria iterationis vero per $\mathrm{L}^{-1}x$ indicatur.

volumus, ideoque $\vartheta(\overset{n}{a}\partial)y=0$ ponimus, seu $a_1 y+2a_2\partial y+3a_3\partial^2 y+\ldots.=0$, patet et hanc aequationem fore $(\overset{n_1}{a})\partial y=0$, et, substitutione $y=\daleth(\alpha x)$ (seu $=\beta^{\alpha x}$) effecta, inde hanc oriri aequationem $(\overset{n_1}{a})\alpha=0$, seu eandem ac ex conditione radicum aequalium in aequatione algebraica huic differentiali respondente. Inde justam esse functionalium radicum aequalium notionem, facile argues. Idem et aliunde comprobari potest.

Hac radicum aequalium doctrina in solutionibus aequationum particulariter differentialium adaptandis interdum magni erit usus. Ut si inventa fuerit huiusmodi solutio: $z=\frac{\underset{x}{(n'\partial)}\varphi x}{\underset{y}{(r'\partial)}\psi y}$, reique natura desideraverit, ut functiones φx et ψy, (quae universim arbitrariae erant) radices sint aequationum lineariter particularium $\underset{x}{(n'\partial)}X=0$ et $\underset{y}{(r'\partial)}Y=0$, (ubi coëfficientes n_0, n_1, n_2 et, r_0, r_1, r_2 et tum y tum x continere possunt), ista solutio valorem ipsius Z sub forma indeterminata $\frac{0}{0}$, vix nisi tagmatice definienda, praebebit. Exemplo tibi sit casus, quo X et Y functiones sint Ellipticae notissimae E' et F'. Pergratum foret, si quis, quid calculus Variationum ad hunc nodum dissolvendum valeat, edocere vellet.

Fragmentum IV.

De solutione aequationis linearis, $(n'\partial)u=0$.

Forma $(n'\partial)y=n_0 y+n_1\partial y+n_2\partial^2 y+\ldots.+n_n\partial^n y$ aperte distributivae est indolis seu ejusmodi, ut $(n'\partial)(y+z)=(n'\partial)y+(n'\partial)z$ sit. Productum vero zy ipsa, ut in Fr. I. docuimus, hunc in modum dissolvit:

$$(n'\partial)(zy)=(n'\partial)z.y+\vartheta(n'\partial)z.\partial y+\frac{\vartheta^2}{1.2}(n'\partial)z.\partial^2 y+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{\vartheta^r}{1.2.3\ldots.r}(n'\partial)z.\partial^r y+\ldots.+n_n.z.\partial^n y.$$

Jam vero proposita aequatione lineariter differentiali $(\dot{n}'\partial)u=0$, ipsa universim solutu erit difficillima, nisi aliquo modo radicem particularem u_0 invenire liceat. Jam vero hujus evolutionem, quam etiam convergentem efficere liceat, proponendi est animus. Facto itaque $u=a+y$, $(\dot{n}'\partial)y=y-(n'\partial)y$ atque $(\dot{n}'\partial)a=q$, erit $(\dot{n}'\partial)y=-(\dot{n}'\partial)a=q$, seu $(n'\partial)y+q=y$, quae jam est aequatio solvenda. Quem in finem iteratis vicibus ipsam operationi tagmaticae $(n'\partial)$ subjiciamus, eritque

$$(n'\partial)y = (n'\partial)(q + n'\partial y) = (n'\partial)q + (n'\partial)(n'\partial)y, \text{ seu, si}$$
$$(n'\partial)^2 q = (n'\partial)(n'\partial)q,$$
$$y = q + (n'\partial)q + (n'\partial)^2 y, \text{ rursumque, si}$$
$$(n'\partial)^2(n'\partial)q = (n'\partial)^3 q, \quad (n'\partial)^2 y = (n'\partial)^2 q + (n'\partial)^3 y,$$
ideoque, substituendo,
$$y = q + (n'\partial)q + (n'\partial)^2 q + (n'\partial)^3 y.$$
Apparet jam, ita continuando obtentum iri
$$y = q + (n'\partial)q + (n'\partial)^2 q + (n'\partial)^3 q + \ldots + (n'\partial)^r q + (n'\partial)^{r+1} y.$$
Si igitur termini hujus polynomii tandem magis magisque diminuerint, $r = \infty$ atque $(n'\partial)^{r+1} y = 0$ efficere licebit, eritque aequationis linearis $(n'\partial)y + q = y$ haec solutio
$$y = q + (n'\partial)q + (n'\partial)^2 q + (n'\partial)^3 q + (n'\partial)^4 q + \ldots,$$
quae series singulares omnino est formae.

Hujus vero termini successive ex sese calculantur secundum formulam
$$(n'\partial)^{r+1} q = (n'\partial)(n'\partial)^r q,$$
quae valet, si jam inventum fuerit
$$(n'\partial)^r q = R, \text{ erit } (n'\partial)^{r+1} q = (n'\partial)R \text{ seu}$$
$$= n_0 R + n_1 R + n_2 \partial^2 R + \ldots + n_n \partial^n R.$$
Ipsi omnes igitur finiti sunt, si n numerus est finitus. Speciatim vero est
$$(n'\partial)q = n_0 q + n_1 \partial q + n_2 \partial^2 q + \ldots + n_n \partial^n q,$$
ideoque erit
$$(n'\partial)^2 q = (n'\partial)(n_0 q) + (n'\partial)(n_1 \partial q) + \ldots + (n'\partial)(n_1 \partial^n q),$$
qui valor per theorema antea expositum ulterius ad formam $\Theta_0 q + \Theta_1 \partial q + \Theta_2 \partial^2 q + \ldots$ explicari potest. Hanc viam igitur saepius calcando perveniemus ad hujusmodi valorem explicitum
$$R = (n'\partial)^r q = \Theta_0^r . q + \Theta_1^r . \partial q + \Theta_2^r . \partial^2 q + \Theta_3^r . \partial^3 q + \ldots,$$
rursumque
$$(n'\partial)^{r+1} q = \Theta_0^{r+1} . q + \Theta_1^{r+1} \partial q + \Theta_2^{r+1} . \partial^2 q + \ldots, \text{ quod et}$$
$$= (n'\partial)(\Theta_0^r . q) + (n'\partial)(\Theta_1^r . \partial q) + (n'\partial)(\Theta_2^r . \partial^2 q) + \ldots$$

Ulteriori igitur evolutione facta, comparatisque coëfficientibus ipsorum q, ∂q, $\partial^2 q \ldots$, erit

$$\Theta_0^{r+1} = (n'\partial)\Theta_0^r,$$
$$\Theta_1^{r+1} = (n'\partial)\Theta_1^r + \vartheta(n'\partial)\Theta_0^r,$$
$$\Theta_2^{r+1} = (n'\partial)\Theta_2^r + \vartheta(n'\partial)\Theta_1^r + \frac{1}{1.2}\vartheta^2(n'\partial)\Theta_0^r,$$
$$\Theta_3^{r+1} = (n'\partial)\Theta_3^r + \vartheta(n'\partial)\Theta_2^r + \frac{1}{1.2}.\vartheta^2(n'\partial)\Theta_1^r + \frac{1}{1.2.3}\vartheta^3(n'\partial)\Theta_0^r,$$
etc.

Quarum formularum ope coëfficientes Θ successive calculari possunt.

Jam vero si hos valores explicitos in solu ionem antea inventam introducimus, hac hujusmodi formam nanciscetur

$$y = Qq + Q_1.\partial q + Q_2.\partial^2 q + Q_3.\partial^3 q + \ldots + Q_\infty.\partial^\infty q.$$

Sin vero coëfficientes Q_0, Q_1, Q_2 etc. directe determinare vellemus, sufficienda foret haec ipsa series in locum ipsius y in aequatione

$$y = q + (n'\partial)y,$$

quo facto, comparationeque instituta hae obtinentur aequationes:

$$\begin{aligned} &1. \quad Q_0 = 1 + (n'\partial)Q_0, \\ &2. \quad Q_1 = (n'\partial)Q_0, \\ &3. \quad Q_2 = (n'\partial)Q_1 + \vartheta(n'\partial)Q_0, \\ &4. \quad Q_3 = (n'\partial)Q_2 + \vartheta(n'\partial)Q_1 + \frac{1}{1.2}.\vartheta^2(n'\partial)Q_0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Jam vero aequatio (1.) aperte docet, quantitatem Q solutionem esse particularem seu radicem aequationis propositae $y = q + (n'\partial)y$, ei casu adaptatam, quo $q = 1$. Inde vero arguere licet evolutionem antecedentem justam fore (dummodo q nullius aequationis finitae $(m'\partial)q = 0$ sit radix), tolliturque ita scrupulus ex positione $(n'\partial)^\infty y = 0$ oriundus. Sin vero ad finitum terminum subsistere tibi libuerit, sane valor ipsius $(n'\partial)^{r+1}y$ aliquatenus calculandus erit, unicuique casu particulari adaptandus est q ita ut $(n'\partial)^r q$ quam minimus evadet. Quod etiam ut problema maximi momenti est censendum, ideoque Geometrarum attentionem mereri videtur. Hoc tantummodo in praesenti observare lubet, functionem

$$q = A\beta^{\omega x} \text{ seu } \int A_r \beta^{\omega_r x}$$

effici posse, existentibus ω vel ω_r quantitatibus quibusvis, quas ideo quam minimas accipias, ut $\partial^\infty q$ evanescat. Si enim proposita fuerit aequatio

$$u + \nu, \quad \partial u + \nu_2 \partial^2 u + \ldots = 0$$

seu

$$(\nu'\partial)u = 0,$$

ponitorque $u = a + y$, erit

$$(\nu'\partial)y + (\nu'\partial)a = 0,$$

ideoque (nisi forte $(\nu'\partial)a = 0$, quo casu solutio particularis $u = a$ inventa est), erit

$$\frac{q.(\nu'\partial)y}{(\nu'\partial)a} + q = 0 \text{ et } y = q + (n'\partial)y,$$

si jam

$$q(\nu'\partial)y = (\nu'\partial)a.((n'\partial)y - y)$$

accipitur, seu

$$(n'\partial)y = y + q.\left(\frac{y+\nu_1\partial y+\nu_2\partial^2 y+\dots}{a+\nu_1\partial a+\nu_2\partial^2 a+\dots}\right)$$

facitur. Duae igitur adsunt functiones arbitrariae q et a, quarum illa sub forma quam diximus, optime sumitur, haec vero ita determinanda est ut $(n'\partial)^\infty y$ evanescat. Commodius tamen inverso ordine limites integrandi ita determinabuntur, ut hoc locum habeat; deindeque, alio valore vel alia forma ipsius a adhibita, novi invenientur limites, hocque iteretur, donec totus integrandi campus exhaustus sit.

Jam vero redeamus ad aequationes mixte differentiales, Θ, quae ad quantitates Θ determinandas inservirent. Harum prima $\Theta_0^{r+1} = (n'\partial)\Theta_0^r$ seu $\Theta_0^{r+1} = n_0\Theta_0^r + n_1\partial\Theta_0^r + n_2\partial^2\Theta_0^r + \dots$ facile solvitur et suppeditat $\Theta_0^r = (n'\partial)^{r-1}t$, exsistente t functione arbitraria. Quia vero heic $\Theta_0{}' = n_0$, erit $t = n_0$ et $\Theta_0^r = (n'\partial)^{r-1}n_0$. Altera vero $\Theta_1^{r+1} = (n'\partial)\Theta_1^r + \vartheta(n'\partial)\Theta_0^r$, si breviter N pro $(n'\partial)$ scribimus, hujusmodi gaudet solutione

$$\Theta_1^r = N^{r+1}t_0 + N^{r-2}\vartheta N t_0 + N^{r-3}\vartheta N^2 t_0 + N^{r+4}\vartheta N^3 t_0 + \dots + \vartheta N^{r-1}t_0;$$

hac enim admissa erit

$$\Theta_1^{r+1} = N^r t_0 + N^{r-1}\vartheta N t_0 + N^{r-2}\vartheta N^2 t_0 + \dots + N\vartheta N^{r-1}t_0 + \vartheta N^r t_0,$$

quod aperte a Θ_1^r cum $\vartheta N\Theta_1^r$ differt, si $N^r t_0 = N\Theta_0^r = N^r n_0$ seu $t_0 = n_0$ ponitur. Praeterea cum $\Theta_1{}' = n_1$ sit, et ex formula inventa $= t_1 + \vartheta t_0 = t_1$, (est enim $\vartheta t_0 = \vartheta n_0 = 0$, quia hic terminus originem ducit a $(n'\partial)^0(n_0 q) = (n'\partial)^0 n_0 . q + \vartheta(n'\partial)^0 n_0 . \partial q + \dots = n_0 q$), erit hic $t_1 = n_1$, ideoque

$$\Theta_1^r = N^{r-1}n_1 + \dots + N^{r-2}\vartheta N n_0 + N^{r-3}\vartheta N^2 n_0 + N^{r-4}\vartheta N^3 n_0 + \dots$$
$$\dots + \vartheta N^{r-1}n_0,$$

ubi rursum $(n'\partial)$ pro N restituendum est. Aeque reliquae aequationes solventur, invenienturque Θ_2^r, Θ_3^r, ... Θ_ν^r, tametsi sub forma satis ampla.

His igitur valoribus adhibitis erit radix tagmatica

$$y = \left.\begin{array}{l} q \\ + n_0 q + n_1\partial q + n_2\partial^2 q + \dots \\ + \Theta_0^2 q + \Theta_1^2\partial q + \Theta_2^2\partial^2 q + \dots \\ + \Theta_0^3 q + \Theta_1^3\partial q + \dots \\ + \dots + \dots \end{array}\right\} \text{ et } = Q q + Q_1 . \partial q + \dots$$

ideoque $Q = 1 + n_0 + \Theta_0^2 + \Theta_0^3 + \dots$, seu

$$Q_0 = 1 + n_0 + (n'\partial)n_0 + (n'\partial)^2 n_0 + (n'\partial)^3 n_0 + \dots,$$

quae jam est solutio particularis aequationis tagmaticae

$$y = 1 + n_0 y + n_1\partial y + n_2\partial^2 y + \dots + n_n\partial^n y, \quad \text{seu} \quad y = 1 + (n'\partial)y.$$

Probatio vero facillima est, si admittitur $(n'\partial)^\infty n_0 = 0$. Facto enim

$$y = 1 + n_0 + Nn_0 + N^2 n_0 + N^3 n_0 + \ldots,$$

erit

$$Ny = N(1 + n_0 + Nn_0 + \ldots) = N1 + Nn_0 + N^2 n_0 + N^3 n_0 + \ldots,$$

quia $N = (n'\partial)$ distributivum est, ideoque

$$1 + Ny = 1 + N + Nn_0 + N^2 n_0 + \ldots,$$

seu

$$1 + Ny = y,$$

quia

$$N1 = (n'\partial)1 = n_0 . 1 + n_1 \partial 1 + n_2 \partial^2 1 + = n_0.$$

Haec vero solutio symbolice breviter ita representari potest:

$$y = s + (1 - N)^{-1} n_0, \quad \text{seu} \quad y = s + (1 - (n'\partial))^{-1} n_0.$$

Casus, quo $(n'\partial) n_0 = c =$ const. fuerit, facile solutionem finitam admittit. Quia enim $Nn_0 = c$, erit

$$N^2 n_0 = Nc = n_0 c + n_1 \partial c + \ldots = n_0 c, \quad N^3 n_0 = cNn_0 = c^2,$$
$$N^4 n_0 = N(c^2) = c^2 n_0, \quad N^5 n_0 = c^2 N n_0 = c^3 \text{ etc.},$$

ideoque

$$y = 1 + n_0 + c + n_0 c + c^2 + n_0 c^2 + c^3 + \ldots = 1 + (n_0 + c)(1 + c + c^2 + \ldots)$$

seu

$$y = 1 + \frac{n_0 + c}{1 - c} = \frac{1 + n_0}{1 - c} \text{ (saltem si } c < 1).$$

Tum vero functiones n_0, n_1, n_2 etc. necessario ejusmodi sint, ut

$$(n'\partial) n_0 = c, \quad \text{seu} \quad c = n_0^2 + n_1 \partial n_0 + n_2 . \partial^2 n_0 + n_3 \partial^3 n_0 + \ldots + n_n \partial^n n_0$$

sit.

Berolini 1833, Septb.

2.

De radicibus rationalibus aequationis Riccatianae $\underset{x}{\partial} y + a + by + cy^2 = 0$, ubi a, b, c functiones sunt rationales ipsius x.

(Scribimus vero ∂y vel $\underset{x}{\partial} y$ pro $\frac{dy}{dx}$, seu $dx = 1$ fecimus.)

(Auctore *C. J. D. Hill*, math. prof. Lundae.)

Primum faciatur $y + r = u$, et aequatio mutabitur in $\underset{x}{\partial} u + cu^2 + \alpha = 0$, si $\alpha = a - \partial r + cr^2$, et $2rc = b$. Fit enim haec $\partial y + \partial r + \alpha + c(r^2 + 2ry + y^2) = 0$, quae datae convenit. Si igitur hinc valor ipsius u rationalis obtentus fuerit, habebitur et ejusmodi $\left(u - \frac{b}{2c}\right)$ ipsius y. Semper vero $c = 1$ efficere licet. Sit enim $u = \frac{y'}{c} + \frac{\partial c}{2c^2}$, eritque

$$\partial u + cu^2 = \frac{\partial y'}{c} - \frac{y'\partial c}{c^2} + \partial \frac{\partial c}{2c^2} + c\left(\left(\frac{\partial c}{2c^2}\right)^2 + \frac{y'\partial c}{c^3} + \frac{y_1^2}{c^2}\right)$$

seu formae $\beta + \frac{\partial y' + y'^2}{c}$. Utrumque vero simul perficitur, faciendo

$$y = u - \frac{b}{2c} = \frac{y'}{c} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{c} + \partial \frac{1}{c}\right) = \frac{y'}{c} + \frac{\partial c - bc}{2c^2}.$$

Fit vero

$$\partial y' + y'^2 + ac - \frac{b^2}{4} + \frac{\partial^2 c}{2c} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\partial c}{c}\right)^2 - \frac{c}{2} \cdot \partial \frac{b}{c} = 0,$$

$\left(\text{ubi } \partial \frac{\partial c}{2c} - \left(\frac{\partial c}{2c}\right)^2 \text{ pro } \frac{\partial^2 c}{2c} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\partial c}{c}\right)^2 \text{ commodius adhibetur}\right)$.

Jam igitur si $\partial u + u^2 = V$ fuerit, et V functio fracta, patet et u fractam fore. Quod idem etiam tum accidere potest cum V est integra id quod vel ex solo exemplo hoc, $\partial u + u^2 = 3b + b^2 x^2$ cum radice $u = \frac{1}{x} + bx$, elucet. Sit igitur *primum V functio integra*, eaque gradus paris $m = 2n$; tum accidere poterit, *ut radix u integra* sit, et quidem gradus n, nempe $u = n_0 x^n + n_1 x^{n-1} + n_2 x^{n-2} + \ldots + n_n = n^0 x$.*) Quod si contigerit, erit

---

*) Observes, nos ita illam functionem integram vel etiam hanc $n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots + n_n x^n$ semper indicare.

$$V = \partial u + u^2$$
$$= (n_0 x^n + n_1 x^{n-1} + \ldots + n_{n-1} x + n_n)^2 + n_0 n x^{n-1} + n_1 (n-1) x^{n-2} + \ldots,$$

seu

$$(n_0^2 x^{2n} + 2 n_0 n_1 x^{2n-1} + \ldots + 2 n_n . n_0 x^n + 2 n_1 n_n x^{n-1} + \ldots) + (n_0 n x^{n-1} + \ldots)$$
$$= V = m_0 x^m + m_1 x^{m-1} + \ldots$$

Apparet vero, omnes ipsius u vel $n^0 x$ numeros (n_0, n_1, n_2 etc.), extrahendo radicem quadraticam ex V, obtentum iri, cum ipsorum ultimus n_n ex termino x^n inveniatur, ideoque nullomodo ex altissimo $(n . n_0 x^{n-1} + \ldots)$ ipsius ∂u termino turbetur.

Si igitur u ex $\partial u + u^2 = V$ functio est integra, haec erit pars integra ipsius radicis $\sqrt{V}$. Hanc igitur extrahendo et substituendo, res facile scrutatur.

Ex. $\quad V = a^2 + b + 2abx + b^2 x^2,$

$$\sqrt{V} = bx + a + \frac{1}{2x} + \ldots$$

Unde $u = bx + a$, quod probes: $(\partial u + u^2 = b + (bx + a)^2 = V)$.

Patet igitur, aequationem $\partial u + u^2 = b^2 x^2 + 2abx + c$ radice integra haud gaudere, nisi fuerit $c = a^2 + b$.

Ex. Sic $V = a^2 + b + 2(ab + c)x + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx^3 + c^2 x^2$ reddit $u = a + bx + cx^2$.

Sit vero jam u *functio fracta* $= \frac{r}{n}$, eritque

$$V = \frac{n\partial r - r\partial n + r^2}{n^2} = \frac{\partial r}{n} + r . \frac{r - \partial n}{n^2} = \frac{1}{n} . \left(\partial r + r . \frac{r - \partial n}{n}\right).$$

Si igitur V *functio fuerit integra*, ut obiter jam admisimus, cum r et n communi careant factore, $r - \partial n$ necessario factorem n admittat. Sit igitur $r = \partial n + n\nu$, $\partial r = \partial^2 n + n\partial\nu + \nu\partial n$, eritque

$$V = \frac{1}{n} . (\partial^2 n + n\partial\nu + \nu\partial n + (\partial n + n\nu) . \nu) = \partial\nu + \nu^2 + \frac{\partial^2 n + 2 . \nu\partial n}{n},$$

quae integra sit, ideoque $\partial^2 n + 2\nu\partial n = \mu n$ atque

$$V = \partial\nu + \nu^2 + \mu \quad \text{et} \quad u = \nu + \frac{\partial n}{n}.$$

Ut vero illa aequatio $\partial^2 n + 2\nu\partial n = \mu n$ in functionibus integris n, ν, μ solvatur, quae graduum n^0, ν^0, μ^0 sint, necessario sit $\nu^0 - 1 = \mu^0$, quia ipsius termini respective graduum $n^0 - 2 < \nu^0 + n^0 - 1$ et $\mu^0 + n^0$ sunt, ideoque (si vel $\mu^0 = 0$ foret) horum duo ultimi soli in potentiis ipsius x altissimis convenire possunt. Quae cum ita sint, erit necessario V gradus

$2\nu^0$, atque $\partial\nu+\mu$ gradus ν^0-1, quare, sicuti modo vidimus, ν ***pars est integra descendentis radicis*** $\sqrt{V}$ ***atque*** $\mu = V-(\nu^2+\partial\nu)$. Functiones igitur ν et μ semper immediate x V hoc modo inveniuntur, deindeque n ex $\partial^2 n + 2\nu\partial n = \mu n$ per coëfficientes indeterminatos vel aliter petitur.

Adhibendo scilicet methodum Newtonianam, facile seriem ascendentem vel descendentem pro n invenies, quae num alicubi abrumpatur, ut eo functio integra evadat, facile ex lege coëfficientium judices. Sit ex. gr. $\partial z + z^2 = a + x^2 = V$. Erit igitur $\sqrt{V} = x + \frac{a}{2x} + \dots$, ideoque $\nu = x$ et $\mu = a-1 =$ const. atque $\partial^2 n + 2x\partial n = \mu n$. Aequatio vero $\partial^2 n + \frac{c}{2}.x\partial n = \mu n$ per series resoluta suppeditat

$$n = x^r + r_1^2.\frac{x^{r-2}}{c} + \frac{r_1^4}{1.2}.\frac{x^{r-4}}{c^2} + \frac{r_1^6}{1.2.3}.\frac{x^{r-6}}{c^3} + \dots,$$

si $\mu = \frac{c}{2}r = a-1$, et $r_1^\nu = r.(r-1).(r-2)\dots(r-(\nu-1))$, ideoque abrumpitur, quoties r numerus est integer. Aequatio igitur proposita $\partial z + z^2 = a + x^2$ in qua $c=4$ et $a = 1+2r$, rationaliter integratur, quoties a numerus est impar positivus; ut $a=1$, reddit $z=x$; $a=3$, $z = x+\frac{1}{x}$; $a=5$, $z = x + \frac{2x}{x^2+\frac{1}{2}}$; et $a=7$ ($r=3$, $n = x^3+\frac{3}{2}x$), $z\left(=\frac{\partial n}{n}+\nu\right) = x + \frac{x^2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x}$, etc. (Eodem igitur casu integrabitur $\partial^2 y = (a+x^2)y$, nec tamen rationaliter.)

Ex. Sit deinde $V = 4'x = 4_0 + 4_1 x + 4_2 x^2 + 4_3 x^3 + 4_4 x^4$ seu

$$V = (2'x)^2 + 1^0 x,$$

$$\left(\text{nempe } 2'x = x^2 + ax + \frac{b-a^2}{2} \text{ si } V = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + cx + d\right);$$

ideoque $\nu = \sqrt{(4'x - 1^0 x)} = 2'x$ atque $\mu = 4'x - (2'x)^2 - \partial(2'x) = 1^0 x - a - 2x$ seu μ formae $1'x = 1_0 + 1_1 x$, ideoque $\partial^2 n + 2.2'x.\partial n = 1'x.n$. Ad quam simpliciorem formam igitur $\partial u + u^2 = 4'x$ vel $\partial^2\eta = 4'x.\eta$, si $\partial\eta = u\eta$ semper revocatur. Illam vero per series Newtonianas resolvendo, casus integrabiles facile agnosces.

Observamus vero, n tunc tantummodo functionis integrae potestatem fore, cum hujus functionis omnes factores multiplices sunt. Sit enim $n = \pi^{\mathfrak{n}}$, eritque

$$\frac{\partial n}{n} = \mathfrak{n}.\frac{\partial\pi}{\pi}, \quad \frac{\partial^2 n}{n} = \mathfrak{n}.\frac{\partial^2\pi}{\pi} + (\mathfrak{n}^2-\mathfrak{n})\left(\frac{\partial\pi}{\pi}\right)^2 = \mu - 2\nu.\mathfrak{n}.\frac{\partial\pi}{\pi},$$

$$\text{ideoque } \mathfrak{n}\pi\partial^2\pi + 2\mathfrak{n}\nu\pi\partial\pi - \mu\pi^2 = \mathfrak{n}(1-\mathfrak{n}).\partial\pi^2.$$

Nisi igitur $\mathfrak{n}=1$ seu $\pi=n$ fuerint, π ejusmodi necessario sit, ut $\partial\pi^2$ factorem π admittat. Sit vero $\pi=Cx_1^{a_1}.x_2^{a_2}.x_3^{a_3}\ldots\ldots=C.\Pi(x^a)$, et $x_1=x+\alpha_1$, $x_2=x+\alpha_2$ etc., eritque

$$\partial\pi=\pi.\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}+\ldots\right)=\pi.\Sigma\frac{a}{x}=x_1^{b_1}.x_2^{b_2}.x_3^{b_3}\ldots\ldots\times\chi,$$

si $\chi=C(a_1x_2x_3\ldots\ldots+a_2x_1x_3\ldots\ldots+\ldots\ldots)$ et $b=a-1$, ideoque

$$\partial\pi^2=x_1^{2b_1}x_2^{2b_2}\ldots\ldots\chi^2=\frac{\pi}{C}.x_1^{c_1}.x_2^{c_2}\ldots\ldots\chi^2,\text{ si } c=2b-a=a-2.$$

Ut vero $\partial\pi^2:\pi$ functio sit integra, c necessario $=>0$ sit; si enim $c_1=-1$ foret, χ factorem x_1 admittere deberet, id, quod fieri nequit, nisi $a_1=0$ ideoque x_1 omnino absit. Factores simplices ipsius π igitur exponentibus $a=>2$ gaudeant nisi $\mathfrak{n}=1$, quo casu n potestas non est.

Adnotamus vero hinc *corollarium* functionem $\partial\pi^2$ *factorem* π *tum tantummodo admittere, cum* π *factores habet omnes multiplices.* Jam vero sit V *functio rationalis fracta* $\frac{\varrho}{\nu}$ *et primum careat denominator* ν *factoribus aequalibus,* sed gaudeat tantummodo simplicibus $\nu_0.\nu_1\ldots\ldots$

Sit vero $\mathfrak{n}=\frac{y^0}{\nu_0}$, eritque

$$V=\partial\frac{y_0}{\nu_0}+\left(\frac{y_0}{\nu_0}\right)^2\text{ seu }\nu_0^2.\frac{\varrho}{\nu_0\nu_1}=\nu_0\partial y_0-y_0\partial\nu_0+y_0^2=\frac{\varrho\nu_0}{\nu_1}.$$

Carent vero et ν_0 et ϱ factoribus, quibus gaudet ν_1, (si $\nu=\nu_0.\nu_1$), ideoque y_0 functio integra esse nequit, sed ad minimum denominatore ν_1, ideoque u utrisque ν_0 et ν_1 seu omnibus ipsius ν gaudet. Sit igitur

$$y_0=\frac{z}{\nu_1}\text{ et }u=\frac{z}{\nu_0\nu_1}=\frac{z}{\nu},$$

eritque $\nu\partial z-z\partial\nu+z^2=\nu^2.\frac{\varrho}{\nu}=\varrho\nu$, seu $z(z-\partial\nu)=\nu.(\varrho-\partial z)$.

Caret vero z factoribus ipsius ν (si enim $z=\zeta\nu_0$ foret, haberetur $\mathfrak{n}=\frac{\zeta}{\nu_1}$, ideoque abesset divisor ν_0 in u, id quod haud licere, jam ostendimus); ideoque si z integra est, necessario sit $z=\partial\nu+v.\nu$, (exsistente v integra) et igitur

$$u=\frac{\partial\nu}{\nu}+v,\text{ et }V(=\partial u+u^2)=\partial v+v^2+2v.\frac{\partial\nu}{\nu}+\frac{\partial^2\nu}{\nu}=\frac{\varrho}{\nu},$$

unde $\varrho=\nu.(v^2+\partial v)+2v\partial\nu+\partial^2\nu$. Sint vero jam integrae ϱ, ν, v graduum ϱ^0, ν^0, v^0, erintque hujus aequationis termini graduum ϱ^0, ν^0+2v^0, ν^0+v^0-1 bis, et ν^0-2, ideoque (quia $v^0>0>-1$) ipsa haud valebit,

nisi fuerit $\varrho^0 - \nu^0 = 2v^0 = $ par. Tum vero termini $\nu\partial v + 2v\partial\nu + \partial^2\nu$ tam depressi erunt ordinis, ut v ex aequatione $\nu v^2 = \varrho \ldots.$ definiatur, seu *erit v pars integra radicis* $\sqrt{(\varrho.\nu^{-1})}$, si ν^{-1} descendente serie exhibetur. Coëfficientes enim v^0+1 ipsius v ex v^0+1 terminis illius aequationis altissimis $x^{\nu^0+v^0}.(ax^{v^0}+a_1x^{v^0-1}+\ldots.+a_{v_0})$ determinantur (his scilicet factis $= \nu.v^2 + = (bx^{\nu^0}+b_1x^{\nu^0-1}+\ldots.+b_{\nu_0}).(cx^{v^0}+c_1x^{v^0-1}+\ldots.+c_{v_0})^2+\ldots$, unde v^0+1 aequationes ad $c, c_1, c_2, \ldots. c_{v_0}$ definiendos idoneae exoriuntur), quibus nedum altissimus reliquorum $(\nu\partial v + 2v\partial\nu + \partial^2\nu)$ terminorum, qui gradus tantummodo $\nu^0 + v^0 - 1$ est, ingreditur. Invento igitur ita v, substituendo comprobandum est, num inferiores ipsius ϱ termini isti valori conveniant.

Sit ex. gr. $V = \frac{3'x + x^4.2'x}{a+x^2} = \frac{\varrho}{\nu}$, eritque

$$v = \sqrt{(x^4.2'x.(x^2+a)^{-1})} + \ldots. = \sqrt{((2_2.x^2+2.2_1x+2_0)(x^2-a+\ldots.))}$$
$$= \sqrt{(2_2x^4+2.2_1x^3+(2_1-2_2a)x^2+\ldots.)}$$
$$= x^2\sqrt{2_2} + \frac{2_1}{\sqrt{2_2}}.x + \left(2_0 - \frac{2_1^2}{2_2} - 2_2a\right).\frac{1}{2.\sqrt{2_2}}$$

seu $v = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, ubi $\gamma = \sqrt{2_2}$ etc. (Eosdem vero valores ex identica $(\gamma x^2 + \beta x + \alpha)^2.(x^2+a) + \ldots. \equiv x^4.2'x + \ldots.$ obtineas.)

Sit vero necessario $\varrho = \nu(v^2+\partial v) + 2v\partial\nu + \partial^2\nu$, seu

$$3'x + x^4.2'x$$
$$= 2 + a(\alpha^2+\beta) + 2(2\alpha + a(\alpha\beta+\gamma))x + (4\beta + a(\beta^2+2\alpha\gamma) + (\beta+\alpha^2))x^2$$
$$+ (2\gamma + a\beta\gamma + (\alpha\beta+\gamma))x^3 + (a\gamma^2+\beta^2+2\alpha\gamma+\ldots.)x^4 + \ldots.$$

unde $3'x$ determinatur. Si igitur $3'x (= 3_0 + 3_1x + 3_2x^2 + 3_3x^3)$ ejusmodi fuerit, erit $u = \frac{2x}{a+x^2} + \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Sin vero ipsius $3'x$ (vel ϱ) valor alius fuerit, $\partial u + u^2 = \frac{\varrho}{\nu}$ ejusmodi integrali $u = \frac{\partial\nu}{\nu} + v$ haud gaudebit. Nihilo tamen minus fieri potest ut x, ideoque v *functio sit fracta* $= \frac{r}{n}$. Hoc igitur valore adhibito, erit

$$n.(\varrho - \partial^2\nu) = 2r\partial\nu + \nu\partial r + r.\frac{\nu.(r-\partial n)}{n},$$

ideoque $\frac{r.\nu.(r-\partial n)}{n}$ functio integra. Carent vero r et n factore communi, ideoque tali gaudeant vel ν et n vel $r - \partial n$ et n. Jam vero si ν et n factori communi ν_0 gauderent, foret $\nu = \nu_0\nu_1$; $n = l.\nu_0$ et $u = \frac{\partial\nu_0}{\nu_0} + \frac{\partial\nu_1}{\nu_1}$ $+ \frac{r}{l\nu_0}$, ubi $\frac{r}{l\nu_0}$ in $\frac{a}{\nu_0} + \frac{b}{l}$ resolvitur, ut jam sit u hujus formae $\frac{\alpha}{\nu_0} + \frac{\beta}{\mu}$

et $\alpha = \partial \nu_0 + a$, atque $\frac{\beta}{\mu} = \frac{\partial \nu_1}{\nu_1} + \frac{b}{l} = \frac{l\partial \nu_1 + b\nu_1}{l\nu_1}$. Foret igitur

$$V(=\partial u + u^2) = \frac{\varrho}{\nu_0 \nu_1} = \frac{\nu_0 \partial \alpha - \alpha \partial \nu_0 + \alpha^2}{\nu_0^2} + 2\frac{\alpha\beta}{\mu.\nu} + \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2 + \partial \frac{\beta}{\mu},$$

ideoque divisorem ν_0^2 contineret (contra hypothesin), nisi vel $\frac{\alpha(\alpha - \partial \nu_0)}{\nu_0}$ integre fuerit vel $\mu = m.\nu_0$, ideoque $l = k.\nu_0$. Sin vero $l = k.\nu_0$ seu $\mu = m.\nu_0$ foret, erit $\frac{\beta}{\mu} = \frac{\beta}{m.\nu_0} = \frac{\beta_0}{\nu_0} + \frac{\beta_1}{m}$, (functionem scilicet decomponendo), ideoque $u = \frac{\alpha + \beta_0}{\nu_0} + \frac{\beta_1}{m}$, quare loco ipsius α adhibendum tantummodo foret $\alpha + \beta_0$. Si igitur decompositio rite effecta fuerit, u semper factore ν_0 carebit. Sit igitur necessario $\frac{\alpha(\alpha - \partial \nu_0)}{\nu_0}$ integra, ideoque $\alpha - \partial \nu_0 = h.\nu_0 = a$ (quia α et ν_0 communi carent factore, ideoque $\frac{\alpha}{\nu_0}$ integra esse nequit, cum ita u denominatore ν_0 omnino careret), et igitur

$$u = \frac{\partial \nu_0}{\nu_0} + \frac{\partial \nu_1}{\nu_1} + k + \frac{b}{l}.$$

Quare (in u) numerator ipsius ν_0 nihil nisi $\partial \nu_0$ esse potest.

Erit igitur necessario $u = \frac{\partial \nu_0}{\nu_0} + \frac{r'}{n'}$, carebitque n' factore ν_0; eadem vero de causa aderit $\frac{\partial \nu_1}{\nu_1} + \frac{\partial \nu_2}{\nu_2} + \ldots$ (si $\nu = \nu_0 \nu_1 \nu_2 \ldots$), ideoque erit $u = \frac{\partial \nu}{\nu} + \frac{r}{n}$, carebuntque n et ν factore communi, sicuti etiam r et n.

Erit igitur necessario $r - \partial n = \mathfrak{T} n$, et $u = \frac{\partial \nu}{\nu} + \frac{\partial n}{n} + \mathfrak{T}$, ubi n et $\mathfrak{T}$ functiones sunt integrae. Hoc igitur in $\frac{\varrho}{\nu} = \partial u + u^2$ substituto, erit

$$\frac{\varrho}{\nu} = \partial \mathfrak{T} + \mathfrak{T}^2 + \frac{\partial^2 \nu}{\nu} + \frac{\partial^2 n}{n} + 2\mathfrak{T}\left(\frac{\partial \nu}{\nu} + \frac{\partial n}{n}\right) + \frac{2\partial n}{n}.\frac{\partial \nu}{n}$$

seu

$$\varrho = \nu(\partial \mathfrak{T} + \mathfrak{T}^2) + \partial^2 \nu + 2\mathfrak{T}\partial \nu + \left(\frac{\nu \partial^2 n + 2\mathfrak{T}\nu \partial n + 2\partial \nu \partial n}{n}\right).$$

Sit igitur necessario $\frac{\nu \partial^2 n + 2(\mathfrak{T}\nu + \partial \nu)\partial n}{n}$ functio integra quaedam μ et igitur tum

$$\varrho = \nu(\mathfrak{T}^2 + \partial \mathfrak{T}) + 2\mathfrak{T}\partial \nu + \partial^2 \nu + \mu$$

tum $\nu \partial^2 n + 2(\nu \mathfrak{T} + \partial \nu)\partial n = \mu n$. Sint igitur jam ν, ϱ, n, μ, $\mathfrak{T}$ functiones graduum ν^0, ϱ^0, n^0, μ^0, $\mathfrak{N}$, eruntque hujus aequationis termini graduum $\nu^0 + n^0 - 2$ bis, $(<)\nu^0 + \mathfrak{N} + n^0 - 1$ et $\mu^0 + n^0$, ideoque erit $\mu^0 = \mathfrak{N} + \nu^0 - 1$.

Illius vero sunt gradus ϱ^0, $\nu^0+2\mathfrak{N}$, $>\nu^0+\mathfrak{N}-1$ bis, $>\nu^0-2$ et $\mu^0=\mathfrak{N}+\nu^0-1$ ideoque quia $\mathfrak{N}=>0$ necessario erit $\mathfrak{N}=\frac{\varrho^0-\nu^0}{2}$, *invenieturque igitur* $\mathfrak{T}=\sqrt{(\varrho.\nu^{-1}+\ldots.)}$, sicuti modo ostendimus, (differentia enim altissimorum graduum est $\mathfrak{N}+1$, ideoque absque ulla ex reliquis terminis oriunda turbatione inveniuntur $\mathfrak{N}+1$ ipsius $\mathfrak{T}$ coëfficientes ex altissimis horum $\nu\mathfrak{T}^2-\varrho+\ldots.=0$). Semper igitur invenitur $\mathfrak{T}$ *pars integra hujus radicis*, deindeque μ ex prima aequatione, postmodumque n ex altera.

Sit ex. gr. $V=\frac{b}{a+x^2}=\frac{\varrho}{\nu}$, ideoque $\varrho=b=$const. et $n=a+x^2$, eruntque illae aequationes

$$b=(a+x^2)(\mathfrak{T}^2+\partial\mathfrak{T})+4x.\mathfrak{T}+2+\mu \text{ atque } (a+x^2)\partial^2 n$$
$$+2(\mathfrak{T}+2x).\partial n=\mu.n.$$

Fit vero $\mathfrak{T}=\sqrt{(b.(x^2+a)^{-1}+\ldots.)}=0$ (quia $\mathfrak{N}=-1$ contra sensum, ideoque $\mu=b-2=$const. atque $(a+x^2)\partial^2 n+4x\partial n=\mu n$. Haec vero per series resoluta praebet

$$n=A.\Big(x^c+\frac{c(c-1)ax^{c-2}}{2(2c+1)}+\frac{c(c-1)(c-2)(c-3).a^2x^{c-4}}{2(2c+1).4(2c-1)}$$
$$+\frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)(c-5).a^3x^{c-6}}{2.4.6((2c)^2-1)(2c-3)}+\ldots.\Big),$$

si $\mu=c(c+3)$, seu $b=(c+1).(c+2)$; quae series aperte finitur, quoties c numerus est integer. Aequatio igitur $\partial u+u^2=\frac{b}{a+x_2}$ rationaliter integratur, quoties b dictae est formae, nempe $b=1.2$, 2.3, 3.4, 4.5 etc.

Ex. gr. $\partial u+u^2=\frac{6}{a+x^2}$, habet $c=1$, $n=A.x$, $\mathfrak{T}=0$, $\nu=a+x^2$ et igitur $u=\frac{\partial\nu}{\nu}+\frac{\partial n}{n}=\frac{2x}{a+x^2}+\frac{1}{x}$.

Tandem ad casum veniamus, quo ipsius V *denominator factoribus gaudet aequalibus*. Talem dari integrabilem, vel exinde patet, quod, facto $u=\frac{p}{x^2}+\frac{q}{n}$, fit V seu

$$\partial u+u^2=\frac{p^2}{x^{2c}}-\frac{cp}{x^{c+1}}+\frac{1}{x^c}.\Big(\partial p+\frac{2pq}{n}\Big)+\frac{n\partial q-q\partial n+q^2}{n^2},$$

ubi rursum pars $\frac{2pq}{x^c n}$ in $\frac{P}{x^c}+\frac{Q}{n}$ resolvitur, si n factore x caret, ut sit universim $V=\frac{A}{x^{2c}}+\frac{B}{n^2}$, ubi

$$A=p^2-cp.x^{c-1}+(\partial p+P)x^c \quad \text{et} \quad B=q^2+n\partial q-q\partial n+Qn.$$

Patet enim, p et P (vel q et n) ita accipi posse, ut A haud evanescat, ideoque V divisorem x saepius contineat, si $c > 0$. Vice versa igitur data $V = \frac{\alpha}{x^a . \beta}$, haec fractio in $\frac{A'}{x^a} + \frac{B'}{\beta}$ resolvetur, idque ita, ut A' gradus $a-1$ sit, (existente $\frac{B'}{\beta}$ fractione impropria, si V ejusmodi est.)

Tum vero, si radix rationalis est, $u = \frac{p}{x^c} + \frac{q}{n}$ poni poterit et p gradus $c-1$, (et $\frac{q}{n}$ impropria, si opus fuerit). Eritque universim $a = 2c$, nisi $c = 1$, quo casu $a = 1$ esse potest, ut vel ex antea traditis elucet. (Tum enim erit p const. sicuti P, ideoque $A = p^2 - p + Px = Px$; si $p = 1$, $u = \frac{1}{x} + \frac{q}{n}$ et $\frac{A}{x^{2c}} = \frac{P}{x} = \frac{A'}{x^1}$, ideoque $a = 1$, dummodo $p = 1$ fuerit, alias vero $a = 2c$.)

Sin vero $c > 1$, ex. gr. $c = 2$, erit $p = 1^0 x = p_0 + p_1 x$, $P = P_0 + P_1 x$, ideoque $A = (p_0 + p_1 x)^2 - 2(p_0 + p_1 x)x + (p_1 + P_0 + P_1 x)x^2$ seu A forma $3^0 x = 3_0 + 3_1 x + 3_2 x^2 + 3_3 x^3$, atque $\frac{A}{x^{2c}} = \frac{3^0 x}{x^4} = \frac{A'}{x^a}$, et igitur $a = 4 = 2.c$, nisi $p_0 = 0$ fuerit, quo casu $\frac{p}{x^2} = \frac{p_1}{x}$, seu revera $c = 1$, atque $\frac{A}{x^{2c}} = \frac{A'}{x^a} = \frac{\alpha + \beta x}{x^2}$, seu $a = 2 = 2.c$, (ubi $\alpha = 3_2 = P_0 + p_1 - p_1^2$ et $\beta = 3_3 = P_1$).

Universim igitur, si p haud $= 0$, cum $x = 0$, ideoque p factore x, ut decet, caret, erit $a = 2c$. Data vero fractione V, facile invenitur ejus pars $\frac{A'}{x^a}$ et A' gradus $a-1$, tumque necessario erit $A = A'$, unde et p vice versa invenitur. Sic, cum $c = 2$, fit

$$3_0 + 3_1 x + 3_2 x^2 + \ldots = p_0^2 + 2p_0(p_1 - 1)x + (p_1^2 + p_1 + P_0 - 2p_1)x^2 + \ldots,$$

unde $p_0 = \sqrt{3_0}$, et $p_1 - 1 = \frac{3_1}{2p_0} = \frac{3_1}{2\sqrt{3_0}}$. Innotescit igitur ita p, et etiam, si lubet, P ex A'. Erit *scilicet, si* $c > 1$, *universim* $p - \frac{1}{2}c.x^{c-1}$ *pars gradus* $c-1$ *radicis* $\sqrt{A}$ *ascendentis*, ubi termini cum x^c et altiores, qui in p non adsunt, negliguntur. Sin vero $a = 2$, $c = 1$ et $A' = A_0 + A_1 x$, erit $p^2 - p = A_0$, seu $p =$ const. Sic in exemplo allato, quo $c = 2$ erat, fit $p = x + \sqrt{(3_0 + 3_1 x + \ldots)}$ seu $p = \sqrt{3_0} + \left(\frac{3_1}{2\sqrt{3_0}} + 1\right)x$. Patet enim, terminum $(\partial p + P)x^c$ omitti posse vel ita acceptum intelligi, ut extractio succedat; nihil enim $a\partial p$ facit, cum hujus altissimus terminus sit $p_{c-1}x^{c-1}$.

Similiter vero, si alius ipsius V divisor fuerit $(x+b)^{a_{\prime}}$, inveniatur numerator idoneus faciendo $x+b=x_{\prime}$, ut jam sit $u=\frac{p}{x^c}+\frac{p'}{x_{\prime}^{c'}}+\frac{q'}{n'}$; rursumque, si alter est $(x+b_{\prime})^{a_{\prime\prime}}=x_{\prime\prime}^{a_{\prime\prime}}$, inveniatur eodem modo nova pars $\frac{p''}{x_{\prime\prime}^{c_{\prime\prime}}}$, hocque continuatur, donec omnes divisores in calculum vocati fuerint. Quo facto, erit $u=\Sigma\frac{p}{x^c}+\frac{q}{n}$, et tum n nullum cum denominatore ipsius V factorem communem habebit, eritque $\frac{q}{n}$ fractio impropria, si V ejusmodi est.

Sin vero $x_0^c.x_{\prime}^{c'}.x_{\prime\prime}^{c_{\prime\prime}}\ldots\ldots=\nu$ posueris, erit $V=\frac{\vartheta}{\nu^2}$ (quia $a=2c$), ideoque jam poni poterit $u=\frac{\pi}{\nu}+\frac{q}{n}$, invenieturque numeratur π ex $\Sigma\frac{p}{x^c}$ vel addendo $\frac{p}{x^c}+\frac{p'}{x_{\prime}^{c'}}+\frac{p''}{x_{\prime\prime}^{c''}}+\ldots$. Substituendo igitur, si $\overline{\nu\partial\pi}=\nu\partial\pi-\pi\partial\nu$, erit $\frac{\vartheta}{\nu^2}=\frac{\overline{\nu\partial\pi}+\pi^2}{\nu^2}+\partial\left(\frac{q}{n}\right)+\frac{2\pi q}{\nu n}+\frac{q^2}{n^2}$, seu

$$\vartheta=\overline{\nu\partial\pi}+\pi^2+\frac{\nu}{n}.\left(2\pi q+\nu\partial q+q.\frac{q-\partial n}{n}.\nu\right).$$

Sit igitur necessario $q.\frac{q-\partial n}{n}.\nu^2$ functio integra, ideoque, cum n et q, sicuti n et ν, factori communi careant, etiam $q-\partial n=\chi n$.

Sed ulterius $(2\pi q+\nu\partial q+q\chi\nu):n$ functio erit integra, ideoque, quia jam $q=\partial n+\chi n$, et igitur

$$2\pi q+\nu\partial q+\nu.q\chi=(2\pi+\nu\chi)(\partial n+\chi n)+\nu.(\partial^2 n+\chi\partial n+n\partial\chi),$$

erit et $(2\pi+\nu\chi)\partial n+\nu\partial^2 n+\nu\chi\partial n=\mu n$ et

$\vartheta-\overline{\nu\partial\pi}-\pi^2=\nu.((2\pi+\nu\chi)\chi+\nu\partial\chi)+\nu\mu$, seu $\nu\partial^2 n+2(\pi+\nu\chi)\partial n=\mu\nu$ atque

$$\Theta=\nu(\partial\chi+\chi^2)+2\pi\chi+\mu,\quad\text{si}\quad\Theta=\frac{\vartheta-\nu\partial\pi+\pi\partial\nu-\pi^2}{\nu}.$$

Ut igitur res succedat, primum ϑ ejusmodi sit, ut $\frac{\pi.(\partial\nu-\pi)+\vartheta}{\nu}$ functio sit integra $(=\Theta+\partial\pi)$; deindeque ex his aequationibus eodem fere modo, quem jam antea adhibuimus, quaerendi sunt χ, μ et n.

Sunt scilicet hujus aequationis termini graduum Θ^0, $\nu^0+2\chi^0$, $\nu^0+\chi^0-1$, $\pi^0+\chi^0$, μ^0 et in illa π^0+n^0-1, ν^0+n^0-2, $\nu^0+\chi^0+n^0-1$, μ^0+n^0; est vero $\pi^0=<\nu^0-1$, ideoque gradus hi sunt: Θ^0, $\nu^0+2\chi^0$, $\nu^0+\chi^0-1$ bis, μ^0 et ν^0+n^0-2 bis, $\nu^0+n^0+\chi^0-1$, μ^0+n^0. Necessario igitur sit $\mu^0=\nu^0+\chi^0-1$, ideoque $\Theta^0=\nu^0+2\chi^0$, unde $\chi^0=\frac{1}{2}(\Theta^0-\nu^0)$, atque igitur,

quia $\Theta^0-\mu^0=\mathfrak{x}^0+1$, *ut antea*, $\mathfrak{x}=\sqrt{(\Theta.\nu^{-1}+\ldots.)}$, quo invento facile obtinetur μ, deindeque n per series.

Erit nempe $\mu=\Theta-\nu(\partial\mathfrak{x}+\mathfrak{x}^2)-2\pi\mathfrak{x}$, et postmodum n ex

$$\nu\partial^2 n+2(\pi+\nu\mathfrak{x})\partial n = \mu n$$

putatur. Quibus inventis, erit solutio aequationis $\partial u+u^2=\frac{\vartheta}{\nu^2}$ haec $u=\frac{\pi}{\nu}+\frac{\partial n}{n}+\mathfrak{x}$. Quaeritur vero π per partes, ut indicavimus, vel etiam ex conditionibus $\frac{\pi(\partial\nu-\pi)+\vartheta}{\nu}=$ integrae, $\pi^0=<\nu^0-1$, et π ad ν primum, peti poterit.

Ex. Sit $\frac{\vartheta}{\nu^2}=\frac{2'x}{(a+x)^2}=\frac{2^0 x'}{x'^2}=\frac{2_0+2_1x'+2_2x'^2}{x'^2}$, $x'=a+x$; $c=1$, eritque $p^2-p=2_0$, $p=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(2_0+\frac{1}{4})}=$ const. et igitur

$$\mathfrak{x}_{,}=\sqrt{(\Theta\nu^{-1})}=\sqrt{\left(2_2+\frac{2_1}{x'}\right)}+\ldots.=\sqrt{2_2}=\text{const.},$$

$$\mu=\Theta-x'.2_2-2p.\sqrt{2_2}=2_1-2p.\sqrt{2_2}=\text{const.},$$

et tandem $(a+x)\partial^2 n+2(p+(a+x)\sqrt{2_2})\partial n=\mu n$. Factis vero $2p=\alpha$, $2\sqrt{2_2}=\beta$, $\alpha+e=\gamma$, $\beta e=\mu$; hinc obtinebitur,

$$n=Ax^e\left(1+\frac{e(\gamma-1)}{bx}.\left(1+\frac{(e-1).(\gamma-2)}{2bx}.\left(1+\frac{(e-2).(\gamma-3)}{3bx}+\ldots.\right)\right)\right)$$

ideoque erit n integra, quoties e seu $\frac{\mu}{\beta}$ seu $\frac{2}{2\sqrt{2_2}}-\frac{1}{2}\mp\sqrt{(2_0+\frac{1}{4})}$ numerus est integer; praetereaque haec series abrumpitur, quoties γ seu $2p+\frac{\mu}{\beta}$ seu $\frac{2}{2\sqrt{2_2}}+\frac{1}{2}\pm\sqrt{(2_0+\frac{1}{4})}$ est integer et >0. His igitur casibus integrabitur $\partial u+u^2=\frac{2^0 x}{x^2}=\frac{2_0}{x^2}+\frac{2_1}{x}+2_2$. (Universim vero n, ideoque et u, per integralia definita exhibere licet.) Ad eandem formam revocatur

$$(a_0+a_1x)\partial^2 y+2(b_0+b_1x)\partial y+(c_0+c_1x)y=0,$$

quae similiter integratur.

Ex. $V=\frac{\vartheta}{x^{2c}}$; $R.\nu=x^c$, $\frac{\vartheta}{x^{2c}}=\frac{\vartheta_0}{x^{2c}}+\varrho$, (ubi ϱ integra et gradus $\vartheta_0^0<2c$)

$$p=\tfrac{1}{2}cx^{c-1}+\sqrt{\vartheta_0}=\pi'x\ (\text{gradus } c-1)=\pi,$$

$$\Theta=\frac{\vartheta-x^c.\partial\pi+cx^{c-1}\pi-\pi^2}{x^c}=\frac{c\pi}{x}-\partial\pi+\frac{\vartheta-\pi^2}{x^c}=\frac{c\pi}{x}-\partial\pi+\frac{\vartheta_0-\pi^2}{x^c}+\varrho.x^c.$$

Quia vero, si universim functionis z gradum per z^0 indicamus, $\pi^0=c-1$, erit $\left(\frac{\pi^2}{x^c}\right)^0=c-2$, et igitur $\Theta^0=\varrho^0+c$, $\mathfrak{x}^0=\frac{1}{2}(\Theta^0-c)=\frac{1}{2}\varrho^0$, ideoque

necessario sit ϱ^0 par (= 0, 2, 4) et positivus. Si igitur aliter acciderit (ut si $\varrho^0 = 1$ fuerit), solutio rationalis non datur.

Sit igitur Ex. gr. $\varrho^0 = 0$ seu $\varrho =$ const., ideoque $\Theta^0 = c$, seu $\Theta \infty C^0 x$, eritque $\chi^0 = 0$ seu $\chi =$ const. nempe $\chi = \sqrt{\left(\frac{\Theta}{x^c}\right)}$, et igitur $\mu = \Theta - 2\pi\chi - \chi^2 x^c$, $\mu^0 = < c$, atque $x^c \partial^2 n + 2(\pi + \chi x^c)\partial n = \mu n$, unde n peti poterit. Est vero jam $\pi = \frac{1}{2}cx^{c-1} + a$, si $a^2 = \vartheta_0$, ideoque

$$\Theta = \frac{c(2-c)}{2} x^{c-2} + \varrho x^c,$$

quae functio integra haud est nisi $c => 2$. Jam vero ad casum $\varrho = 0$ descendamus, seu aequationem $\partial u + u^2 = \frac{a^2}{x^{2c}}$; ad quam integrandam immediate $u = \frac{p}{x^c} + \frac{\partial n}{n}$ ponere licet, cum integra χ aperte evanescat. Faciendum vero est, ut jam demonstravimus, $p = a + \frac{1}{2}cx^{c-1}$. Substitutione vero effecta, reperitur $x^c\partial^2 n + (2b + cx^{c-1})\partial n + \mathfrak{R} x^{c-2} n = 0$, ubi $\mathfrak{R} = \frac{c(c-2)}{4}$. Haec vero aequatio, casu $c = 2$, facile integratur; itemque casu $c = 1$ (nempe sub forma $n = Ax^{\nu_0} + Bx^{\nu_1}$). Alias vero, si $n = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu_1} + a_2 x^{\nu_2} + \dots$ substituimus, ex termino primo $Ax^{\nu+c-2} = 0$ colligimus $\nu(\nu-1) + c\nu + k = 0$, unde $\nu = 1 - \frac{1}{2}c$ vel $= -\frac{1}{2}c$, et igitur $c = 2 - \nu$ vel $= -2\nu$. Praeter casus jam exceptos foret igitur ν negativus, ideoque n functio haud integra, nec igitur solutio rationalis, vel etiam exponens c negativus $= -r$. Hic vero casus, seu $\partial u + u^2 = a^2 x^{2r}$ ex regulis antea traditis aliquantum aliter tractandus est. Faciendum sc. est

$$u = \chi + \frac{\partial n}{n} \text{ atque } \chi = \sqrt{(a^2 x^{2r} + \dots)} = ax^r,$$

ideoque $\partial^2 n + 2\chi\partial n + n\partial\chi = 0$. Quae rursum faciendo $n = ax^\nu + a_1 x^{\nu_1} + \dots$ reddit $r = -2\nu$, quare propria haec Riccati aequatio rationaliter non integratur. Sin vero seriem pro n evolvis, reperies solutionem algebraicam, quoties $2r = \frac{-4h}{2h \pm 1}$, quae jam diu innotuit. Tandem, ut *methodi nostrae praecipua momenta* aliquantum mutata breviter repetamus, si proposita fuerit aequatio $dy + (a + by + cy^2)dx = 0$ rationaliter integranda, primum

I. ponendo $y = \frac{u}{c} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{c} + \partial_x \frac{1}{c}\right)$ in formam $du + (u^2 - V)dx = 0$ transformando est.

II. Deinde functio rationalis V similiter praeparanda est, ac si integrandum foret $V dx$; nempe ita dispescatur, ut sub forma

$$V = m'x + \int\left(\frac{a'}{x+\alpha}\right) + \int\left(\frac{a''+bx}{(x+\beta)^2}\right) + \int\left(\frac{r'x}{(x+\beta)^a}\right)$$

exhibeatur, exsistente $m'x$ functione integra gradus m, atque indicante $\int$ summam plurium fractionum propriarum formae adscriptae.

III. Tum, si m numerus est par $= 2r$, radix $\sqrt{(m'x)}$ descendenter extrahenda est, cujus pars integra sit $= \mathfrak{x}$ (formae sc. $r'x$).

IV. Postmodum, si $a > 2$ et $a = 2c$, faciendum est $x + \beta = z$ atque $r'x = \varrho'z$, atque ascendenter extrahenda radix $\sqrt{(\varrho'z)}$ usque ad terminum z^{c-1} inclusive, quae sit R; sin vero $a = 2$, quaeramus p ex aequatione $p^2 - p = a'' - b\beta$. Quibus undique inventis, atque in unum collectis,

V. demum $u = \mathfrak{x} + \int\frac{1}{x+a} + \int\frac{p}{x+\beta} + \int\frac{R+\frac{1}{2}c.(x+\beta)^{c-1}}{(x+\beta)^c} + \frac{\partial n}{n}$ faciendum est, et substituendo hujusmodi aequatio $\nu\partial^2 n + \lambda\partial n = \mu n$ invenienda, ex qua per seriem finitam functio integra n detegenda, si solutio rationalis datur.

Facile enim tibi persuadeas, functionem hanc $\mathfrak{x}$, cum integra ipsius u utrobique sit pars, illae antea descriptae convenire.

Sit ex. gr. $V = \dfrac{2_0 + 2_1 x + 2_2 x^2}{x^2} = 2_2 + \dfrac{2_0 + 2_1 x}{x^2}$, eritque mox ex mom. III.) $\mathfrak{x} = \sqrt{2_2}$, sicuti antea invenimus. (Simul observes, regulas, quas antea ad casum, quo V in denominatore nonnisi simplicibus praedita esset factoribus, ut methodi genium develaremus, proponebamus, idem omnino suppeditare, ac quae nunc praescribuntur. Rem sc. ordine, quo deteximus, proponere libuit.)

Sit ex. gr. $\partial u + u^2 = \dfrac{6}{x^2 - e^2} = \dfrac{3}{e}.\left(\dfrac{1}{x-e} - \dfrac{1}{x+e}\right)$ faciamusque $u = \dfrac{1}{x-e} + \dfrac{1}{x+e} + \dfrac{\partial n}{n}$, reperiemusque ita $(x^2 - e^2)\partial^2 n + 4x\partial n - 4n = 0$ seu eandem aequationem, quam primus modus suppeditabit, (ubi $a = -e^2$). Hoc vero ulterius alio exemplo fusius, et quidem variis modis tractando, illustremus.

Ex. Sit $\partial u + u^2 = \dfrac{x^2}{e^2} + ax + b + \dfrac{c}{x} + \dfrac{f}{x^2} = V$ (et igitur solemnes exponentes $a = 2$, $c = 1$); fac $u = \dfrac{p}{x} + \dfrac{q}{n}$, et $p^2 - p = f$, eritque

$V = \frac{p^2-p}{x^2} + \frac{2pq}{xn} + \frac{n\partial q - q\partial n + q^2}{n^2} = \frac{x^2}{e^2} + ax + b + \frac{c}{x} + \frac{f}{x^2}$. Jam vero ex regulis antea traditis faciendum est $q = \partial n + \mathfrak{r}n$, quod substituendo et faciendo $\mu + x\partial\mathfrak{r} + 2p\mathfrak{r} + x\mathfrak{r}^2 = \frac{x^3}{e^2} + ax^2 + bx + c$ obtinetur

$$x\partial^2 n + 2(p + \mathfrak{r}x)\partial n = \mu n,$$

ubi $\mathfrak{r}$, μ et n necessario sint functiones integrae si n rationalis est functio.

Si vero functionum $\mathfrak{r}$, μ, ν gradus sunt $\mathfrak{r}^0$, μ^0 et n^0, erunt gradus terminorum altissimi in illa aequatione μ^0, $2\mathfrak{r}^0+1$ atque 3; in hac vero sunt $n^0+\mathfrak{r}^0$ et μ^0+n^0, ideoque necessario sit $\mu^0 = \mathfrak{r}^0$, (quod cum antea traditis convenit, quia $\nu = x$ et $\nu^0 = 1$) atque ex illa $(2\mathfrak{r}^0+1=3)\mathfrak{r}^0 = 1$, seu $\mathfrak{r}$ formae $\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1 x$ atque $\mu = \mu_0 + \mu_1 x$. Quibus valoribus substitutis oritur

$$\mu_0 + 2p\mathfrak{r}_0 + (\mu_1 + (2p+1)\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_0^2)x + 2\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1 x^2 + \mathfrak{r}_1^2 x^3 = c + bx + ax^2 + \frac{x^3}{e^2},$$

quae aequatio identica sit, ideoque suppeditat

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{1}{e^2};\quad 2\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1 = a;\quad \mu_1 + (2p+1)\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_0^2 = b \text{ et } \mu_0 + 2p\mathfrak{r}_0 = c,$$

unde facile eliciuntur

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{1}{e},\quad \mathfrak{r}_0 = \frac{ae}{2};\quad \mu_1 = b - \frac{2p+1}{e} - \frac{a^2e^2}{4},\quad \mu_0 = c - aep.$$

Ita igitur inventis $\mathfrak{r}$ et μ, erit $x\partial^2 n + 2(p + x\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1 x^2)\partial n = (\mu_0 + \mu_1 x)n$. (Observes vero, si formulas antea traditas pressius secutus fueris, fore

$$\vartheta = \frac{x^4}{e^2} + ax^3 + bx^2 + cx + f,\quad \Theta = \frac{x^3}{e^2} + ax^2 + bx + c,$$

ideoque

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{e^2} + ax + \ldots\right)} = \frac{x}{e} + \frac{ae}{2}$$

atque

$$\mu = c - aep + \left(b - \frac{1+2p}{e} - \frac{a^2e^2}{4}\right)x;$$

ex nuper vero traditis erit

$$m'x = \frac{x^2}{e^2} + ax + b,\quad \mathfrak{r} = \sqrt{(m'x + \ldots)} = \frac{x}{e} + \frac{ae}{2},\quad p^2 - p = f,$$
$$\text{et } u = \mathfrak{r} + \frac{p}{x} + \frac{\partial n}{n};$$

quod ad eandem aequationem conducit:

$$\partial^2 n + 2\left(\mathfrak{r} + \frac{p}{x}\right)\partial n = \left(\frac{\mu_0}{x} + \mu_1\right).$$

Patet igitur, utrosque modos sibi convenire.)

Jam vero (nisi $\mu \equiv 0$, quo casu $\partial n = 0$,) ex ista aequatione evolvendo quaerenda est functio integra n, quae jam sit

$$a x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + a_3 x^{\nu-3} + \dots a_n x^{\nu-n} + \dots$$

qua substituta, hae oboriuntur aequationes

1) $2 \mathfrak{r}_1 \nu = \mu_1$,

(quem valorem jam insequentes introduximus)

2) $2 \mathfrak{r}_1 a_1 = 2 \mathfrak{r}_0 \nu a - \mu_0 a$,

3) $2 \mathfrak{r}_1 . 2 a_2 = (\nu(\nu-1) + 2 p \nu) a + (2 \mathfrak{r}_0 (\nu - 1) - \mu_0) a$,

4) $2 \mathfrak{r}_1 . 3 a_3 = ((\nu-1).(\nu-2) + 2p.(\nu-1)) a_1 + (2 \mathfrak{r}_0 (\nu-2) - \mu_0) a_2$

. . . .

quae rite solutae suppeditant

$$1) \quad \nu = \frac{\mu_1}{2 \mathfrak{r}}$$

(qui numerus integer sit, ut solutio rationalis evadat),

$$2) \quad a_1 = \frac{(2 \mathfrak{r}_0 \nu - \mu_0)}{2 \mathfrak{r}_1} . a$$

$$3) \quad a_2 = \frac{\nu(\nu - 1 + 2p) a + (2 \mathfrak{r}_0 . (\nu - 1) - \mu_0) a_1}{2 . 2 \mathfrak{r}_1}$$

$$4) \quad a_3 = \frac{(\nu-1)(\nu - 2 + 2p) a_1 + (2 \mathfrak{r}_0 . (\nu-2) - \mu_0) a_2}{3 . 2 \mathfrak{r}_1},$$

unde jam intelligitur, fore universim

$$a_{r+1} = \frac{(\nu - r + 1)(\nu - r + 2p) a_{r-1} + (2 \mathfrak{r}_0 (\nu - r) - \mu_0) a_r}{(r+1) . 2 \mathfrak{r}_1}$$

Jam vero apparet, fore n integram, quoties duo a, ut a_{r-1} et a_r, evanescunt

Sit exempli gratia $r = 1$, atque $\mu_0 = 2 \mathfrak{r}_0 \nu$, seu $\mu_0 . \mathfrak{r}_1 = \mu_1 \mathfrak{r}_0$ (unde $a_1 = 0$), et $\nu = \frac{\mu_1}{2 \mathfrak{r}_1} =$ integro, eritque $n = a x^{\nu}$, si praeterea $\nu(\nu - 1 + 2p)$ $= 0$ seu vel $\nu = 1 - 2p$ vel $\nu = 0$; tumque erit

$$u = \frac{p}{x} + \frac{\partial n}{n} + \mathfrak{r} = \frac{p}{x} + \frac{\nu}{x} + \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1 x$$

seu $u - \mathfrak{r}$ vel $= \frac{p}{x}$ vel $= \frac{1-p}{x}$, quod eodem redit. Sit deinde $r = 2$, et $a_2 = 0 = a_3$, ideoque $\overline{\nu - 1}(\nu - 2 + 2p) = 0$ atque

$$\nu(\nu - 1 + 2p) a + (2 \mathfrak{r}_0 . \nu - 1 - \mu_0) a_1 = 0.$$

Erit igitur vel $\nu = 1$ vel $\nu = 2(1-p)$, atque

$$n = a x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} \text{ et } u = \frac{p}{x} + \mathfrak{r} - \frac{a \nu x^{\nu-1} + a_1 (\nu-1) x^{\nu-2}}{a x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1}}$$

$$\text{seu} \quad u = \frac{p}{x} + \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1 x + \frac{a \nu x + a_1 (\nu - 1)}{(a x + a_1) x}.$$

Ne vero in denominatore ipsius $\frac{\partial n}{n}$ factor x adsit, faciendum est $\nu = 1$; aliter enim partem $\frac{\nu-1}{x}$ subministraret, quae ipsi $\frac{p}{x}$ juncta daret $\frac{p+\nu-1}{x}$ seu $\frac{1-p}{x}$, quod et eodem redit, cum $1-p$ radix sit aequationis $p^2-p=f$. Facto igitur $\nu=1$, altera conditio fit $4p\mathfrak{r}_1-\mu_0(2\mathfrak{r}_0-\mu_0)$, ex $a_1=0$ petenda.

Universim vero tenendum est, aequationem propositam rationaliter integrari, quoties ν est integer, praetereaque unica conditio, cui numerus, integer (r) inest, inter coëfficientes a, b, c, e, f valet. Sit necessario nempe $\frac{\mu_1}{2\mathfrak{r}} = \nu =$ numero integro, atque $(\nu-r+1).(\nu-r+2p)=0$ seu vel $\nu+1=r$ vel $\nu+2p=r$. Semper vero $\nu+1=r=$ integro faciendum, seu $\frac{\mu_1}{2\mathfrak{r}_1} = \frac{1}{2}.(be-1-2\mu-\frac{1}{4}a^2e^2) =$ integro.

Sit nempe $n = ax^\nu + a_1x^{\nu-1} + \ldots + a_nx^{\nu-n}$ (et $a_{n+1}=0=a_{n+2}$ etc.) eritque

$$\frac{\partial n}{n} = \frac{a\nu x^n + a_1(\nu-1)x^{n-1} + \ldots + a_n(\nu-n)}{x.(ax^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)},$$

quae fractio rite distributa partem $\frac{\nu-n}{x}$ subministrat, unde u non $\frac{p}{x}$ sed $\frac{p+\nu-n}{x}$ contineret, ideoque perperam distributa foret. Ut hoc evitetur, necessario sit $\nu=n=r\mp1$, ideoque ultimus ipsius n terminus $= a_\nu x^0 = a_\nu =$ constanti. Ita igitur electio valorum ipsius p perficitur.

Praeterea vero apparet, a_r tandem sub forma $a.A$ obtentum iri, ideoque $A_r=0$ faciendum (qua dicta inter a, b, c, e, f et r est aequatio) ut a_r evanescat. Quia vero jam $\nu=r-1$ et $a_r=0$, erit $a_{\nu+1}=0$, ideoque $a_{\nu+m}=0$, seu series necessario abrumpetur.

Sit ex. gr. $a=0$, $b=\frac{1}{4e^2}$, $c=\frac{-1}{2e}$ et $f=\frac{3}{4}$: eritque $p=\frac{-1}{2}$ vel $\frac{+3}{2}$, $u=\frac{x}{e}+\frac{p}{x}+\frac{\partial n}{n}$, $\mathfrak{r}=\frac{x}{e}$, seu $\mathfrak{r}_0=0$ et $\mathfrak{r}_1=\frac{1}{e}$, $\mu=-\left(\frac{1}{2e}+Bx\right)$, si $B=\frac{2p+1}{e}-\frac{1}{4e^2}=-\mu_1$ seu $B\frac{+1}{4e^2}=0$ vel $\frac{4}{e}$: et igitur

$$\nu = \frac{\mu_1}{2\mathfrak{r}_1} = \frac{-B}{2.\frac{1}{e}} = \frac{-Be}{2} = \frac{1}{8e} \text{ vel } \frac{1}{8e}-2,$$

$$a_1 = \left(\frac{e}{2}x\frac{1}{2e}\right)a = \frac{a}{4}a_2 = e.\frac{\nu(\nu-1+2p)+\frac{1}{8e}}{4}.a = a_1a \text{ etc.}$$

et igitur $n = \alpha\left(x^{\nu} + \frac{x^{\nu-1}}{4} + A_2 x^{\nu-2} + \ldots\right)$. Jam vero sit $\nu = 1$, $e = \frac{1}{8}$, eritque $A_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{2p+1}{4} = 0$, si $p = -\frac{1}{2}$, ideoque $n = \alpha(x + \frac{1}{4})$ atque $u = 8x \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x+\frac{1}{4}}$, quae igitur solutio ad aequationem $\underset{x}{\partial} u + u^2 = \frac{x^2}{e^2} + \frac{1}{4e^2} - \frac{1}{2xe} + \frac{3}{4x^2} = 8^2.(x^2 + \frac{1}{4}) - \frac{4}{x} + \frac{3}{4x^2}$ pertinet.

Ulterius progrediendo alias quaeras, si lubet.

Lundae d. 24 Maii 1840.

3.

Disquisitio, qualis aequatio differentialis gaudeat integrali algebraico completo? qualisve primarie transcendenti? quaenamque forma integrali competat?

(Auctore *C. J. D. Hill*, math. prof. Lundae.)

Sit illud $N^0(x, y, c) = 0 = n$, cum constante arbitrio c. Irrationalitate sublata formam functionis integrae induere poterit, postmodumque ejus differentiale $\underset{x}{\partial} n + \underset{y}{\partial} n . \underset{x}{\partial} y = 0$ rationaliter continebit x, y et c, ideoque eliminato c, supererit aequatio rationalis inter x, y et y' $(= \underset{x}{\partial} y)$, quae secundum y' altioris haud erit gradus, ac ipsa $n = 0$ secundum c. Ipsa enim illa aequatio differentiata $n' + n_1 . y' = 0$ suppeditat y' rationaliter in c, ideoque ipsi y' plures valores diversos (pro iisdem x et y) tribui nequit, ac quae ipsi c ex aequatione $n = 0$ competit; quare necessario ipsum y' per aequationem ejus gradus, cujus est n secundum c, determinabitur; (vel etiam minoris, si c valoribus aequalibus gaudet, quos tamen facile per $\underset{c}{\partial} n = 0$ exsulare facias.)

Sin vero aequatio $n = 0$ ipsum c rationaliter non contineret, ipsa vel secundum c rationalis efficienda esset, vel etiam resolvenda. Si igitur ita obtineretur $c = z$, seu $c = z(xy)$, exsistente z functione irrationali vel etiam transcendente quadam ipsorum x et y, obtineretur statim $dc = 0 = z' dx + z_1 dy$, seu aequatio differentialis $dy + p\,dx = 0$, (exsistente $z' = p . z_1$,) quae universim illius functionis surdae vestigia aliqua retinebit, vel etiam aliquanto simplicior evadet. Differentiando enim functionem irrationalem gradus cujuscunque, obtinetur omnimodo similis. Si enim est y ejusmodi ipsius x, nempe data per aequationem rationalem $n^0(x, y) = 0$, erit $n' dx + x_1 \partial y = 0$, ideoque $\frac{dy}{dx}$ rationalis functio ipsorum y et x, et igitur irrationalis ipsius x ejusdem gradus ac y, attamen unicam ubique dimensionem minor.

Sin vero y fuerit functio transcendens vel etiam algebraice ex pluribus transcendentibus φx, ψx, ξx etc. composita, nempe $y = A(\varphi x, \psi x, \xi x, \ldots)$ habebitur $\underset{x}{\partial} y$ aeque composita, vel saltem paulo simplicior; est enim formae

$$(\underset{x}{\partial} y =) A(\varphi', \psi, \xi). \underset{x}{\partial}\varphi + A(\varphi, \psi', \xi). \underset{x}{\partial}\psi + A(\varphi, \psi, \xi'). \underset{x}{\partial}\xi + \ldots.$$

ideoque universim $\underset{x}{\partial} y$ easdem transcendentes φ, ψ, ξ algebraice continet, praetereaque harum derivatas $\underset{x}{\partial}\varphi$, $\underset{x}{\partial}\psi$, $\underset{x}{\partial}\xi$, ... lineariter, quarum unaquaeque sua primitiva aliquantum simplicior censeri potest, vel ad maximum aeque transcendens. (Est enim $\underset{x}{\partial} Lx = \frac{1}{x} =$ algebraica, $\underset{x}{\partial}\beta^x = \beta^x$, $\partial Sx = Cx$, etc. — Universimque omnes functiones civitate analytica huc usque donatae, integrando ortae censeri possunt, eoque magis composita ac ipsarum derivatae' quamquam interdum nonnullae, ut $\underset{x}{\partial}\Gamma x$, speciem difficiliorem prae se ferant.)

Hinc igitur elucet, universim ipsam y' ut functionem irrationalem ipsius x ejusdem gradus ac y, vel etiam ut transcendentem ejusdem ordinis ac y censeri posse. Hac vero ipsa de causa junctae genuinam suam naturam occultare possunt. Quamquam enim in aequatione $z' dx + z_1 dy = 0$ universim functiones surdae (irrationales vel transcendentes), quae in integrali $z = c$ adsunt, vestigia suae reliquerunt, (vel enim eae ipsae vel saltem earum derivatae huic insunt); fieri tamen potest, ut in aequatione reducta $dy + p\,dx = 0$ nonnullae vel etiam omnes sublato, cui insunt factore, ipsis z' et z_1 communi, evanuerint.

Hoc ex. gr. evenit, cum aequatio formae fuerit $P^n Q = c$, vel $\beta^P Q = c$, surdaeque ipsi P insunt; tum enim obtinetur

$$z' : z = \frac{nP'}{P} + \frac{Q'}{Q} : \frac{nP_1}{P} + \frac{Q_1}{Q} = nP'Q + Q'P : nP_1 Q + Q_1 P$$

vel $= P' + \frac{Q'}{Q} : P_1 + \frac{Q_1}{Q}$, ideoque si $n = \frac{m}{r}$ fuerit, ita abiet quantitas irrationalis $\sqrt[r]{(P^m)}$, et in postremo casu aliae transcendentes haud remanebunt, ac quae in ∂P adsunt. Factor vero sublatus erat P^{n-1} vel β^P, ideoque ex eisdem surdis composita ac z.

Ut vero ordine procedamus, videamus primum num aequatio integralis $z =$ const. radicem continere possit, quae in aequatione differentiali conspicua non sit. Sit ipsa 1) *quadratica*, poteritque semper z sub forma $a + b\sqrt{c}$ poni, exsistentibus a et b functionibus ipsius x haud ex $\sqrt{c}$ compositis.

Differentiando invenitur $dz = \dfrac{2\,da\sqrt{c} + \frac{1}{b}.d(b^2 c)}{2\sqrt{c}}$, ideoque

$$\partial_x z : \partial_y z = 2b\partial_x a.\sqrt{c} + \partial_x (b^2 c) : 2b\partial_y a.\sqrt{c} + \partial_y (b^2 c)$$
$$= -(2b)^2.c.\partial_x a.\partial_y a + \partial_x (b^2 c).\partial_y (b^2 c) + 2b\sqrt{c}.(\partial_x a.\partial_y (b^2 c) - \partial_y a.\partial_x (b^2 c))$$
$$: (\partial_y (b^2 c))^2 - (2b\,\partial_y a)^2.\,c.$$

Hic igitur valor (ideoque p in aequatione diff. inde oriente $dy + p\,dx = 0$,) radice $\sqrt{c}$ caret, quoties vel a absolute constans fuerit vel $\partial_x a : \partial_y a = \partial_x (b^2 c) : \partial_y (b^2 c)$, ideoque integrando $a = \varphi(b^2 c)$, i. e. a functio ipsius $b^2 c$ seu ipsius $b\sqrt{c}$ fuerit. Tum vero aequatio integralis est $\varphi(b^2 c) + b.\sqrt{c} = \text{const.}$, quae resoluta praebebit $b\sqrt{c} = \text{const.}$, ideoque $b^2 c = \text{const.}$ Sin vero a constans fuerit, erit jam $(z - a)^2 = b^2 c = \text{const.}$

Theor. I. Si igitur $\sqrt{c}$ in p non expresse conspicitur, etiam in integrale aequationis $dy + p\,dx = 0$ abesse poterit. Dabitur scilicet functio, quae radicem exsulare faciat. (De solutionibus particularibus, vel etiam singularibus, non agimus. Observandum vero, jam de absentia ipsius $\sqrt{c}$, quae algebraice ita efficitur ex $a + b\sqrt{c} = C = z$, ut obtineatur $b^2 c = (z - a)^2$ seu $b^2 c = (C - a)^2$ i. e. constans cum variabilibus commixtum, (cum sc. a variabile sit) heic nullam fieri mentionem. Ostendimus enim, integrale formam $b^2 c = \psi z$ valde diversam indui posse, si sc. ex aequatione $\varphi u + \sqrt{u} = z$, obtinetur $u = \psi z$.)

Sit ex. gr. $dy(y - p) = dq + y\,dp$, exsistentibus p et q functionibus ipsius x (vel q ipsius p), eritque sane $y = p + \sqrt{(p^2 + 2q + C)}$ seu y surda, attamen const. arb. $C = y^2 - 2py - 2q$ rationalis in y, (itemque in x, si p et q rationalia sunt).

(2) Sit deinde aequatio integralis *Cubica*, nempe $Z = a + bv + cv^2$ atque $v^3 = 3q$, eritque

$$v^2 \partial v = \partial q \text{ et}$$
$$\partial z = \partial a + v\partial b + v^2 \partial c + \frac{\partial q}{v^2}.(b + 2cv)$$

seu

$$v^2 \partial z = v^2 \partial a + 3q\partial b + 3q\partial c.v + b\partial q + 2c\partial q.v$$

ideoque

$$\partial_x z : \partial_y z = v^2 \partial_x a + (3q\partial_x c + 2c\partial_x q)v + 3q\partial_x b + b\partial_x q$$
$$: v^2 \partial_y a + (3q\partial_y c + 2c\partial_y q)v + 3q\partial_y b + b\partial_y q$$

id, quod breviter scribatur

$$\partial_x z : \partial_y z = v^2 X_0 + vX_1 + X_2 : v^2 Y_0 + vY_1 + Y_2.$$

Ut vero jam v in denominatore tollatur, amplificemus per

$$(v_0^2 Y_0 + v_0 Y_1 + Y_2).(v_1^2 Y_0 + v_1 Y_1 + Y_2) \text{ seu}$$
$$(v_0 v_1)^2 Y_0^2 + v_0 v_1.(v_0+v_1).Y_0 Y_1 + v_0 v_1 Y_1^2 + (v_0+v_1) Y_1 Y_2 + Y_2^2$$
$$+ (v_0^2 + v_1^2) Y_0 Y_2$$

existentibus v_0, v_1, v_2 radicibus aequationis $\nu^3 = 3q$, ideoque v_0 et v_1 hujus $\nu^2 + \nu v + v^2 = 0$, indeque $v_0 + v_1 = -v$ et $v_0 v_1 = v^2$; quare iste factor fit

$$= v^4 Y_0^2 - v^3 Y_0 Y_1 + v^2 Y_1^2 - v^2 Y_0 Y_2 - v Y_1 Y_2 + Y_2^2$$
$$= v^2(Y_1^2 - Y_0 Y_2) + v.(3q Y_0^2 - Y_1 Y_2) - 3q Y_0 Y_1 + Y_2^2.$$

In quem igitur si $(X_0 v^2 + X_1 v + X_2)$ ducitur, erit novus denominator

$$v^4 X_0 (Y_1^2 - Y_0 Y_2) + v^3 X_0 (3q Y_0^2 - Y_1 Y_2) + (Y_2^2 - 3q Y_0 Y_1) X_0 v^2$$
$$+ v^3.X_1(Y_1^2 - Y_0 Y_2) + (3q Y_0^2 - Y_1 Y_2) X_1 v^2$$
$$+ (Y_2^2 - 3q Y_0 Y_1) X_1 v + (Y_2^2 - 3q Y_0 Y_1) X_2$$
$$+ X_2 (Y_1^2 - Y_0 Y_2) v^2 + v(3q Y_0^2 - Y_1 Y_2) X_2.$$

Ut igitur hic ab v et v^2 liberetur, sit necessario tum

$$3q X_0 (Y_1^2 - Y_0 Y_2) + (Y_2^2 - 3q Y_0 Y_1) X_1 + (3q Y_0^2 - Y_1 Y_2) X_2 = 0$$

tum

$$(Y_2^2 - 3q Y_0 Y_1) X_0 + (3q Y_0^2 - Y_1 Y_2) X_1 + (Y_1^2 - Y_0 Y_2) X_2 = 0;$$

quae igitur sunt aequationes differentialiter particulares, duas functionum a, b, c per tertiam atque v vel q determinantes, quia

$$X_0 = \underset{x}{\partial} a, \quad X_1 = 3q \underset{x}{\partial} c + 2c \underset{x}{\partial} q = \underset{x}{\partial}(c^3 q^2) : c^2 q, \text{ et}$$
$$X_2 = 3q \underset{x}{\partial} b + b \underset{x}{\partial} q = \underset{x}{\partial}(q b^3) : b^2, \text{ atque}$$
$$Y_0 = \underset{y}{\partial} a, \quad Y_1 = \underset{y}{\partial}(c^3 q^2) : c^2 q, \text{ et } Y_2 = \underset{y}{\partial}(q b^3) : b^2.$$

Ut vero istae, quae difficillimae videntur, integrentur, ad ipsarum originem regrediendum est. Patet scilicet, si brevitatis causa ponimus $a + bv + cv^2 = 2^0 v$, fore $z = 2^0 v$, et, ut autea, $\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} 2^0 v : \underset{y}{\partial} 2^0 v. (= P)$. Quoniam vero jam ab dextra parte v abesse censetur, nihil mutatur, si pro v scribimus v_0 et v_1. Erit igitur et $\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} 2^0 v_0 : \underset{y}{\partial} 2^0 v_0$ et $\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} 2^0 v_1 : \underset{y}{\partial} 2^0 v_1$. Hae vero proportiones facile integrantur, suppeditantque $2^0 v_0 = \varphi z$ et $2^0 v_1 = \psi z$, quae igitur aequationes una cum supposita $2^0 v = z$ aeque valent, si scilicet aequatio differentialis $\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = P$ radice cubica v seu $\sqrt[3]{(3q)}$ expressa caret.

Quia igitur ita aequationem $z = a + bv + cv^2$ ponere non licet, nisi simul sit $\varphi z = a + bv_0 + cv_0^2$ itemque $\psi z = a + bv_1 + cv_1^2$, existentibus v, v_0 et v_1 radicibus aequationis $v^3 - 3q = 0$, ideoque $v + v_0 + v_1 = 0$

atque $v^2+v_0^2+v_1^2=0$; necessario erit $Z+\Phi z+\psi z=3a$, seu $z=\chi(a)$, si scilicet aequatio resolvitur. Hinc igitur colligitur

Theorema II. *Aequatio differentialis* $\underset{x}{\partial} z = P\underset{y}{\partial} z$ seu $\partial y + P\partial x$, (quae idem valet) *in qua quantitas P nullam radicem cubicam expressam exhibet* (vel saltem non hanc $\sqrt[3]{q}$, aliis tamen, ut $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{r}$, ... praesentibus) *integrale formae*

$$Z = A+B\sqrt[3]{q}+C\sqrt[3]{q^2} \text{ (seu = const.)}$$

gaudere nequit, nisi simul detur functio ipsius Z (i. const. arbit.) *ejusmodi, ut ipsius valor in quantitatibus ab ista radice liberis exhibeatur.*

3) Hoc vero theorema ad radicem completam aequationis cubicae, vel etiam altioris gradus, facile, modo jam adhibito, extenditur.

Sit enim $v^3=3pv+3q$ (vel etiam $v^3+Av^2+Bv+C=0=(3^0v)$) ponaturque ut antea $a+bv+cv^2=2^0v$, sitque $Z=2^0v$ integrale aequationis $\underset{x}{\partial} z = P\underset{y}{\partial} z$, quae ipsa radice cubica v caret; eritque ut antea

$$\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} 2^0 v : \underset{y}{\partial} 2^0 v,$$

ideoque postrema ratio $\equiv P$, si ipsum v per aequationem $3^0v=0$ exsulare facimus.

Hoc vero necessario valeat, quaecunque radicem v, v_0, v_1 adhibita fuerit, ideoque erit etiam $\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} 2^0 v_0 : \underset{y}{\partial} 2^0 v_0$ atque $\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} 2^0 v_1 : \underset{y}{\partial} 2^0 v_1$, et igitur integrando $2^0 v_0 = \Phi z$ atque $2^0 v_1 = \psi z$.

Junctim igitur erit $z+\Phi z+\psi z$ seu functio quaedam ipsius $z(=2_1(z))$ $=2^0v+2^0v_0+2^0v_1$ i. e. aequalis functioni symmetricae radicum v, v_0, v_1, quae igitur necessario ex indole aequationis algebraicae $3^0v=0$ rationaliter in a, b et c atque coëfficientibus p, q (seu A, B, C), quae v non continent, exprimetur. Est scilicet

$$2^0v+2^0v_0+2^0v_1 = 3a+b.(v+v_0+v_1)+c(v^2+v_0^2+v_1^2)$$

seu

$$= 3a+b.\Sigma_1+c.\Sigma_2 \text{ atque } \Sigma_1+A=0,$$

et $\Sigma_2+A\Sigma_1+2B=0$, ideoque erit $2_1(z)=3a-b.A+c(A^2-2B)$, qui valor jam ab v liber est (et nedum C vel q expresse continet) *).

*) Si priori via rem absolvissemus, integrandum nobis foret aequationes multipliciter (particulariter vulgo dicunt) differentiales easque magis magisque completas quarum integralia igitur simul constant. Ut si fuerit $v^3=3pv+q$, obtinuissemus has aequationes:

4) Patet vero, similem ratiocinationem ad surdas cujuscunque gradus extendi posse. Sit nempe universim $z = n^0 v = n_0 + n_1 v + n_2 v^2 + \ldots . + n_n . v^n$ integrale aequationis $\underset{x}{\partial} z = P . \underset{y}{\partial} z$, exsistente v radice utcunque composita (vel ex radicibus potentiatibus vel ex functionibus aliis aut algebraicis aut transcendentibus, quae solutionem cossicam efficiunt) aequationis

$$M^0 v = 0 \quad \text{seu} \quad m_0 + m_1 v + m_2 v^2 + \ldots . + m_m v^m = 0,$$

quae in P conspicua non sit, eritque differentiando

$$\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} (n^0 v) : \underset{y}{\partial} (n^0 v).$$

Reductione vero rite effecta ope aequationis $M^0 v = 0$, haec ratio in P mutabitur, ideoque ipso v carebit. Patet vero, universim eadem reductione adhibita $\underset{x}{\partial} (n^0 v_1) : \underset{y}{\partial} (n^0 v_1)$ in P mutari, existente v_1 alterutra quaecunque radicum aequationis $M^0 v = 0$. Erit igitur necessario

$$\underset{x}{\partial} (n^0 v_1) : \underset{y}{\partial} (n^0 v_1) = P = \underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z,$$

ideoque integrando $n^0 v_1 = \varphi_1 z$; et si reliquae radices sunt $v_2, v_3, \ldots . v_m$, erit similiter $n^0 v_2 = \varphi_2 z$, $n^0 v_3 = \varphi_3 z$, ... $n^0 v_m = \varphi_m z$. Has igitur aequationes addendo, obtinebimus

$$n^0 v_1 + n^0 v_2 + n^0 v_3 + \ldots . + n^0 v_m = \varphi_1 z + \varphi_2 z + \ldots . + \varphi_m z,$$

seu breviter $\Sigma (n^0 v) = \Sigma \varphi z = \Phi z$. Est vero $\Sigma (n^0 v)$ functio symmetrica radicum $v_1, v_2, \ldots . v_m$ aequationis $M^0 v = 0$, ideoque ejus valor obtinetur rationaliter in coëfficientibus $m_0, m_1, \ldots . m_n$ et $n_0, n_1, \ldots . n_n$, isque $= \Phi z$ seu const. erit.

Demonstravimus igitur ita brevissime hoc Theorema maximi momenti:

Theor. III. Si $z = n^0 v$ *integrale fuerit aequationis differentialis* $\underset{x}{\partial} z = P . \underset{y}{\partial} z$, *seu hujus* $dy + P dx = 0$, *fueritque v radix aequationis* $M^0 v = 0$ *in ipso P non conspicua, atque* $n^0 v$ *functio quaecunque secundum v rationalis, (vel integra, vel etiam fracta, quae semper per istam aequationem ad integram revocatur); semper dabitur ejusmodi functio*

$X_0 = \underset{x}{\partial} a + 2 \underset{x}{\partial} (cp)$, $\qquad Y_0 = \underset{y}{\partial} a + 2 \underset{y}{\partial} (pc)$,

$X_1 = 2c \underset{x}{\partial} q + 3q \underset{x}{\partial} c + b \underset{x}{\partial} p + 2p \underset{x}{\partial} b$, $\qquad Y_1 = 2c \underset{y}{\partial} q + 3q \underset{y}{\partial} c + b \underset{y}{\partial} p + 2p \underset{y}{\partial} b$,

$X_2 = b \underset{x}{\partial} q + 3q \underset{x}{\partial} b - p \underset{x}{\partial} a$ et $\qquad Y_2 = b \underset{y}{\partial} q + 3q \underset{y}{\partial} b - p \underset{y}{\partial} a$;

$$X_0 (X_2^2 - 3q Y_0 Y_1 + 3p Y_0 Y_2) + X_1 (3q Y_0^2 - Y_1 Y_2) + X_2 (Y_1^2 - Y_0 Y_2 - 3p Y_0^2) = 0,$$

$$X_0 (3q Y_1^2 - 3q Y_0 Y_2 - 3p Y_1 Y_2) + X_1 (-3q Y_0 Y_1 + Y_2^2 + 3p Y_0 Y_2) + X_2 (-Y_1 Y_2 + 3q Y_0^2) = 0.$$

ipsius z (quae ut constans arbitrarius alterius illius aequationis censeri potest), quae rationaliter in coëfficientibus functionum $\pi^0 v$ et $\pi^1 v$ (i. e. ita ut radix illa v ulterius expressa non adsit, admissis praeterea radicibus aliis, quae forsan in his coëfficientibus vel in P adsunt) exprimatur."

Observandum vero est, nos in tota hac demonstratione ejus rei nullam mentionem fecisse, quod coëfficientes aequationis $M^0 v = 0$ algebraicae, nedum rationales ipsius x forent functiones; fieri igitur potest ut hi qualescunque functiones, dummodo ab ista radice diversae, sint.

Hinc vero atque ex eis, quae ab initio monuimus, facile concluditur generalius:

Theor. IV. Integrale aequationis differentialis alias functiones irrationales necessario non continere, quam quae vel in hac expresse adfuerint, vel quae constantium functionandi (separatim saltem) ex illo evanescunt.

5) Quin imo haec Theoremata ad radices transcendentes extendentur, quatenus ipsae per aequationem gradus infiniti datae fuerint.

Ut si loco aequationis $M^0 v = 0$ consideravimus hanc $\beta^{\mu v} - q = 0$, quae idem valet ac algebraica $\left(1 + \frac{\mu v}{m}\right)^m - q = 0$, existente m infinito, (seu $1 + \mu v + \frac{(\mu v)^2}{2} + \dots - q = 0$), cujus radices sunt

$v = \frac{1}{\mu} Lq = \frac{m}{\mu} (\sqrt[m]{q} - 1)$ seu $v = \frac{1}{\mu} Lq + \nu . \pi i (= v_1, v_2, \dots v_m, \dots)$:

erit sane ut antea

$$\Phi z = \Sigma(\pi' v) = \pi_0 . m + \pi_1 . \Sigma v + \pi_2 . \Sigma(v^2) + \pi_3 . \Sigma(v^3) + \dots$$

Posito vero $1.2.3 \dots m = \Gamma m$, erit illa aequatio

$$\frac{(\mu v)^m}{\Gamma m} + \frac{(\mu v)^{m-1}}{\Gamma(m-1)} + \dots + \mu v + 1 - q = 0, \text{ seu}$$

$$v^m + \frac{m}{\mu} . v^{m-1} + \frac{m . (m-1)}{\mu^2} . v^{m-2} + \dots + \frac{(1-q) . \Gamma m}{\mu^m} = 0.$$

ideoque $\Sigma v + \frac{m}{\mu} = 0$, $\Sigma(v^2) + \frac{m \Sigma(v)}{\mu} + 2 . \frac{m(m-1)}{\mu^2} = 0$, etc., et igitur

$$\Phi z = \pi_0 . m - \pi_1 . \frac{m}{\mu} + \pi_2 . \left(\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 - 2 . \frac{m . m - 1}{\mu^2}\right) + \dots \text{ seu}$$

$$\Phi z = \frac{1}{m} . \Phi z = \pi_0 - \pi_1 . \frac{1}{\mu} + m . \frac{\pi_2}{\mu^2}\left(1 - 2 . \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) + \dots$$

Ut igitur functio Φz finita evadat, sit $\pi_2 = \frac{0}{m} = 0 = \pi_3$ etc., et igitur

$$\pi' v = I' v = I_1 + I_2 . \frac{Lq}{\mu} \text{ (seu unius gradus ad } v).$$

Theor. V. Si igitur fuerit $dy + Pdx = 0$, nec adfuerit Lq in P, illiusque integrale $I_0 + I_1 . \frac{Lq}{\mu} =$ const.; hoc et tali sub forma, (quae haec $I_0 - \frac{I_1}{\mu} =$ const. esse videtur) *poni poterit, in qua Log. amplius non conspiceretur.* Sin vero poneremus $\varphi z = \frac{1}{m^2}\Phi z$, foret $\varphi z = -\frac{3n_2}{\mu^2}$, atque $n_3 = 0 = n_4$ etc., ideoque $z = n_0 + \frac{n_1 Lq}{\mu} + \frac{n_2 (Lq)^2}{\mu^2}$ seu potius z simpliciter $= \frac{n^2}{\mu^2}.(Lq)^2$, cum in forma transformata n_0 et n_1 omnino evanuerint. Quoniam vero in dubium vocari poterit, num legitima sit haec conclusio, cum aequationem per quantitatem infinitam divisimus, haec res penitius perscrutanda est. Admittendo igitur primum formam inventam $z = a + b.Lq$, ubi a atque b ipsum Log. q non continet, differentiemus, habebimusque ita

$$\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = q\underset{x}{\partial} a + b\underset{x}{\partial} q + \underset{x}{\partial} b.Lq : q\underset{y}{\partial} a + b\underset{y}{\partial} q + \underset{y}{\partial} b.Lq,$$

quae quantitas ab Lq libera erit, 1) si b constans fuerit, vel 2) si

$$q\underset{x}{\partial} a + b\underset{x}{\partial} q : q\underset{y}{\partial} a + b\underset{y}{\partial} q = \underset{x}{\partial} b : \underset{y}{\partial} b.$$

Ut vero ex hac analogia functio a inveniatur, ponamus $\underset{y}{\partial} b.dy + \underset{x}{\partial} b.dx = 0$ seu $db = 0$, et

$$q da = b.\frac{(\underset{y}{\partial} q.\underset{x}{\partial} b - \underset{x}{\partial} q.\underset{y}{\partial} b)dx}{\underset{y}{\partial} b} \text{ seu } \frac{da}{b} = -\frac{\underset{x}{\partial} q}{q}.dx - \frac{\underset{y}{\partial} q}{q}.dy,$$

(quia jam $\frac{\underset{x}{\partial} b.dx}{\underset{y}{\partial} b} = -dy$), ideoque integrando $b =$ const. et $\frac{a}{b} = C - Lq$, quare $a = \varphi b - b.Lq$, seu a ab Log. q pendens gd. abs., vel $z = \varphi b$, contra positionem.

Vel 2) sit $q\underset{x}{\partial} a + b\underset{x}{\partial} q = 0$ et $q\underset{y}{\partial} a + b\underset{y}{\partial} q = 0$, ideoque

$$-b = \frac{\underset{x}{\partial} a}{\underset{x}{\partial} Lq} = \frac{\underset{y}{\partial}(a)}{\underset{y}{\partial} Lq},$$

et integrando $a = \varphi Lq = \psi q$, ideoque

$$b = -q\psi_1 q \text{ atque } z = \psi q - q.\psi_1 q.Lq.$$

Aequationi igitur differentiali, cui Log. q non insit, integrale formae

$$z = a + b.Lq \text{ seu } a + b.Lq = \text{const.},$$

tum tantummodo competit, cum vel b const. fuerit, quo casu et sub formam $\beta^{\left(\frac{z}{b}\right)} = \beta^{\left(\frac{a}{b}\right)}.q =$ const. poni potest, vel cum $z = \psi q - q\psi_1 q.Lq$, ideoque $\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} q : \underset{y}{\partial} q$ et integrando (vel resolvendo) $z = \Phi q$ et igitur $\Phi z = q$ fuerit.

In utroque igitur casu pelli potest Log. q, **tum vero in alterutro exponentialem nanciscimur, ut integrale sit, vel ($A+Lq=$ const., seu) $\beta^A.q=$ const., vel $q=$ const.**

Integrale enim $\psi q - q\psi_1 q Lq =$ const. ipsum logarithmum ipsius q necessario non continet, sed ortum censeatur functionando simplicius illud $q=$ const. (per Φ).

6) Sit ulterius, silicet $z=a+bLq+c(Lq)^2$, ideoque

$$\partial z = \partial a + b\frac{\partial q}{q} + \left(\partial b + 2c\frac{\partial q}{q}\right)Lq + \partial c.(Lq)^2$$

et igitur $z':z_1 = A+BQ+C.Q^2 : \alpha+\beta Q+\gamma.Q^2$, si $Q=Lq$; differentiando vero secundum Q, facile invenies hanc fractionem ipso Q carere non posse, nisi fuerit $A:\alpha = B:\beta = C:\gamma$. (Et similem coëfficientium proportionem ad functionem fractam quamcumvis eodem modo invenies.) Fractio igitur, quae $\partial_x z:\partial_y z$ exprimit, ipso Log. q non caret, nisi fuerit

$$q\partial_x a + b\partial_x q : q\partial_y a + b\partial_y q = q\partial_x b + 2c\partial_x q : q\partial_y b + 2c\partial_y q = \partial_x c : \partial_y c,$$

$$\text{seu } \lambda\overline{\partial_x a\partial_y c} = b.\lambda\overline{\partial_x c\partial_y Lq} \text{ et}$$

$$\lambda\overline{\partial_x b\partial_y c} = 2c.\lambda\overline{\partial_x c\partial_y Lq},$$

si λ functionem alternam (ut $\lambda\overline{\partial_x a\partial_y c}$ hanc $\partial_x a\partial_y c - \partial_y a\partial_x c$) indicat. Jam igitur, si $\lambda\overline{\partial_x c\partial_y Lq}=0$, erit $\lambda\overline{\partial_x a\partial_y c}=0=\lambda\overline{\partial_x b\partial_y c}$; ideoque integrando $c=\Phi(Lq)$ vel $=\varphi q$, et $a=\Psi c=\psi q$ atque $b=\chi' c=\chi q$, et igitur $z=\psi q+\chi q Lq+\varphi q.(Lq)^2$, seu $z=\Phi q$; quo igitur casu forma specialis cum Logarithmo necessario haud possidetur.

Minime igitur est $\lambda\overline{\partial_x c\partial_y Lq}=0$, ideoque necessario erit

$$2c.\lambda\overline{\partial_x a\partial_y c} = b.\lambda\overline{\partial_x b\partial_y c} \text{ seu } 2c.(\partial_y c.\partial_x a - \partial_x c.\partial_y a) = b.(\partial_x b\partial_y c - \partial_y b\partial_x c).$$

Ut igitur hinc functio a inveniatur, ponamus $\partial_y c.dy+\partial_x c.dx=0$ seu $dc=0$, (nec $c=0$, qui casus est praecedens), et

$$2c\partial_y c.da = b.(\partial_x b\partial_y c - \partial_y b.\partial_x c)dx, \text{ seu}$$

$$2c.da = b.(\partial_x b.dx + \partial_y b.dy) = bdb,$$

ideoque integrando $c=$ const. et $2ca=\frac{1}{2}b^2+$ const., quare $4c.a=b^2+\varphi c$. Ulterius ex aequatione $\lambda\overline{\partial_x b\partial_y c}=2c.\lambda\overline{\partial_x c\partial_y Lq}$ invenitur functio b, ponendo similiter $dc=0$, et $db=2c.(-\partial_x Lq.dx-\partial_y Lq.dy)=-2cd(Lq)$,

ideoque integrando $b = \psi c - 2c.Lq$. Erit igitur

$$a = \frac{1}{4c}.(\Phi c + \psi^2 c - 4c\psi c Lq + 4c^2(Lq)^2)$$

seu breviter $a = \Phi c - \psi c.Lq + c.(Lq)^2$, ideoque

$$Z = \Phi c - \psi c Lq + c Lq^2 + (\psi c - 2c.Lq) Lq + c.(Lq)^2$$

seu $z = \Phi c$, et Lq abiit.

Sin vero c absoluto constans est, foret $dc = 0$, et similiter haberi posset $b + 2c$ Log. q pro argumento arbitrario interim constante $(= C)$, ideoque esset $db + 2cdLq = 0$, et igitur $da + b.dLq = 0$, (quia hoc valet, sive $d = \underset{x}{\partial}$, sive $d = \underset{y}{\partial}$). Integrando igitur obtinetur $b + 2c.Lq = C$, et $a + \int dLq(C - 2cLq) =$ const., seu $a + CLq - c\overline{Lq}^2 =$ const., que $a + Lq.(b + cL) = \psi(b + 2c.Lq)$, quare $z = a + bLq + c\overline{Lq}^2 = \psi(b + 2cLq)$ et igitur $\Phi z = b + 2cLq$, si $\Phi\psi u = u$ fuerit. *In utroque igitur casu pellitur $(Lq)^2$, ut integrale formam $b + Lq =$ const. nanciscatur.*

7) Hac via ulterius progredi liceret usque ad

$$z = n^0(Lq) = n_0 + n_1 Lq + \ldots + n_n Lq^n,$$

et ita ostenderetur hanc aequationem ab Lq liberari posse vel saltem ad formam simpliciorem $b + Lq$ revocari. Sed *eodem fere negotio problema multo generalius absolvere licet.* Disquiratur nempe, *num aequatio integralis necessario sub formam rationalem contineat functionem ab differentiali alienam et transcendentem Q primi ordinis*, (i. e. cujus differentiale dQ algebraica est), et quidem *a*) primum integre.

Sit igitur integrale $z = n^0 Q$ seu

$$z = n_0 + n_1 Q + n_2 Q^2 + \ldots + n_n Q^n, \quad \text{ex. gr.} \quad z = abQ + c.Q^2 + e.Q^3,$$

nec in $\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z$ functio Q ulterius adsit. Jam si ultima littera n_n seu e variabilis fuerit, ipsa obiter pro constante arbitrario haberi poterit, eritque ita

$$\partial z = \partial a + \partial b.Q + \partial c.Q^2 + (b + 2c.Q + 3e.Q^2)\partial Q,$$

quae formula jam per se ab Q libera sit, ideoque

$$\partial c + 3e.\partial Q = 0, \qquad \partial b + 2c.\partial Q = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial a + b.\partial Q = 0$$

et igitur integrando

$$c = E_0 - 3e.Q,$$
$$b = E_1 - 2E_0.Q + 3e.Q^2$$
$$\text{et} \quad a = E_2 - E_1.Q + E.Q^2 - e.Q^3,$$

ubi const. E_1, E_1 et E_2 ut functiones arbitrariae ipsius e censendae sunt. His vero valoribus adhibitis, erit

$$z = \left.\begin{array}{r} (E_2 - E_1.Q + E.Q^2 - e.Q^3) \\ + Q(E_1 - 2E.Q + 3e.Q^2) \\ + Q^2(E - 3e.Q) \\ + e.Q^3 \end{array}\right\}$$

seu $z = E_2 = \Phi e$. Similiter vero universim demonstres, fore $z = \Phi(n_n)$ si n_n variabile est, quia semper, integratione et substitutione rite effecta, invenitur unusquisque terminus in $z = (1-1)^r.Q^r.\Phi(n_n) = 0$, praeterquam, cum $r = 0$ fuerit. — *b*) Sit vero deinde n_n absolute constans $= e$. Tum in analogiis ex $\partial_x z : \partial_y y$ ortis deficit ratio $\partial_x e : \partial_y e$, eruntque proxime praecedentes

$$\partial_x b + 2c\,\partial_x Q : \partial_y b + 2c\,\partial_y Q = \partial_x c + 3e\,\partial_x Q : \partial_y c + 3e\,\partial_y Q.$$

Ut vero haec aequotio integretur, (quae et sub forma

$$\partial_x b(\partial_y c + 3e\,\partial_y Q) = \partial_y b(\partial_x c + 3e\,\partial_x Q) + 2c(\partial_x c\,\partial_y Q - \partial_y c - \partial_x Q)$$

scribi potest, melius tamen ut analogia tractatur), ponamus $c + 3eQ = C =$ const., eritque necessario $\partial_x b + 2c\,\partial_x Q = 0$ et $\partial_y b + 2c\,\partial_y Q = 0$, ideoque universim

$$db + 2c.dQ = 0, \quad \text{seu} \quad db + 2(C - 3e.Q)dQ = 0,$$

indeque integrando $b + 2C.Q - 3e.Q^2 = C_1$.

Ulterius sequens est ratio, illis aequalis, $\partial_x a + b\,\partial_x Q : \partial_y a + b\,\partial_y Q$, ex qua similiter, eisdem positis, obtinetur

$$da + bdQ = 0, \quad \text{seu} \quad da = -C_1 dQ + 2CQ\,dQ - 3eQ^2 dQ,$$

indeque $a = C_2 - C_1 Q + CQ^2 - eQ^3$. Jam igitur valor ipsius z erit

$$z = \left.\begin{array}{r} C_2 - C_1 Q + CQ^2 - eQ^3 \\ + Q(C_1 - 2cQ + 3eQ^2) \\ + Q^2(C - 3eQ) \\ + eQ^3 \end{array}\right\}$$

seu $z = C_2$, h. e. $z = \Phi(c + 3eQ)$ seu $\bar{\Phi} z = c + 3eQ$. Ista igitur conditio id tantum mutat, ut loco ipsius e jam e jam $c + 3eQ$ argumentum sit arbitrarium. Nec vero ulterius (praeter $e =$ const.), ponere licet $c + 3e.Q =$ absolute const., quia c tum Q contineret, ideoque functio $n^0 Q$ rite ordinata non esset.

Hinc vero elucet,

Theor. VI. *Aequationem integralem ita mutari posse, ut vel ipsum Q minime contineat vel tantummodo sub forma $a + b.Q$, existente b constante.*

Haecque regula tum etiam valebit, cum $\partial_y Q$ et $\partial_x Q$ functio fuerit quaecunque, ejusdem indolis ac coëfficientes a, b, c etc., nec tamen ipsum q continens, quo juste ponatur ex. gr. $\partial a + b\,\partial Q$ ab Q non pendere, etc.

Sit enim universim $z = eQ^n + e_1.Q^{n-1} + e_2.Q^{n-2} + \ldots$ ponaturque $de = 0$, eritque tum $\partial_x z.\partial_y z$ a Q libera, si

$$\partial e_1 + ne\,\partial Q = 0,\quad \partial e_2 + (n-1)e_1\partial Q = 0,\quad \partial e_3 + (n-2)e_2\partial Q = 0,$$
$$\partial e_4 + (n-3).e_3\partial Q = 0 \text{ etc.}$$

ideoque (integrando) $e_1 + neQ = E$, $e_2 + (n-1).\left(E.Q - \frac{n}{2}.e.Q^2\right) = E_2$, $e_3 + (n-2).\left(E_2.Q - \frac{(n-1)}{2}.\left(E.Q^2 - \frac{n+2}{3}.e.Q^3\right)\right) = E_3$ etc. Hinc vero valoribus coëfficientium petitis et substitutis, erit

$$\begin{aligned} z = {} & e.Q^n + Q^{n-1}(-neQ + E) \\ & + Q^{n-2}\left(n.\frac{(n-1)}{2}.eQ^2 - (n-1).E.Q + E_2\right) \\ & + Q^{n-3}\left(-n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.eQ^3 + (n-1).\frac{n-2}{2}.E.Q^2 - (n-2).E_2.Q\right) \\ & + Q^{n-4}\left(n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.eQ^4 - (n-1).\frac{n-2}{2}.E.Q^3 + \ldots\right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

seu, involutione rite effecta,

$$z = eQ^n.(1-1)^n + E.Q^{n-1}(1-1)^{n-1} + E_2.Q^{n-2}(1-1)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + E_r.Q^{n-r}.(1-1)^{n-r} + \ldots + E_n.Q^0.(1-1)^0$$

et igitur necessario $z = E_n$, seu $z = \varphi e$, quia ponabamus $de = 0$, seu $e =$ const., ideoque const. E_n hujus sit functio. Sin vero e per se constans fuerit, erit revera E const. arbitr., et ideo

$$E_n = \varphi E \quad \text{seu} \quad E_n = \varphi(e_1 + neQ)$$

et igitur

$$\overline{\varphi} z = e_1 + neQ.$$

His igitur demonstratum est *theorema* maximi momenti, quod modo innuebamus, scilicet hoc:

Theor. VII. *Si fuerit* $dy + Pdx = 0$ *seu* $\partial_x z = P.\partial_y z$ *aequatio differentialis, cujus modulus* P (scilicet rationis $\partial_x z : \partial_y z$ seu $-\partial y : \partial x$) *functionem transcendentem* Q *ex simplici integratione ortam expresse non continet* (i. e. talem, ut nec $\partial_x Q$ nec $\partial_y Q$ per ipsum Q exprimatur), *fueritque integrale* $z = n^0 Q$, *seu* $n^0 Q =$ const.; *tum hoc semper ita immutari potest, ut vel ipsum* Q *expressum non ulterius contineat,* (sed integrale sit $z = a$, seu $n_0 =$ const.), *vel tantum lineariter* (seu idem sit $\varphi z = a + Q$,

seu $a+Q=$ const.), ***exsistente a functione algebraica vel etiam transcendenti, quae vero a Q omnimode diversa sit.***

8) Quamquam vero hucusque posuerimus $n^0\, Q$ esse functionem ipsius Q rationalem integram, attamen, idem de fractam valiturum, divinari licet, cum haec in illam semper resolvatur. Sin vero z foret functio irrationalis secundum Q, ipsa secundum Theor. III. pelli poterit.

Sic exempli gratia si fuerit pars integralis z functio fracta primi ordinis ipsius Q vel similis T seu $z=\frac{a+bT}{\alpha+\beta T}$, et 1) primum $b=0$, erit tum $\frac{1}{z}=\frac{\alpha+\beta T}{a}$, idoque ex antea demonstratis $\beta=c.a$, atque $\frac{1}{cz}=\frac{\alpha}{ac}+T=$ const., seu formae jam dictae. Alias vero 2) si b haud $=0$, erit

$$\delta z=\frac{(\alpha b-a\beta)\partial T+(\alpha+\beta T)(\delta a+\delta b T)-(a+bT)(\delta\alpha+\delta\beta T)}{(\alpha+\beta T)^2},$$

ideoque

$$\underset{x}{\partial z}:\underset{y}{\partial z}=$$

$$(\alpha b-a\beta)\underset{x}{\partial}T+\alpha\underset{x}{\partial}a-a\underset{x}{\partial}\alpha+(\alpha\underset{x}{\partial}b-b\underset{x}{\partial}\alpha+\beta\underset{x}{\partial}a-a\underset{x}{\partial}\beta)T+(\beta\underset{x}{\partial}b-b\underset{x}{\partial}\beta)T^2$$
$$:(\alpha b-a\beta)\underset{y}{\partial}T+\alpha\underset{y}{\partial}a-a\underset{y}{\partial}\alpha+(\alpha\underset{y}{\partial}b-b\underset{y}{\partial}\alpha+\beta\underset{y}{\partial}a-a\underset{y}{\partial}\beta)T+(\beta\underset{y}{\partial}b-b\underset{y}{\partial}\beta)T^2$$

seu P formae $\frac{X_0+X_1T+X_2T^2}{Y_0+Y_1T+Y_2T^2}$. Hujusmodi vero fractio a T libera haud est, nisi fuerit $X_0:X_1:X_2=Y_0:Y_1:Y_2$. Ponamus vero obiter $\beta db=bd\beta$, eritque $X_2=0=Y_2$, atque integrando $\beta=C.b$. Praeterea, quia $X_1:Y_1=X_2:Y_2$, erit tum $X_1=0=Y_1$, seu $\alpha db-bd\alpha+\beta da-ad\beta=0$, ideoque $\alpha db-bd\alpha+C.(bda-adb)=0$, et integrande $\frac{\alpha}{b}=C.\frac{a}{b}+C_1$, seu $\alpha=Ca+C_1b$.

Sed erit et $X_0:Y_0=X_2:Y_2=0:0$, seu $X_0=0=Y_0$, ideoque $(\alpha b-a\beta)dT+\alpha da-ad\alpha=0$, seu valoribus ipsorum α et β jam inventis adhibitis, $C_1.b^2.\left(dT+\frac{bda-adb}{b^2}\right)=0$, ideoque integrando $T+\frac{a}{b}=C_{,,}$. Jam igitur, nisi C per se constans fuerit, erit $C=\frac{\beta}{b}=$ argumentum arbitrarium, ideoque $C_{,}=\psi\left(\frac{\beta}{b}\right)$, $C_{,,}=\varphi\left(\frac{\beta}{b}\right)$, atque $\alpha=a.\frac{\beta}{b}+b.\psi\frac{\beta}{b}$, et idcirco

$$a+bT=b\varphi\left(\frac{\beta}{b}\right),\ \text{et}\ z=\frac{b\varphi\frac{\beta}{b}}{a.\frac{\beta}{b}+b.\psi\left(\frac{\beta}{b}\right)+\beta T},$$

seu, (argumento $\frac{\beta}{b}$ subintellecto)

$$z = \frac{b\varphi}{b\psi + \beta\varphi}, \quad \text{seu} \quad \frac{1}{z} = \frac{\psi}{\varphi} + \frac{\beta}{b} = \Phi,$$

exsistente $\Phi = \Phi\left(\frac{\beta}{b}\right)$ functione solius $\frac{\beta}{b}$, qui valor jam a T liber est. Sin vero fuerit $\frac{\beta}{b} = C =$ const. absol., erit $C_1 = \frac{\alpha - aC}{b}$ argumentum arbitrarium, ideoque $C_{\prime\prime} = \varphi\left(\frac{\alpha - aC}{b}\right) = T + \frac{a}{b}$, et idcirco $\beta = C.b$, $a + bT = b.\varphi\left(\frac{\alpha - aC}{b}\right)$ atque

$$z = \frac{b.\varphi\left(\frac{\alpha - aC}{b}\right)}{\alpha + C\left(b.\varphi\left(\frac{\alpha - aC}{b}\right) - a\right)} = \frac{\varphi}{\frac{\alpha - aC}{b} + C.\varphi} \quad \text{seu} \quad z = \psi\left(\frac{\alpha - aC}{b}\right).$$

Theor. VIII. Si igitur integrale fuerit $z = \frac{a + bT}{\alpha + c.bT}$ *erit et* $z = \varphi\left(\frac{\beta}{b}\right)$ *aut* $z =$ *functioni solius* $\frac{\alpha - aC}{b}$.

Quae vero res jam hoc sibi volunt, aequationem differentialem $dy + Pdx = 0$ *seu particularem huic aequivalentem* $\underset{x}{\partial z} = P\underset{y}{\partial z}$, *integrali hujus formae* $\frac{a + bQ}{\alpha + \beta Q} =$ *const. vel* $= z$, *exsistente* Q *functione integraliter transcendente, quae in* P *haud conspicua sit, tum tantummodo gaudere posse, cum idem integrale vel sub forma* $z = \varphi\left(\frac{\beta}{b}\right)$ *vel* $z = \varphi\left(\frac{\alpha - aC}{b}\right)$ (si jam $\frac{\beta}{b} = C =$ const.) *aeque ponere liceat, quo et* Q *ex integrale abit.*

9) Similiter vero ulterius $z = \frac{a + bQ + cQ^2}{\alpha + \beta Q + \gamma Q^2}$ ponas, similique adhibita analysi ad conclusiones haud dissimiles pervenias, quo tibi persuadeas,

Theor. IX. Si aliquando hujusmodi integrale (vel etiam magis compositam scil. formae functionis secundum Q rationalis fractae gradus cujuscunque $z = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + \ldots + a_n Q^n}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2 + \ldots + b_n Q^n}$) *obtinueris, hoc idem et ita transmutari* (constantem vel z scil. rite functionando) *posse, ut aliena haec transcendens ulterius haud adsit.*

10) Quin imo, quia unaquaeque functio sub formam functionis integrae vel fractae evolvitur, universim divinari potest, si *integrali illud* Q *sub functionis cujuscunque signo contineat, similem transformationem semper locum habituram.* Ne vero taedium excitemus, ampliorem hujus rei

explanationem omittimus, sed potius rem cognatam in arenam vocamus. Praevie vero observamus, hujus singularis phaenomeni hanc esse philosophiam, isti transcendenti partim universim infinitos valores competi (id quod, nisi tolli posset, integrali justo plures valores et quandam immeritam indeterminationem tribueret), partim constantem arbitrarium virtualiter competi, quo integrali aequationis primi ordinis duo hujusmodi constantia attinerent, id quod per se absurdum est, nisi forma ita mutari posset, ut haec utraque in unum coalescant.

11) Sit igitur $z = f(x, y, Q)$ integrale aequationis $dy + P dx = 0$, existente z, constante arbitrario atque $Q = \int R dq$; quaeritur jam universim *sub qua forma haec functio Q_0 in istu f inesse possit, cum nullatenus in ipsa P conspicua sit?* Differentiemus z ut functionem ipsorum x et y, (quam breviter per f indicamus) eritque si

$$df = (\underset{x}{\partial f}).dx + (\underset{y}{\partial f}).dy + dQ.\underset{Q}{\partial f},$$

$$\underset{x}{\partial z} : \underset{y}{\partial z} = (\underset{x}{\partial f}) + \underset{x}{\partial Q}.\underset{Q}{\partial f} : (\underset{y}{\partial f}) + \underset{y}{\partial Q}.\underset{Q}{\partial f}$$

quod (communi quodam factore, omne Q comprehendente, sublato) ipsi P aequale sit. Jam vero P est $= P_{(xy)}$ seu functio solorum x et y, ipsa vero f ut functio trium quantitatum x, y et Q prostat; nihilo tamen minus ex aequalitate

$$\underset{x}{\partial f} + \underset{x}{\partial Q}.\underset{Q}{\partial f} = P.(\underset{y}{\partial f} + \underset{y}{\partial Q}.\underset{Q}{\partial f})$$

necessario concluditur

$$\underset{Q}{\partial}\left(\frac{\underset{x}{\partial f} + \underset{x}{\partial Q}.\underset{Q}{\partial f}}{\underset{y}{\partial f} + \underset{y}{\partial Q}.\underset{Q}{\partial f}}\right) = \underset{Q}{\partial} P = 0,$$

cujus aequationis beneficio jam functio f est determinanda. Quoniam vero jam in signo $\int R dq$ constans arbitrarius latet, qui sit c, ponamus $u = c + Q = c + \int R dq$, eritque aeque $du = dQ = R dq$. Quando vero ita Q in $c + Q$ seu u mutatur, etiam integrale propositum mutationi est obnoxium, quae, ut bene scimus, in eo consistit, ut pro z exoriatur φz, quo jam illud sit $\varphi z = f(x, y, u)$.

Exinde vero aeque obtinebis, (quia $du = \partial Q$),

$$\underset{x}{\partial z} : \underset{y}{\partial z} = \underset{x}{\partial f} + \underset{x}{\partial u}.\underset{u}{\partial f} : \underset{y}{\partial f} + \underset{y}{\partial u}.\underset{u}{\partial f} = P,$$

in qua aequatione iterum Q vel u nonnisi identice adesse potest, ideoque erit

$$\underset{u}{\partial}\left(\frac{\underset{x}{\partial f} + \underset{x}{\partial Q}.\underset{u}{\partial f}}{\underset{y}{\partial f} + \underset{y}{\partial Q}.\underset{u}{\partial f}}\right) = 0, \text{ (quia } \underset{x}{\partial u} = \underset{x}{\partial Q},\ \underset{y}{\partial u} = \underset{y}{\partial Q}).$$

Integrando igitur obtinetur $\partial_x f + \partial_x Q . \partial_u f = P.(\partial_y f + \partial_y Q . \partial_u f)$, ubi P est constans integrationis, sc. $= P_{(xy)}$ seu functio ipsorum x et y jam proposita. Ut vero haec aequatio ulterius integretur, ex regulis notissimis ponendum est $df = 0$, $dy + P dx = 0$ et $du = (-P \partial_y Q + \partial_x Q) dx$; quarum aequationum illae suppeditant $f =$ const., et $z =$ const. (est enim $P = \partial_x z : \partial_y z$, ideoque $dy . \partial_y z + dx . \partial_x z = 0 = dz$, ubi tamen z non nisi ut functio solorum x et y seu $= F(xy)$ consideratur) et haec evadit

$$du = + \partial_y Q . dy + \partial_x Q . dx = dQ,$$

et igitur $u = Q + c$, (ut antea), existente C const. arb. Ex notissimis igitur integrandi principiis necessario erit $f = \psi(z, u - Q)$ seu $f = \psi(z, c)$ exsistente c constante arbitrario vel etiam aliquo modo determinato, hoc z vero, (quod probenotandum), ea ipsorum x et y functio $= F(xy)$, quae integrando aequationem $dy + P dx = 0$ obtinetur, vel etiam rite secundum constantem arbitrarium resolvendo aequationem quandam hujus integralem. Demonstravimus igitur ita obtineri $f(x, y, Q) = \psi(F(x, y)\, c)$, ideoque

$$\Phi f(x, y, Q) = \Phi \psi(F(x, y) c) \text{ seu } \Phi z = \Phi F(xy),$$

posito scilicet $\Phi \psi(z, c) = \Phi z$. Observamus vero, si immediate aequationem $\partial_Q P = 0$ integrare instituissemus, nos ad aequationes

$$df = 0, \quad dy + P dx = 0 \text{ et } dQ = (\partial_x Q dx - P \partial_y Q dx), \text{ seu } dQ = dQ$$

statim delapsos fuisse, quae integrando suppeditant $f =$ const., $Fxy =$ const. atque $0 Q =$ const., ideoque necessario foret $f = \psi(Fxy, 0 Q)$ seu $f = \psi(F(xy) 0)$ h. e. $f = \psi(Fxy)$ seu $z = \psi(Fxy)$. Immediate igitur *integrandi regulae negant ipsius Q praesentiam;* quae res igitur hoc sibi vult, ut haec functio ad integrale $z = f$ (vel potius $z = F$) necessario non pertineat; attamen, quia integrale aeque scribi potest $\Phi z = \Phi F$, existente Φ functione arbitraria, *haec ita electa esse potest, ut a dextra parte functio Q proveniat.*

Obtinebamus scilicet jam aequationis $dy + P dy = 0$ haec integralia $F(xy) =$ const., $\Phi Fxy =$ const., et $f(x, y, Q) =$ const. $= z$ atque $f(x, y, u) =$ const. Quae omnia nonnisi secundam formam et constantium valores differre possunt, praeterea vero eandem ipsorum x et y relationem exprimunt.

Habebamus vero $\Phi z = f(x, y, u)$, ideoque erit $\Phi f(x, y, Q) = f(x, y, Q + c)$, i. e. Q ita tantummodo adesse potest, ut ipsum functionando

constantem (z vel potius ejus valorem analyticum $f(x, y, Q)$) in $Q+c$ mutetur. Generalius vero integrale representari potest per aequationem $\Phi z = f(x, y(Q+gz))$, quae differentiando, (nisi fuerit communis ipsorum $\underset{x}{\partial} z$ et $\underset{y}{\partial} z$ factor $\Phi, z - g, z . \underset{Q}{\partial} f = 0$, id quod universim fieri nequit, quia tum $\underset{z}{\partial}(\Phi z - f) = 0$ foret, ideoque aequatio $\Phi z = f$ identice secundum z valeret, et idcirco constante arbitrario z careret) aeque suppeditat:

$$\underset{x}{\partial} z : \underset{y}{\partial} z = \underset{x}{\partial} f + \underset{x}{\partial} Q . \underset{Q}{\partial} f . : \underset{y}{\partial} f + \underset{y}{\partial} Q . \underset{Q}{\partial} f,$$

ubi in dextra parte $Q+gz$ aeque exsulat, ac in priori illa, (quia $\underset{Q}{\partial} f = \underset{(Q+gz)}{\partial} f$); attamen in illa aequatione Q aliter adesse nequit, quam ut partim ipsa rite resoluta suppeditare possit $z = F(xy)$, vel saltem $z = \psi F(xy)$, partim ipsa Q (quam necessario gz comitatur) utrimque functionando tolli possit, ut sit $\Phi f(x, y(Q+gz)) = F(x, y)$. Quae res, ut vidimus, inde exoritur, quod ipsam functionem Q, utut integrando obtentam, constans arbitrarius virtualiter comitatur, quae formam aequationis rite immutando, tandem cum altero illo z necessario, conjugatur.

Quia enim in aequatione differentiali tantummodo $f, q = \partial Q$, non vero ipsam Q, adsit, ipsa haud eo alteratur, quod Q in $Q+c$ variet; ideoque hujusmodi variatio in aequatione integrali admittenda est, praesertim si hoc c ut functio constantis z censetur.

Quoniam vero in aequatione $z = f(x, y, Q+gz)$ universim ipsa gz quaecunque ipsius z functio esse possit, aequatio $\Phi z = \Phi f(x, y, Q+gz)$ in simpliciorem $\Phi z = G(x, y) + c.(Q+gz)$ praevie mutetur, deindeque in $\Phi z - c.gz = G(x, y) + cQ$, exsistente c constante absoluto (Ex. gr. $= 1$), quia hoc solo modo constantes arbitrarii Φz et gz in unicum coalescere queant, ut natura aequationis differentialis primi ordinis requirit; ita enim solummodo const. ipsius Q seu $\int R dq$ cum altero illo conjungitur. Haec vero conjunctio, ut vidimus, certam aliquam functionem Φ adhibendo perficitur.

12) His vero paucis demonstravimus 1) id *regulare* esse, *ut functio transcendens Q primi ordinis,* (sc. functionem aliquam algebraicam simpliciter integrando orta, cum P algebraica sit, vel saltem altioris ordinis, quam eae, quae in P adsunt functiones, cum P transcendentes continet functiones) *etiam in aequatione integrale* $z = F(x, y)$ hujus differentialis $dy + P dx = 0$ seu $\underset{x}{\partial} z = P \underset{y}{\partial} z$, in qua Q haud conspicitur, *absit;* 2) attamen interdum accidere posse, ut functio quaecunque nova transcendens ($Q = Q(q)$) *adsit,*

id quod ex sola aequatione $\varphi z = \varphi F(x, y)$ oriri potest, functionem φ rite eligendo. Ut si fuerit ex. gr. $F(x, y) = f(p, q, r, \ldots.)$, exsistentibus p, q, r certis ipsorum x et y functionibus (algebraicis, cum P algebraica, transcendentibus cum haec transcendens fuerit, functioque φ ejus proprietatis ut $\varphi f(p, q, r, \ldots.)$ in $\Phi(P_{(p)}, Q_{(q)}, R_{(r)}, \ldots.)$ mutetur, ideoque integrale illud $z = F(x, y)$ in $\varphi z = \Phi(P_{(p)}, Q_{(q)}, R_{(r)}, \ldots.)$ seu $z = \psi(P_{(p)}, Q_{(q)}, R_{(r)}, \ldots.)$ si $\varphi\psi = \Phi$ fuerit, existentibus $P_{(p)}, Q_{(q)}, R_{(r)}$ novis transcendentium signis; aderit sane illa nova transcendens Q, eaque saepissime ab aliis P, R etc. comitata. 3) Cum vero id acciderit, ut in aequatione integrale adsit quantitas transcendens, quae in differentiali non conspiciatur, *tum dari functionem unius argumenti, quae hanc iterum tollat.* Ut si obtentum fuerit $z = f(x, y, Q)$, dari functionem Φ ejusmodi ut $\Phi z = F(x, y)$ sit, exsistente $F(x, y)$ functione, quae nullo modo ex Q, componatur, sed vel ex algebraicis, si P algebraica fuerit, vel ipsa sit *functio sui generis duorum argumentorum, eaque integrando aequationem* $dy + Pdx = 0$ *orta.* In paucissimus igitur casibus sperare licet, ut hujusmodi aequationes, quoties P ex y et x inseparabiliter, attamen algebraice, componitur, per simplicia et indefinita integrandi signa ($\int$) integrentur, cum facile de insufficientia functionum algebraicarum convinci possis, nec, ut vidimus, functiones transcendentes primi ordinis (seu formae $\int Q\,dq$, exsistente Q algebraica ipsius q, et q ipsorum x et y functione) hac in re magni sint emolumenti. Hae igitur functiones duplicis argumenti singularem suam theoriam expostulent, omni Analystarum attentione dignam.

13) Praeterea, quia ostendimus fore $\varphi f(x, y, Q + gz) = F(x, y)$, quoties functio Q ad aequationem $dy + Pdx = 0$ integrandam adhiberi possit; inde vice versa elicietur $Q + gz = \psi(x, y, F(xy))$. Quoniam vero g arbitraria est functio, pro illa eligere licet eam, quae Q est ipsius q, ideoque poni potest $Q = gq$, (functione g jam per integrationem $Q = \int R\,dq = gq$ determinata); et igitur, cum praeterea sit $\varphi z = F(xy)$, erit

$$gq + gz = \psi(x, y, \varphi z).$$

Hinc igitur colligitur *theorema* maximi momenti:

Theor. X. *Quoties aequationem aliquam differentialem* $dy + Pdx = 0$ *duobus diversis modis complete integrare licuerit, uno scilicet ejusmodi ut obtineatur* $F(x, y) =$ *const. in functionibus quantum fieri possit simplicissimis* (algebraicis ex. gr., cum P algebraica fuerit), *alteroque* $f(x, y, Q) =$ *const., exsistente* $Q = \int R\,dq = gq$; *tum haec functio inte-*

gralis (g) *addibilis erit*, i. e. functiones similes gq et gz in simpliciorem formam coalescent. Sunt vero universim tum g tum z functiones ipsorum x et y, ideoque reversim hac illorum, sc. $x = \xi(q, z)$ et $y = \Upsilon(q, z)$, quare $gq + gz = \psi(\xi(q, z), \Upsilon(q, z), \varphi z)$, quae igitur universalissima est forma functionum hujusmodi addibilium. Talia ex. gr. sunt circulares et ellipticae.

14) Ex eis, quae modo stabilivimus, facile ea, quae Geometrae de formula Xdx algebraice vel logarithmice integranda docuerunt, praetereaque itidem perspicies.

Theor. XI. Cum aequatio differentialis primi ordinis ($dy + p\,dx = 0$ seu $\underset{x}{\partial} z = p \underset{y}{\partial} z$) *per integralia indefinita* (de definitis haud egimus), *solvitur, tum ipsius integrale sub hac forma poni posse*

$$\int P\partial p + \int Q\partial q + \int R\partial r + \dots = \text{const. } seu = z,$$

continentibus P, Q, R etc. haud alias surdas vel transcendentes formas, quam quae in P aperte conspiciantur: functionem vero, quae hoc efficit, interdum istis magis compositam esse.

Lundae Idibus Junii MDCCCXL.

4.

Theorie der Centralen.

(Vom Herrn *H. Grafsmann*, Lehrer der Mathematik zu Stettin.)

(Schlufs der Abhandlung No. 21. im dritten und No. 24. im vierten Hefte vorigen Bandes.)

---

§. 8. Uebertragung des Hauptsatzes und seiner Folgerungen auf Linien- und Ebenen-Systeme.

Es ist bekannt, dafs sich aus jedem geometrischen Satze ein zweiter, ihm paralleler Satz dadurch ableiten läfst, dafs man statt der Ebenen Puncte und statt der Puncte Ebenen setzt, während die geraden Linien bleiben was sie sind. Enthält dabei der Satz noch bestimmte Abhängigkeiten, so lassen sich auch diese stets nach einer allgemeinen Regel umgestalten. Diese gegenseitige Beziehung, welche man bekanntlich Reciprocität nennt, läfst sich auch auf den allgemeinen Lehrsatz (§. 4.) und auf die daraus abgeleiteten Folgerungen anwenden. Doch können wir uns hierbei nicht auf das Princip der Reciprocität als auf ein schon bekanntes berufen, indem dieses Princip, so weit mir bekannt geworden, in Bezug auf den Raum noch nicht umfassend und genügend dargestellt wurde. Es giebt nämlich im Raume aufser jenen beiden reciproken Systemen noch ein drittes von nicht geringerer Wichtigkeit, was aber bisher noch übersehen zu sein scheint, indem nämlich den Puncten des einen und den Ebenen des andern Systems in dem letztern gerade Linien entsprechen, so dafs in Bezug auf den Raum jeder Satz dreifach erscheint (in Bezug auf die Ebene zweifach). Diese reciproken Beziehungen werde ich hier zugleich in der Art ableiten, wie sie sich für die beabsichtigte Umwandlung des obigen Satzes von selbst ergeben, und so werden vermöge dieser speciellen Abzweckung auch die schon bekannten reciproken Beziehungen in einer neuen, vielleicht auch an sich nicht uninteressanten Form auftreten.

In der bisherigen Entwickelung wurde jede Oberfläche als geometrischer Ort eines Punctes (S) betrachtet, zwischen dessen veränderlichen Richtstücken x, y, z eine Gleichung vom $n$ten Grade stattfand, und wir nannten eine solche Oberfläche eine Fläche $n$ter Ordnung. Man kann nun zweitens jede Oberfläche als die von einem System von Ebenen Umhüllte ansehen, indem wieder zwischen den veränderlichen Bestimmungsstücken

der Ebene eine Gleichung statt findet; und wenn man unter dem geometrischen Ort einer in ihrer Lage nach einem bestimmten Gesetz veränderlichen Ebene wiederum die von sämmtlichen Ebenen, welche vermöge des Gesetzes dieser Veränderlichkeit möglich sind, Umhüllten versteht, so erscheint in diesem zweiten Falle die Oberfläche als geometrischer Ort einer Ebene. Jedes Element einer Oberfläche wird im ersten Falle durch den Punct, welchen es einnimmt, im zweiten durch die Tangential-Ebene an dieses Element dargestellt. Im dritten Falle endlich soll die Oberfläche als von lauter Geraden umhüllt, also als geometrischer Ort dieser Geraden (in dem vorhergegebenen weiteren Sinne) angesehen werden; das Element der Oberfläche wird also dann durch eine Tangente an dieses Element repräsentirt. Da es aber unzählig viele Tangenten an ein Element einer Oberfläche giebt, welche eben in ihrer Gesammtheit die Tangential-Ebene bilden, so mufs man, um jedes Element durch *eine* Tangente zu repräsentiren, noch eine Bestimmung hinzufügen. Es giebt keine einfachere, als die, eine Axe im Raume anzunehmen, welche wir Haupt-Axe nennen und von welcher aus jedesmal die Tangenten gezogen sein sollen. So entspricht dann jedem Elemente der Oberfläche nur eine Tangente, und alles ist jetzt dem Früheren analog.

Um nun den allgemeinen Satz für diese beiden neuen Systeme, welche wir Ebenen- und Liniensysteme nennen wollen, umzuwandeln, kommt es nur darauf an, diejenigen Beziehungen, aus welchen wir dort jenen Satz ableiteten, auch hier festzuhalten. Es waren diese Beziehungen dargestellt durch die Gleichungen (1. 2. 3. 4. 5.) in §. 2, von denen (1.) und (5.) hernach noch eine individuelle Gestaltung annahmen. Die Gleichung (1.) (späterhin I.) bestimmte den Punct Q, die Gleichung (2.) die Oberfläche, als Ort des Punctes S, zwischen dessen Richtstücken eben die Gleichung stattfand, wobei ein fester Punct P als der Ursprung der Richtstücke, d. h. als der Punct angenommen wurde, dessen Richtstücke 0 waren. Die Gleichungen (3.) stellten die Bedingung dar, dafs P, Q, S in einer Geraden lagen, und aus diesen drei Gleichungen wurden dann die Gleichungen (4.) und (5.) abgeleitet. Lassen wir also die Gleichungen (1.) und (2.), welche immer an sich noch willkürlich sind, auch für die beiden letzten Systeme bestehen, so kommt es nur noch darauf an, dafs auch die Gleichungen (3.), nämlich

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{s}{q},$$

hier gelten, und es müssen also die Richtstücke der Ebene oder der Geraden (deren Ort die Oberfläche darstellen soll) so gewählt werden, dafs die Gleichungen noch fortbestehen. Bei dem Ebenensysteme, wo also die Oberfläche als Ort einer Ebene angesehen wird, wird man unter S, also auch unter P und Q, Ebenen verstehen müssen. Die Bedingung, dafs die Puncte P, S, Q in *einer* Geraden liegen mufsten, wird also hier durch die Bedingung vertreten, dafs die Ebenen P, S, Q sich in *einer* Geraden schneiden sollen. Man nehme nun P zur Ebene zweier Richt-Axen (X, Y), und nehme von dem Durchschnittspuncte derselben aus eine dritte, nicht in der Ebene liegende Axe (Z). Nun seien die Stücke, welche die Ebene S von diesen drei Richt-Axen abschneidet, x, y, z: alsdann schneidet Q, da P, S, Q sich in *einer* Geraden schneiden sollen, von den beiden in P liegenden Richt-Axen X und Y dieselben Stücke x und y ab; hingegen schneidet Q von der dritten Axe Z das Stück z' ab. Wollte man nun die Stücke x, y, z, durch welche die Ebene S bestimmt ist, als Richtstücke derselben annehmen, so würden die Gleichungen (3.) nicht mehr gelten; dagegen werden sie bestehen bleiben, wenn man zu Richtstücken einer Ebene S die Gröfsen φ, ψ, z nimmt, von denen $\varphi = \frac{z}{x}$; $\psi = \frac{z}{y}$; $(z = z)$ ist. Denn nennt man nun φ', ψ', z' die Richtstücke der Ebene Q in demselben Sinne genommen, wo also $\varphi' = \frac{z'}{x}$; $\psi' = \frac{z'}{y}$ ist, so hat man unmittelbar

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\psi}{\psi'} = \frac{z}{z'}.$$

Um noch das Analogon von s und q zu erhalten, ist nur zu erwägen, dafs s und q nur von der gegenseitigen Lage von P und S einerseits und von P und Q andrerseits abhängig waren, und zwar so, dafs man jene drei gleichgesetzten Ausdrücke gleich $\frac{s}{q}$ setzen konnte. Dasselbe erreicht man hier auf eine sehr einfache Weise, wenn man die dritte Axe Z gegen P senkrecht annimmt. Alsdann ist offenbar $\frac{z}{z'} = \frac{\operatorname{tang} PS}{\operatorname{tang} PQ}$, sobald man unter PS und PQ die Neigungswinkel der Ebenen versteht; wobei zu merken ist, dafs PQ und QP wieder entgegengesetzte Winkel sind. Bezeichnen wir also $\operatorname{tang} PS$ durch s und $\operatorname{tang} PQ$ durch q, so ist auch

$$\frac{z}{z'} = \frac{s}{q},$$

wie oben (§. 2.), und wir können also wie oben substituiren:

$$[3] \quad \varphi = \frac{s}{q}\varphi'; \quad \psi = \frac{s}{q}\psi'; \quad z = \frac{s}{q}z',$$

welche den Gleichungen (3.) in §. 2. entsprechen.

Wir wollen, ehe wir in der Entwickelung weiter gehen, hier einen Augenblick verweilen, um die Bedeutung der gefundenen Richtstücke festzuhalten. Wir nennen die Ebene P, in welcher die Richt-Axen X und Y angenommen waren, die Haupt-Ebene, die darauf senkrechte Axe Z die Haupt-Axe, die übrigen Axen (X und Y) Neben-Axen, und die beiden Ebenen, welche durch die Haupt-Axe einerseits und die beiden Neben-Axen andrerseits gelegt sind, Neben-Ebenen. Die Richtstücke der veränderlichen Ebene S sind nun erstens das Stück, welches sie von der Haupt-Axe abschneidet, zweitens und drittens die Tangenten des Winkels, welchen die von der veränderlichen Ebene und der einen oder der andern Neben-Ebene gebildete Durchschnittslinie mit der Haupt-Axe macht. Auch hier ist zu bemerken, dafs P der Ursprung der Richtstücke, d. h. diejenige Ebene ist, deren Richtstücke 0 sind.

Nimmt man nun eine Gleichung vom $n$ten Grade

$$[2] \quad \Sigma F_a(\varphi, \psi, z) = 0$$

zwischen diesen variabeln Richtstücken der Ebene S an, so ist der geometrische Ort derselben eine Oberfläche, welche wir nach Analogie des von *Gergonne* für ebene Curven eingeführten Sprachgebrauches eine Oberfläche $n$ter Classe nennen. Durch Substitution von [3] in [2] erhalten wir, wie oben,

$$[4] \quad \Sigma \frac{F_a(\varphi', \psi', z')}{q^a} s^a = 0;$$

welche Gleichung also in Bezug auf s von demselben ($n$ten) Grade ist, wie die Gleichung [2], und welche also lehrt, dafs an eine Oberfläche $n$ter Classe von einer gegebenen Geraden aus, n Tangential-Ebenen möglich sind. Sobald man nun zur Bestimmung von q dieselbe Gleichung (I.) festhält, so mufs auch dieselbe Gleichung (V.) daraus hervorgehen, also derselbe Satz hier gelten. Die Gleichung (I.) hatten wir in §. 4. auf die Form (I. b), nämlich auf

$$(\text{I. } b) \quad \left[\left(1-\frac{q}{s_1}\right) \ldots \left(1-\frac{q}{s_n}\right)\right]^{\dot{m}} = 0$$

gebracht. Im gegenwärtigen Falle bedeuten q und s_1 u. s. w. die Tangenten der Winkel PQ und PS_1 u. s. w. Es läfst sich, dem Obigen analog, hieraus eine noch einfachere Gleichung von der Form I. c. ableiten, indem man

$$1-\frac{q}{s_1}=1-\frac{\operatorname{tang} PQ}{\operatorname{tand} PS_1}=1-\frac{\sin PQ \cos PS_1}{\cos PQ \sin PS_1}=\frac{\cos PQ \sin PS_1-\sin PQ \cos PS_1}{\cos PQ \sin PS_1}$$
$$=\frac{\sin(PS_1-PQ)}{\cos PQ \sin PS_1}=\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1 \cos PQ}$$

setzt und dann, nachdem auf entsprechende Weise auch statt der übrigen Gröfsen in obiger Gleichung (I. *b*) substituirt worden ist, dieselbe mit $(\cos PQ)^m$ multiplicirt, woraus sich

$$[\text{I. } c] \quad \left(\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} \cdots\cdots \frac{\sin QS_n}{\sin PS_n}\right)^m = 0,$$

als Gleichung der harmonischen Mitten (Q) *m*ter Ordnung zwischen den sich in einer und derselben Geraden schneidenden Ebenen $S_1 \ldots\ldots S_n$ in Bezug auf die durch dieselbe Gerade gelegte Ebene P, ergiebt. Demnach läfst sich der Hauptsatz für Ebenensysteme wie folgt, aussprechen:

„*Wenn man durch eine in einer festen Ebene* P *liegende bewegliche Gerade an eine feste Oberfläche* n*ter Classe die* n *Tangential-Ebenen* $S_1 \ldots\ldots S_n$ *legt und eine durch dieselbe Gerade gelegte Ebene* Q *so annimmt, dafs die Summe sämmtlicher Producte zu* m *Factoren, welche sich aus Brüchen bilden lassen, deren Zähler die Sinus der Neigungswinkel zwischen einer der Tangential-Ebenen und der Ebene* Q, *und deren Nenner die Sinus der Neigungswinkel zwischen derselben Tangential-Ebene und der Ebene* P *sind, gleich* 0 *wird: so ist der geometrische Ort der Ebene* Q (d. h. die von den sämmtlichen Ebenen Q Umhüllte) *eine Oberfläche* m*ter Classe; und zwar erhält man, wenn* P *zum Ursprung der Richtstücke gemacht wird, die Ortsgleichung für* Q *aus der Gleichung der gegebenen Oberfläche dadurch, dafs man jedes Glied der letzteren mit einer Combinationszahl multiplicirt, deren Elementenzahl die Ordnung dieses Gliedes zu* n *und deren Classenzahl dieselbe zu* m *ergänzt.*"

Wir nennen hier wiederum die Ebenen Q die zu der gegebenen Oberfläche und der Polar-Ebene P gehörigen harmonischen Mitten *m*ter Ordnung und ihren geometrischen Ort die *m*te Centrale der gegebenen Oberfläche in Bezug auf die Ebene P. Ferner ist zu bemerken, dafs die Oberfläche, oder vielmehr das Gebilde erster Classe, ein Punct ist; so dafs also auch der Ebene eines Punctsystems ein Punct des Ebenensystems entspricht. Nämlich die Gleichung ersten Grades würde sein:

$$a\varphi+b\psi+c=z.$$

Setzt man hier wiederum statt φ, ψ ihre Werthe $\frac{z}{x}$, $\frac{z}{y}$, indem x, y, z die durch die veränderliche Ebene von den drei Axen abgeschnittenen Stücke (die Axen-Abschnitte derselben) bezeichnen, so erhält man, nach Division mit z, die Gleichung

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1,$$

welche bekanntlich die Relation zwischen den Richtstücken a, b, c eines Punctes und den Axen-Abschnitten x, y, z einer durch diesen Punct gelegten Ebene ausdrückt. Also ist jene Gleichung ersten Grades die Gleichung eines Punctes, dessen Richtstücke a, b, c sind. Die erste Centrale ist somit ein Punct, welchen man daher den harmonischen Mittelpunct der Oberfläche in Bezug auf die Ebene P nennen kann. Eben so wird ein System von n Puncten als Gebilde $n$ter Classe angesehen und die erste Centrale desselben wieder der harmonische Mittelpunct zwischen den n Puncten in Bezug auf eine Ebene P genannt werden können. Liegt P in unendlicher Entfernung, so wird dieser Punct, wie leicht zu sehen ist, zu dem Schwerpuncte zwischen jenen n Puncten (alle als gleich schwer betrachtet). Es bedarf kaum einer Erwähnung, dafs bei ebenen Curven die Tangential-Ebene S durch eine Tangente S vertreten wird, dafs hier die Richtstücke dieser veränderlichen Geraden, wenn dieselbe von den Axen (X et Y) die Stücke x und y abschneidet, x und $\psi=\frac{x}{y}$ sind, und dafs für ebene Curven bei Beobachtung dieser Bestimmungen ganz dasselbe gilt, was für die Oberflächen bewiesen wurde.

Wir gehen nun zu dem Liniensysteme im Raume über, bei welchem eine in einer festen Haupt-Axe bewegliche Gerade als erzeugendes Element betrachtet wird. Man bezeichne wieder die Haupt-Axe durch P, die veränderliche Gerade durch S, irgend eine andere durch P gehende Gerade, deren Lage später bestimmt werden soll, durch Q. Die Gleichung, welche zwischen den veränderlichen Bestimmungsstücken der Geraden statt findet, bestimmt wiederum die Oberfläche. Die Richtstücke dieser Geraden sind so zu wählen, dafs wieder die Gleichungen (3.) fortbestehen, für den Fall dafs die Geraden P, S, Q in der einfachsten Beziehung stehen. Als einfachste Beziehung nehmen wir die an, dafs P, S und Q von demselben Punct ausgehen und in derselben Ebene liegen. Nimmt man nun in einer gegen die Haupt-Axe senkrechten Ebene, welche Haupt-Ebene heifsen

soll, zwei beliebige in der Haupt-Axe Z zusammenlaufende Axen X und Y an, so läfst sich die Gerade S durch folgende drei Stücke bestimmen: erstens durch das Stück z, welches sie von der Haupt-Axe abschneidet, und ferner durch die Richtstücke (x, y) des Punctes, in welchem sie die Haupt-Ebene schneidet: diese Richtstücke nämlich in Bezug auf die Axen X und Y genommen. Die Gerade Q soll nach der angenommenen Bedingung die Haupt-Axe in demselben Punct schneiden, wie S, also auch das Stück z abschneiden; hingegen sollen die Richtstücke des Punctes, in welchem Q die Haupt-Ebene schneidet, x' und y' sein. Da nun P, S, Q in *einer* Ebene liegen sollten, so wird x' sich zu y' wie x zu y verhalten oder $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ sein. Hingegen werden diese beiden Quotienten nicht gleich $\frac{z}{z'}$ sein; man wird also z nicht als drittes Richtstück der Geraden S annehmen können, wenn die Gleichung (3) noch fortbestehen soll. Vielmehr wird dann als drittes Richtstück $\frac{x}{z} = \varphi$ oder $\frac{y}{z} = \psi$ anzunehmen sein; denn bezeichnet man dann die entsprechenden Stücke für Q mit φ' und ψ', so ergiebt sich

$$\varphi' = \frac{z}{x'}, \quad \text{also} \quad \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{x}{x'}, \quad \text{und ebenso} \quad \frac{\psi}{\psi'} = \frac{y}{y'}$$

und man erhält

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\psi}{\psi'}.$$

Nimmt man nun s wiederum als Tangente des Winkels PS und setzt eben so $q = \operatorname{tang} PQ$, so sind wiederum jene vier gleichgesetzten Ausdrücke gleich $\frac{s}{q}$ und es ist

$$[3] \quad x = \frac{s}{q}x'; \quad y = \frac{s}{q}y'; \quad \varphi = \frac{s}{q}\varphi'; \quad \psi = \frac{s}{q}\psi'.$$

Es ist klar, dafs man, da hier die Gleichungen [3] sich auf vier Veränderliche x, y, φ, ψ beziehen (welche übrigens das Verhältnifs haben, dafs $x : y = \varphi : \psi$), auch die Gleichung [2] der Oberfläche als Gleichung vom $n$ten Grade zwischen diesen vier Veränderlichen wird annehmen können; also die Gleichung

$$[2] \quad \Sigma F_a(x, y, \varphi, \psi) = 0.$$

Durch Substitution von [3] in [2] erhält man dann

$$[4] \quad \Sigma s_a \frac{F_a(x', y', \varphi', \psi')}{q^a} = 0.$$

Dann erhält man aus Gleichung I., zu welcher wir die Form (I. *b*) wählen und aus [4] wiederum, da die Anzahl der Veränderlichen keinen Unterschied machen kann, dieselbe Gleichung (V.), welche also lauten würde:

$$[5] \quad \Sigma(n-a)^{m-a} F_a(x', y', \varphi', \psi') = 0.$$

Die Gleichung (I. *b*) gestaltet sich, wie bei dem Ebenensystem, leicht in die Form (I. *c*) um, da auch hier q und s die Tangenten der Winkel PQ und PS bedeuten, und man hat auch hier:

$$[\text{I. } c] \quad \left(\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} \cdots\cdots \frac{\sin QS_n}{\sin PS_n}\right)^m = 0,$$

als Gleichung der harmonischen Mitten *m*ter Ordnung Q zwischen den von *einem* Puncte ausgehenden und in *einer* Ebene liegenden Geraden $S_1 \ldots\ldots S_n$ in Bezug auf die durch denselben Punct gehende und in derselben Ebene liegende Gerade P. Demnach wird der Hauptsatz für Liniensysteme im Raume folgendermaafsen lauten, wenn man nemlich die Oberfläche, welche durch eine Gleichung vom *n*ten Grade zwischen x, y, φ, ψ bestimmt ist, eine Oberfläche *n*ter *Reihe* nennt:

„*Wenn man von einem in einer festen Geraden* P *liegenden beweglichen Punct in einer um dieselbe Gerade beweglichen Ebene die* n *Tangenten* $S_1 \ldots\ldots S_n$ *an eine Oberfläche* n*ter Reihe zieht und eine durch denselben Punct gehende und in derselben Ebene liegende Gerade* Q *so annimmt, dafs die Summe sämmtlicher Producte zu* m *Factoren, welche sich aus den Quotienten der Sinus-Abstände jeder Tangente von der Geraden* Q *einerseits und der Geraden* P *andrerseits bilden lassen, gleich* 0 *ist, d. h. also, dafs*

$$\left(\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} \cdots\cdots \frac{\sin QS_n}{\sin PS_n}\right)^m = 0$$

ist: so ist der geometrische Ort der Geraden Q *eine Oberfläche* m*ter Reihe; und zwar erhält man, wenn* P *zum Ursprung der Richtstücke* *) *gemacht ist, u. s. w.*"

Die Benennungen sind hier dieselben, wie früher, nur dafs wir P die Polar-Axe nennen wollen.

Es werden hier vier Veränderlichen zu Grunde gelegt, welche unter sich eine Proportion bilden. Man kann natürlich vermittelst dieser Pro-

*) Nämlich die Haupt-Axe heifst hier wieder Ursprung der Richtstücke, weil die vier Richtstücke derselben alle gleich 0 sind.

portion sogleich eine der vier Veränderlichen herausschaffen; doch verschwindet dann die eigenthümliche Symmetrie in den Gleichungen. Um diese etwas abnorm scheinende Coordinaten-Bestimmung näher zu rücken und ihre Wichtigkeit vor die Augen zu stellen, wollen wir noch folgende Beziehungen für dieselbe aufstellen:

1. „Jede Oberfläche $n$ter Reihe wird von einer durch die Haupt-Axe gelegten Ebene in einer Curve $n$ter Classe geschnitten."

Es sei in der That die Gleichung der Oberfläche $n$ter Reihe

$$\Sigma a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}}\, x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} \varphi^{\mathfrak{c}} \psi^{\mathfrak{d}} = 0,$$

wo $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}}$ den zu den Exponenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gehörigen Coëfficienten andeutet, der, wenn die Gleichung vom $n$ten Grade sein soll, 0 ist, sobald $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$ gröfser als n ist. Man nehme an, dafs die durch die Haupt-Axe (Z) gelegte Durchschnitts-Ebene gegen die Ebene der beiden Axen Z und X den Winkel α bildet, nenne die Strecke vom Durchschnittspuncte der drei Axen bis zu dem Punct, in welchem eine in der Durchschnitts-Ebene liegende, an die Oberfläche gezogene Tangente S die Haupt-Ebene schneidet, p, und bezeichne $\frac{p}{z}$ in dem obigen Sinne durch ϖ, so hat man für S:

$x = p\cos\alpha$; $y = p\sin\alpha$, und hieraus, durch Division mit z:

$y = \varpi\cos\alpha$; $\psi = \varpi\sin\alpha$.

Substituirt man diese Ausdrücke in der gegebenen Gleichung, so erhält man

$$\Sigma a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} (\cos\alpha)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}} (\sin\alpha)^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}} p^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \varpi^{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}} = 0;$$

welches eine Gleichung vom $n$ten Grade zwischen p und ϖ ist. Also ist die dadurch dargestellte Durchschnittscurve eine Curve $n$ter Classe.

2. „Zieht man von einem Puncte der Haupt-Axe an eine Oberfläche $n$ter Reihe die sämmtlichen Tangenten, so bilden die Durchschnittspuncte derselben mit der Haupt-Ebene eine Curve $n$ter Ordnung."

Denn dann ist z constant und kann gleich c gesetzt werden. Man substituire $\varphi = \frac{x}{a}$; $\psi = \frac{y}{c}$ in der obigen Gleichung, so erhält man

$$\Sigma \frac{a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{c^{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}}\, x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}} y^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}} = 0:$$

eine Gleichung, welche in Bezug auf x und y vom $m$ten Grade ist, wenn die ursprüngliche Gleichung von diesem Grade war; es bilden also die Puncte, deren Richtstücke x und y sind, eine ebene Curve $m$ter Ordnung.

Die weitere Discussion übergehen wir und bemerken nur noch, dafs das Gebilde erster Reihe, welches in der Form

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{\varphi}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}=1$$

dargestellt werden kann, eine *Gerade* ist. Dies folgt unmittelbar daraus, dafs, wenn man aus jedem beliebigen Puncte der Haupt-Axe die sämmtlichen tangirenden Geraden an das Gebilde erster Reihe zieht, die dadurch entstehende Projection desselben auf die Haupt-Ebene nach dem vorher ausgesprochenen Satze jedesmal eine Linie erster Ordnung, also eine Gerade ist. Auch ergiebt sich, da jene lineäre Gleichung vier Constanten hat, dafs jede Gerade im Raume in Bezug auf jedes Axensystem als Gebilde erster Reihe betrachtet werden kann. Auch ist klar, dafs sich jedes System von n Geraden im Raume als Gebilde $n$ter Reihe zeigt: alles Resultate, welche den für die beiden andern Richtsysteme aufgestellten ganz analog sind *).

Die Folgerungen aus dem Hauptsatze, welche in §. 5. 6. und 7. für Punctsysteme entwickelt wurden, können leicht in die beiden andern Richtsysteme übertragen werden; doch wollen wir diese Uebertragung nur da andeuten, wo sie bedeutendere Abweichungen darbietet, nicht da, wo sie nur eine nach dem im Hauptsatze dargestellten Princip leicht ausführbare Uebersetzung aus der Sprache des einen Systems in die des andern enthält. Eigenthümlich gestaltet sich für Ebenensysteme insbesondere der Fall, wo die Ebene P in's Unendliche rückt, indem es nur *eine* unendlich entfernte Ebene giebt, während der Punct P, wenn er in unendliche Entfernung rückt, unendlich viele verschiedene Richtungen darstellen kann.

Es liege also die Ebene P in unendlicher Entfernung, die Ebenen $S_1 \dots S_n$ in endlicher. Da nun $S_1 \dots S_n$ und Q die Ebene P alle in derselben Geraden schneiden sollen, welche also hier unendlich entfernt ist, so werden sie alle unter sich parallel sein. Die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} \cdots \frac{\sin QS_n}{\sin PS_n}\right)^m = 0$$

ist hier nicht mehr anwendbar, da alle diese Sinus vermöge des Parallelismus der Ebene verschwinden, ihr Quotient also unbestimmt wird. Um

---

*) Man sieht übrigens leicht, dafs die Curven doppelter Krümmung, als Gebilde $n$ter Reihe, durch eine einzige Gleichung dargestellt werden; was diesem Richtsysteme ein besonderes Interesse giebt.

die Gleichung so zu gestalten, dafs die Uebertragung für den Fall, wo P ins Unendliche rückt, ausführbar wird, denke man sich von irgend einem Puncte der Ebene S_1 zwei Lothe gefällt: eins auf die Ebene P und eins auf die Ebene Q, und bezeichne für den Augenblick diese Lothe durch PS_1 und QS_1. Dann ist offenbar $\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} = \frac{QS_1}{PS_1}$, und indem man eben so mit den übrigen Ebenen $S_2 \ldots . S_n$ verfährt, erhält man

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1} \cdots \cdot \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\dot{m}} = 0;$$

welches sich für den Fall, dafs P ins Unendliche rückt, in

$$(QS_1 \ldots .. QS_n)^{\dot{m}} = 0$$

verwandelt; wie es sich schon oben (§. 6.) zeigte. Für diesen Fall werden aber die Lothe $QS_1 \ldots . QS_n$ alle einander parallel sein und können also als Abschnitte *einer* Geraden angesehen werden, und da jede andere durch die parallelen Ebenen gelegte Gerade mit jener ähnlich getheilt sein wird, so wird die Gleichung (I. c) hier durch die Gleichung

$$(QS_1 \ldots .. QS_n)^{\dot{m}} = 0$$

vertreten, wo QS_1 etc. die gegenseitigen Abstände der Ebenen Q und S_1 u. s. w oder auch die Stücke bezeichnen, welche die Ebenen Q und S_1 etc. aus einer beliebig hindurchgelegten Geraden herausschneiden. Hiernach würde denn für diesen Fall der allgemeine Satz folgende Gestalt annehmen:

„Legt man an eine Oberfläche n*ter Classe* n *unter sich parallele Tangential-Ebenen* $S_1 \ldots . S_n$, *von veränderlicher Richtung, und nimmt mit ihnen parallel eine Ebene* Q *so an, dafs die Summe sämmtlicher Producte von* m *Factoren, welche sich aus den Abständen der Ebene* Q *von den* n *Tangential-Ebenen bilden lassen, gleich* 0 *ist, so umhüllt die Ebene* Q *eine Oberfläche* m*ter Classe."*

Es heifse dieser Ort der Ebene Q, dem Princip unserer Benennung gemäfs, die *m*te Centrale der Oberfläche schlechthin, d. h. ohne Beziehung auf eine noch zu bestimmende Ebene. Ist insbesondere $m = 1$, also Q die Mitte zwischen $S_1 \ldots . S_n$, so ist der Umhüllungs-Ort ein Punct, welcher schlechthin Mittelpunct der gegebenen Oberfläche heifsen soll. Es ist dieser Mittelpunct in Bezug auf ebene Curven identisch mit Dem, was *Steiner* sehr passend Krümmungs-Schwerpunct derselben nennt; *) wie es

*) Vergl. dessen Abhandlung über den Krümmungsschwerpunct ebener Curven im ersten und zweiten Hefte des 21sten Bandes dieses Journals. Dafs dieser Punct

sich sehr leicht ergiebt, wenn man die Tangenten an zwei unendlich nahe aneinander liegende Puncte der Curve nimmt. Zieht man nämlich die mit einer Richtung parallelen Tangenten $S_1 \dots S_n$ und die ihre Mitte bildende Linie Q, und dann die Tangenten $S_1' \dots S_n'$, welche mit einer von der vorigen unendlich wenig abweichenden Richtung parallel sind, und die ihre Mitte bildende Linie Q', so schneiden sich Q und Q' in einem Punct, welcher die Mitte zwischen den n Puncten ist, in welchen sich die Tangenten S_1 und S_1', S_2 und S_2' u. s. w. schneiden, d. h. welcher der Schwerpunct jener n Puncte ist; alle als gleich schwer betrachtet. Es schliefsen aber diese Tangenten S_1 und S_1', S_2 und S_2' u. s. w. vermöge des angenommenen Parallelismus gleiche Winkel ein, d. h. es werden hier solche Elemente, welche gleiche Krümmung haben, gleich schwer angenommen. Da nun alle Geraden Q dieser Art sich in demselben Punct schneiden, so ist derselbe der Schwerpunct der Curve, unter der Voraussetzung, dafs alle Elemente derselben, welche gleiche Krümmung haben, als gleich schwer betrachtet werden; d. h. er ist der Krümmungsschwerpunct derselben. Eben so verhält es sich bei Oberflächen, bei denen man nur statt der zwei Systeme paralleler Tangenten drei unendlich nahe aneinander liegende Systeme paralleler Tangential-Ebenen zu setzen hat, während die übrigen Schlüsse ganz dieselben bleiben.

Will man hier für die $m$te Centrale einer Oberfläche $n$ter Classe (in Bezug auf die unendlich entfernte Ebene) die Gleichung suchen, so ergiebt sich eine merkwürdige Analogie mit der entsprechenden Aufgabe bei Punctsystemen. Wenn man nämlich dort den unendlich entfernten Punct, wie es oben geschah, in der z Axe annimmt, so hat man nur statt x und y überall φ und ψ zu setzen; alle Formeln bei dem Gange des Beweises bleiben dieselben. Die Gründe, aus welchen sich die verschiedenen Formeln ergeben, sind zwar hier andere, aber so einfach, dafs es nicht nöthig ist, sie besonders zu entwickeln. Nur das Resultat möge noch einmal ausgesprochen werden: dafs nämlich, wenn

$$\Sigma z^a f_{n-a}(\varphi, \psi) = 0$$

die Gleichung der Oberfläche ist, die ihrer $m$ten Centrale (in Bezug auf die unendlich entfernte Ebene)

$$\Sigma (n-a)^{m-a} f_a(\varphi, \psi) z^{m-a} = 0$$

---

hier schlechtweg Mittelpunct heifsen soll, ist nicht willkürlich, sondern nach dem Princip unserer Benennung nothwendig.

sein wird. Ist z. B. $m = 1$, und es sind die Glieder der beiden ersten Grade in der Gleichung für die gegebene Oberfläche

$$z^n + (a\varphi + b\psi + c)z^{n-1},$$

so hat man als Gleichung für die erste Centrale derselben, also für ihren Mittelpunct oder ihren Krümmungsschwerpunct, die Gleichung

$$nz + a\varphi + b\psi + c = 0;$$

d. h. die Richtstücke des Krümmungsschwerpunctes sind $-\frac{a}{n}, -\frac{b}{n}, -\frac{c}{n}$. Wenn also in jener Gleichung die Glieder vom $(n-1)$ten Grade wegfallen, so ist der Durchschnittspunct der drei Richt-Axen der Krümmungsschwerpunct der Curve. Die Uebertragung der in §. 5. und §. 7. entwickelten Folgerungen in die beiden andern Richtsysteme bleibt dem Leser überlassen. Ich will nur noch diejenigen Folgerungen verbunden darstellen, welche dazu dienen können, den Zusammenhang der verschiedenen Richtsysteme zu übersehen.

Es wurde oben (§. 7.) folgender Satz abgeleitet. Von einem Punct in der Ebene einer Curve $n$ter Classe lassen sich an dieselbe $n(n-1)$ Tangenten ziehen. Hier haben wir folgenden entsprechenden Satz. Eine ebene Curve wird von einer durch sie gelegten Geraden in $n(n-1)$ Puncten geschnitten; und hieraus folgt der bekannte Satz: Eine Curve $n$ter Ordnung läfst sich im Allgemeinen als Curve $n(n-1)$ter Classe und eine Curve $n$ter Classe als Curve $n(n-1)$ter Ordnung betrachten. Für Oberflächen $n$ter Ordnung fand sich, dafs sich aus einer Geraden an dieselbe $n(n-1)^2$ Tangential-Ebenen legen lassen: also entsteht hier der entsprechende Satz, dafs eine Oberfläche $n$ter Classe von einer Geraden in $n(n-1)^2$ Puncten geschnitten wird. Demnach ist auch im Allgemeinen eine Oberfläche $n$ter Classe von der Ordnung $n(n-1)^2$, und eine Oberfläche $n$ter Ordnung von der Classe $n(n-1)^2$. Eine Oberfläche zweiter Ordnung z. B. wird also auch von der zweiten Classe sein, und umgekehrt; wie dieselbe auch von zweiter Reihe ist, da ihr Durchschnitt mit jeder Ebene, wie auch ihre Tangentialprojection auf jede Ebene, ein Kegelschnitt, d. h. eine Curve zweiter Classe und zugleich zweiter Ordnung ist. Im Uebrigen ist jedoch der Gegenstand für Liniensysteme im Raume nicht so einfach, wie für die beiden anderen Systeme. Wir können hier nicht die weitere Erörterung dieses Gegenstandes geben, weil dazu eine selbstständige Erörterung der Liniensysteme erforderlich sein würde, welche zu einer eigenen Abhandlung von nicht geringerem Umfange, als die gegenwärtige, anwachsen würde.

Wir begnügen uns also damit, die Idee dieses Richtsystems aufgestellt, den Hauptsatz für dasselbe abgeleitet und die daraus fliefsenden Folgerungen angedeutet zu haben.

Um noch schliefslich die drei Formen, in welchen der Hauptsatz vermöge der drei Richtsysteme sich zeigte, in *einen* Wort-Ausdruck zusammenfassen zu können, sind noch folgende Benennungen nöthig. Der Punct, die Gerade, die Ebene, sollen *einfache Gebilde* oder *Elemente* heifsen; die Gerade zwischen zwei Puncten deren *Combination;* ebenso die Durchschnittskante zweier Ebenen; zwei Geraden endlich, welche derselben Ebene angehören, haben zu ihrer Combination diese Ebene und ihren gegenseitigen Durchschnittspunct, beides in eins zusammen angeschaut. Ueberhaupt verstehe man unter Combination zweier Elemente das Element, welches durch die beiden vollkommen bestimmt ist. Was unter Richtstücke eines Punctes, einer Ebene, einer Geraden verstanden wird, ist im Vorigen erörtert. Es ist nur zu erinnern, dafs, dem Obigen gemäfs, das Element, dessen Richtstücke alle 0 waren, das *Ursprungs-Element* heifst. Wenn nun zwischen den Richtstücken eines variabeln Elements eine Gleichung *n*ten Grades Statt findet, so heifst der geometrische Ort dieses Elements *Ort n*ten *Grades.* Dieser ist also, wenn das Element ein Punct ist, ein Gebilde *n*ter Ordnung; wenn eine Ebene, ein Gebilde *n*ter Classe; wenn eine Gerade, ein Gebilde *n*ter Reihe. Endlich unter *Entfernungsquotient* eines Elements S von zwei andern Q und P, deren Combinationen mit S einander decken, wird, wenn Q und P Puncte sind, der Quotient der beiden Entfernungen QS und PS verstanden *); wenn hingegen Q und P Gerade oder Ebenen sind, der Quotient der Entfernungen irgend eines Punctes in S von den Elementen Q und P, oder, was dasselbe ist, der Quotient der beiden Sinus des Winkels QS und des Winkels PS; wobei jedesmal die erstgenannte Gröfse als Dividendus zu betrachten ist. Diesen Benennungen gemäfs ist nun folgender Satz die Zusammenfassung aller früheren Sätze:

„*Wenn ein festes Element* P *und ein Ort* n*ten Grades eines mit* P *gleichartigen Elementes* S *gegeben sind, und man combinirt* P *mit dem beweglichen Element* S_1 *und zugleich mit allen übrigen Elementen* S,

*) D. h. also, wenn es Puncte sind, müssen alle drei, P, S, Q, in *einer* Geraden liegen; wenn Ebenen, müssen sie sich in *einer* Geraden schneiden; wenn Gerade, müssen sie in *einer* Ebene liegen und durch denselben Punct gehen.

deren Combinationen mit P *jene Combination* PS_1 *decken,* $S_2 \dots\dots S_n$, *und bestimmt dann ein dieser Combination gleichfalls angehöriges Element* Q *so, dafs die Summe aus sämmtlichen Producten von* m *Factoren, welche sich aus den Entfernungsquotienten eines jeden der Elemente* $S_1 \dots\dots S_n$ *von den beiden Elementen* Q *und* P *bilden lassen, gleich* 0 *ist: so ist der Ort des Elementes* Q *ein Ort* m*ten Grades, welcher die auf das Element* P *bezügliche* m*te Centrale des gegebenen Gebildes heifst; und zwar findet man, wenn* P *zum Ursprungs-Element gemacht ist, die Gleichung dieses Ortes aus der des gegebenen, wenn man jedes Glied des letzteren mit einer Combinationszahl multiplicirt, deren Elementenzahl den Grad dieses Gliedes zu* n, *und deren Classenzahl denselben zu* m *ergänzt.*"

Schlufsbemerkung.

Als ich den in §. 2. angedeuteten Weg einer noch gröfseren Verallgemeinerung verfolgte, gelangte ich zu folgendem Satze, welcher eben so einfach als allgemein und von welchem der in der vorhergehenden Abhandlung vorgelegte Hauptsatz wiederum nur ein specieller Fall ist. Da vielleicht dieser Satz einiges Interesse haben möchte, so will ich ihn hier wenigstens aufstellen und seinen Beweis geben, ohne auf die daraus etwa hervorgehenden Folgerungen einzugehen. Nämlich:

„*Zieht man aus einem festen Punct* P *an eine feste Oberfläche* n*ter Ordnung eine bewegliche Gerade, welche die Oberfläche in den Puncten* $S_1 \dots\dots S_n$ *schneidet, und bestimmt auf ihr einen Punct* Q *so, dafs der Gleichung*

$$A.\quad \Sigma\left(\frac{QS_1}{PS_1}\dots\dots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\mathfrak{a}}\left(\frac{QS_1}{PS_1}\dots\dots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\mathfrak{b}}\dots\dots = 0,$$

unter der Bedingung, dafs die Summe der Werthe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots\dots$ *constant und gleich* m *ist, genügt wird: so ist der geometrische Ort des Punctes* Q *eine Oberfläche* m*ter Ordnung; und zwar erhält man, wenn für den Axendurchschnittspunct* P *die Gleichung der gegebenen Oberfläche*

$$B.\quad \Sigma F_{\mathfrak{a}}(x, y, z) = 0$$

ist, als Ortsgleichung des Punctes Q,

$$C.\quad \Sigma(rn-\mathfrak{r})^{\dot{m}-\mathfrak{t}} F_{\mathfrak{a}}(x, y, z)\, F_{\mathfrak{b}}(x, y, z)\dots\dots = 0,$$

wo $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\dots\dots$ *der Kürze wegen mit* $\mathfrak{r}$ *bezeichnet ist, und wo* r *die An-*

zahl der Factoren, d. h. also auch de Anzahl der Gröfsen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... ***sowohl in dieser als in der ersten Gleichung (A.) bezeichnet."***

Man kann nämlich die Gleichung (*A.*) zunächst nach §. 4. dadurch umwandeln, dafs man statt $\frac{QS_1}{QS_1}$, $\left(1-\frac{q}{s_1}\right)$ u. s. w. setzt, und dann statt irgend einer, z. B. der *r*ten Combinationsclasse aus den Elementen $\left(1-\frac{q}{s_1}\right)\ldots\left(1-\frac{q}{s_n}\right)$, den oben (§. 4.) gefundenen Werth, nämlich

$$\Sigma(-1)^{\mathfrak{a}}(n-\mathfrak{a})^{\dot{}r-\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{s_1}\ldots\frac{1}{s_n}\right)^{\dot{}\mathfrak{a}}q^{\mathfrak{a}} \quad \text{oder} \quad \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}}(n-\mathfrak{a})^{\dot{}r-\mathfrak{a}}\frac{(s_1\ldots s_n)^{\dot{}n-\mathfrak{a}}}{(s_1\ldots s_n)^{\dot{}n}}q^{\mathfrak{a}}$$

substituirt. Nun entwickelt man aus *B*, dem Früheren ganz analog, die Gleichung

$$\Sigma s^{\mathfrak{a}}\frac{F_{\mathfrak{a}}(x,y,z)}{q^{\mathfrak{a}}} = 0,$$

deren *n* Wurzeln eben die vorher durch $s_1 \ldots s_n$ bezeichneten Gröfsen sind, und deren Coëfficienten man statt der Combinationsclassen dieser Wurzeln einführen kann, nämlich

$$(-1)^{\mathfrak{a}}\frac{(s_1\ldots s_n)^{\dot{}n-\mathfrak{a}}}{(s_1\ldots s_n)^{\dot{}n}} = \frac{F_{\mathfrak{a}}(x,y,z)}{q^{\mathfrak{a}}F_0(x,y,z)} \text{ *)}.$$

Dies in den obigen Ausdruck für die *r*te Combinationsclasse gesetzt, giebt für dieselbe

$$\Sigma(n-\mathfrak{a})^{\dot{}r-\mathfrak{a}}\frac{F_{\mathfrak{a}}(x,y,z)}{F_0(x,y,z)}.$$

Wenn man diesen Ausdruck für die Combinationsclassen in *A* substituirt und dabei nur alle die deutschen Buchstaben, welche Verschiedenes ausdrücken, auch verschieden bezeichnet, so erhält man, nach Multiplication mit $(F_0\,x,y,z)^m$, die Gleichung

$$\Sigma(n-\mathfrak{a})^{\dot{}\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}}.(n-\mathfrak{b})^{\dot{}\mathfrak{b}'-\mathfrak{b}}\ldots F_{\mathfrak{a}}(x,y,z).F_{\mathfrak{b}}(x,y,z)\ldots = 0,$$

mit der Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\ldots = m,$$

oder auch

$$\Sigma A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots}F_{\mathfrak{a}}(x,y,z).F_{\mathfrak{b}}(x,y,z)\ldots = 0,$$

wo nämlich der Coëfficient $A_{a,b,\ldots}$ (indem man für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... irgend eine Reihe bestimmter Werthe *a*, *b*, ... gesetzt hat) folgende Summe

$$A_{a,b,\ldots} = \Sigma(n-a)^{\dot{}\mathfrak{a}'-a}(n-b)^{\dot{}\mathfrak{b}'-b}\ldots,$$

*) Da keine Verwechselung zu befürchten ist, so sind die Unterscheidungsstriche über *x*, *y*, *z* weggelassen.

mit der Bedingungsgleichung, $\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\ldots = m$, darstellt. Um diese Summe zu finden, wende man folgendes Summationsgesetz an:

$$\sum_{[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\ldots=m]} \dot{\alpha}^{\mathfrak{a}}.\dot{\beta}^{\mathfrak{b}}\ldots = (\alpha+\beta+\ldots)^{\dot{m}},$$

welches Gültigkeit hat, sowohl wenn α, β, ... Zahlen, also $\dot{\alpha}^{\mathfrak{a}}$, $\dot{\beta}^{\mathfrak{b}}$, ... Combinationszahlen, als auch, wenn α, β, ... verschiedene Elementenreihen, also $\dot{\alpha}^{\mathfrak{a}}$, $\dot{\beta}^{\mathfrak{a}}$, ... wirkliche Combinationsclassen sind, das Product derselben aber die Verbindungen von jeder Combination der einen Classe mit jeder der andern darstellt. Denkt man sich das Letztere, so zeigt sich sogleich die Richtigkeit des Gesetzes aus dem Begriff der Combination; folglich gilt es auch für die Combinationszahlen. Hiernach ist nun:

$$A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots} \text{ oder } \sum_{[\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\ldots=m]} (n-\mathfrak{a})^{\dot{\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}}}(n-\mathfrak{b})^{\dot{\mathfrak{b}'-\mathfrak{b}}}\ldots = (rn-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\ldots)^{\dot{m-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\ldots}}$$

Substituirt man diesen Ausdruck für $A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots}$ in die obige Gleichung, so erhält man

$$\sum (rn-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\ldots)^{\dot{m-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\ldots}} F_{\mathfrak{a}}(x,y,z).F_{\mathfrak{b}}(x,y,z)\ldots;$$

was die zu erweisende Gleichung *C.* ist.

Es ist klar, dafs sich dieser Satz für $r=1$ in den oben dargestellten Hauptsatz verwandelt. Die Gleichung *A.* wird nämlich dann

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1}\ldots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\dot{m}} = 0,$$

und die Gleichung *C.* wird:

$$\sum (n-\mathfrak{a})^{\dot{m-\mathfrak{a}}} F(x,y,z) = 0;$$

welche Gleichungen mit den früher entwickelten (I. *c.* und V.) identisch sind.

5.

Recherches sur les intégrales définies.

(Par Mr. *Balthasar Boncompagni* à Rome.)

Introduction.

Une série ordonnée suivant les puissances ascendantes entières d'une variable x, aura pour somme une fonction continue de cette variable, tant que la série restera convergente, c'est-à-dire tant que la valeur de x demeurera comprise entre certaines limites qu'on détermine aisément; et dans ce cas la fonction et la série seront liées par une équation. En appliquant à cette équation l'intégration définie, après avoir multiplié les deux membres par une même quantité, on peut dans plusieurs cas réduire à une intégrale définie la somme d'une série, et reciproquement, calculer par le moyen d'une série la valeur des intégrales définies. Cet artifice bien simple a été employé avec succès par plusieurs illustres géomètres, et surtout par *Poisson* dans un long mémoire sur les intégrales définies, publié dans le Journal de l'école polytechnique, et par *Legendre* dans ses Exercices de Calcul Intégral. Je me propose de traiter dans cet écrit le même sujet avec plus de généralité, et de prouver que par cette méthode on peut parvenir à un grand nombre de résultats importants. Mon mémoire sera divisé en deux parties: dans la prémière j'appliquerai l'intégration définie à des séries algébriques; dans la seconde j'appliquerai le même procédé à des séries trigonométriques.

Première partie.

Supposons déterminée par un moyen quelconque la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{x_{,,}}^{x'} \mathrm{P}\,dx$$

et de l'autre

$$\int_{x_{,,}}^{x'} \mathrm{P}\,x^n\,dx,$$

P étant une fonction réelle de la variable x. Supposons aussi qu'on connaisse la somme de la série

$$(a) \quad a_0, \quad a_1 x, \quad a_2 x^2, \quad \ldots . \text{ etc.}$$

exprimée par une fonction continue de x. Soit $f(x)$ cette fonction; l'équation

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + \text{ etc.}$$

étant multipliée par $P\,dx$, et intégrée dans les deux membres entre les limites x', x'', donnera

$$(A) \quad \int_{x''}^{x'} P f(x)\,dx$$

$$= a_0 \int_{x''}^{x'} P\,dx + a_1 \int_{x''}^{x'} P x\,dx + a_2 \int_{x''}^{x'} P x^2\,dx + \ldots + \text{ etc.}$$

Au moyen de cette formule on pourra toujours trouver la somme de la série

$$(b) \quad a_0 \int_{x''}^{x'} P\,dx, \quad a_1 \int_{x''}^{x'} P x\,dx, \quad a_2 \int_{x''}^{x'} P x^2\,dx, \quad \ldots . \text{ etc.}$$

sous forme d'une intégrale définie $\int_{x''}^{x'} P f(x)\,dx$, et l'on déterminera réciproquement la valeur de cette intégrale par la série (b). Nous allons faire voir plusieurs conséquences remarquables qu'on peut déduire de la formule (A), en donnant à P, et à la fonction désigné par $f(x)$ des valeurs particulières.

Première application.

Nous supposerons

$$x' = 1, \quad x'' = 0, \quad P = x^{p-1}(1-x)^{q-1}.$$

Si l'on désigne par la notation $B(p, q)$ l'intégrale Eulérienne de première espece

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

nous aurons

$$\int_{x''}^{x'} P\,dx = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B(p, q),$$

$$\int_{x''}^{x'} P x^n\,dx = \int_0^1 x^{p+n-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B(p+n, q)$$

et l'équation (A) donnera cette formule connue:

$$(1) \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} f(x)\,dx$$

$$= a_0 B(p, q) + a_1 B(p+1, q) + a_2 B(p+2, q) + \text{ etc.} \ldots$$

qu'on peut écrire encore ainsi:

$$(2)\quad \frac{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}f(x)\,dx}{B(p,q)} = a_0 + a_1\frac{p}{p+q} + a_2\frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} + \text{etc.}\ldots$$

en ayant égard à la relation de *Stirling*

$$\frac{B(p+n,q)}{B(p,q)} = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{(p+q)(p+q+1)(p+q+2)\ldots(p+q+n-1)}.$$

Si l'on fait dans la formule (2)

$$f(x) = (1+\alpha x)^{-m},$$

$$a_0 = 1,\quad a_1 = -\frac{m}{1}\alpha,\quad a_2 = \frac{m(m+1)}{1.2}\alpha^2,\quad a_3 = -\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\alpha^3,\ \text{etc.}$$

on aura

$$(3)\quad \frac{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(1+\alpha x)^{-m}\,dx}{B(p,q)}$$

$$= 1 - \frac{m}{1}.\frac{p}{p+q}\alpha + \frac{m(m+1)}{1.2}.\frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}\alpha^2 - \text{etc.}\ldots$$

La formule (3) peut conduire à des résultats assez importants, que nous allons indiquer en peu de mots. Premièrement elle donne une valeur finie du rapport

$$\frac{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(1+\alpha x)^{-m}\,dx}{B(p,q)},\quad \text{lorsque}\quad m = p+q.$$

En effet si l'on met cette valeur de m dans la formule (3), on obtient

$$(4)\quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{(1+\alpha x)^{p+q}} = \frac{B(p,q)}{(1+\alpha)^p},$$

et comme l'équation $m = p+q$ donne $q = m-p$, la formule précédente donnera évidemment, lorsque $m = 1$,

$$(5)\quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+\alpha x)(1-x)^p} = \frac{\pi}{\sin p\pi(1+\alpha)^p}.$$

On obtiendra aussi de la formule (3) sous forme d'intégrale définie le terme général de la série qui provient du développement de la fonction

$$(1-2b.\cos z + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances ascendantes de b. En effet si l'on pose

$$p = r+h,\quad q = 1-r,\quad m = r,\quad \alpha = -b^2$$

ayant égard à l'expression

$$B(r+h,1-r) = \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+h-1)}{1.2.3\ldots h}.\frac{\pi}{\sin r\pi},$$

qui est une conséquence bien simple de la formule de *Stirling*, la formule (3) donnera

$$\frac{\sin n r\pi}{\pi}\cdot\int_0^1\frac{x^{r+h-1}\,dx}{(1-b^2x)^{-r}(1-x)^r}$$

$$=\frac{r(r+1)(r+2)\ldots.(r+h-1)}{1.2.3\ldots.h}+\frac{b^2}{1.2}\cdot\frac{r.r(r+1)\ldots.(r+h-1)(r+h)}{1.2.3\ldots.h(h+1)}$$

$$+\frac{b^4}{1.2}\cdot\frac{r.r(r+1)(r+1)(r+2)\ldots.(r+h-1)(r+h)(r+h+1)}{1.2.3\ldots.h(h+1)(h+2)}.$$

On sait que le terme général de la série produite par le développement de la fonction $(1-2b\cos z+z^2)^{-\frac{1}{2}r}$ peut être exprimée par le produit

$$2b^h\left\{\begin{array}{l}\dfrac{r(r+1)(r+2)\ldots.(r+h-1)}{1.2.3\ldots.h}+\dfrac{b^2}{1}\cdot\dfrac{r.r(r+1)(r+2)\ldots.(r+h-1)(r+h)}{1.2.3\ldots.h(h+1)}\\ +\dfrac{b^4}{1.3}\cdot\dfrac{r.r(r+1)(r+1)(r+2)\ldots.(r+h-1)(r+h)(r+h+1)}{1.2.3\ldots.h(h+1)(h+2)}+\text{etc.}\ldots.\end{array}\right\}$$

En désignant par A_n ce terme général, on aura évidemment l'équation

$$(6)\qquad A_n=\frac{2b^h\sin r\pi}{\pi}\int_0^1\frac{x^{r+h-1}\,dx}{(1-x)^r(1-b^2x)^{-r}},$$

d'ou

$$(7)\qquad \frac{\pi A_n}{2b^h\sin r\pi}=\int_0^1\frac{x^{r+h-1}\,dx}{(1-x)^r(1-b^2x)^{-r}}.$$

On peut déduire aussi de la formule (3) une autre expression remarquable lorsqu'on suppose

$$p=r+\tfrac{1}{2},\qquad q=1-r,\qquad m=r,\qquad a=-c.$$

En effet ces hypothèses nous donneront

$$\frac{\int_0^1 x^{r-\frac{1}{2}}(1-x)^{-r}(1-cx)^{-r}\,dx}{B(r+\frac{1}{2},\,1-r)}=$$

$$1+\frac{c}{1}\cdot\frac{r(r+\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}}+\frac{c^2}{1.2}\cdot\frac{r(r+1)(r+\frac{1}{2})(r+\frac{3}{2})}{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}+\text{etc.}\ldots.=$$

$$1+\frac{c}{1.2.3}.2r(2r+1)+\frac{c^2}{1.2.3.4.5}.2r(2r+1)(2r+2)(2r+3)+\text{etc.}\ldots.$$

En supposant $2r=m+1$, on aura

$$(8)\qquad \frac{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}m}[(1-x)(1-cx)]^{-\frac{m+1}{2}}\,dx}{B\left(\frac{m+2}{2},\,\frac{1-m}{2}\right)}=$$

$$1+\frac{c}{1.2.3}(m+1)(m+2)+\frac{c^2}{1.2.3.4.5}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)+\text{etc.}\ldots.$$

Si l'on fait $c = b^2$, on pourra écrire la formule (8) ainsi:

$$\frac{\int_0^1 x^{\frac{m}{2}}[(1-x)(1-b^2x)]^{-\frac{m+1}{2}}dx}{B\left(\frac{m+2}{2}, \frac{1-m}{2}\right)} = \frac{(1-b)^{-m}-(1+b)^{-m}}{2mb}.$$

En effet les formules

$$(1-b)^{-m} = 1+\frac{mb}{1}+\frac{m(m+1)}{1.2}b^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}b^3+\text{etc.}\ldots.$$

$$(1+b)^{-m} = 1-\frac{mb}{1}+\frac{m(m+1)}{1.2}b^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}b^3+\text{etc.}\ldots.$$

donnent

$$\frac{(1-b)^{-m}-(1+b)^{-m}}{2mb} =$$

$$1+\frac{b^2}{1.2.3}(m+1)(m+2)+\frac{b^4}{1.2.3.4.5}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)+\text{etc.}\ldots.$$

Si l'on a $b = \operatorname{tang} u$, on aura aussi

$$\frac{\sin mu \cos^m u}{m \operatorname{tang} u} = 1+\frac{\operatorname{tang}^2 u}{1.2.3}(m+1)(m+2)$$

$$+\frac{\operatorname{tang}^4 u}{1.2.3.4.5}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)+\text{etc.}\ldots.$$

et la formule (8) donnera

$$(10)\qquad \frac{\int_0^1 x^{\frac{m}{2}}[(1-x)(1-x\operatorname{tang}^2 u)]^{-\frac{m+1}{2}}}{B\left(\frac{m+2}{2}, \frac{1-m}{2}\right)} = \frac{\sin mu \cos^m u}{m \operatorname{tang} u}.$$

En transformant la fonction $B\left(\frac{m+2}{2}. \frac{1-m}{2}\right)$ en *Eulériennes* de seconde espèce, on pourrait obtenir par les formules (9) et (10) celles que *Legendre* a donné dans ses Exercices de Calcul Integral vol. II, pag. 113.

Enfin la formule (3) donnera des expressions remarquables d'un rapport de deux *Eulériennes* de première espèce. En effet, si l'on écrit $p+h$ au lieu de p, et si l'on fait en même temps $a = -1$, on aura

$$(11)\qquad \frac{B(p+h, q-m)}{B(p+h, q)} = 1+\frac{m(p+h)}{p+q+h}+\frac{m(m+1)(p+h)(p+h+1)}{1.2(p+q+h)(p+q+h+1)}$$

$$+\frac{m(m+1)(m+2)(p+h)(p+h+1)(p+h+2)}{1.2.3(p+q+h)(p+q+h+1)(p+q+h+2)}+\text{etc.}\ldots,$$

et en changeant le signe de m, cette expression donnera la suivante:

$$(12)\quad \frac{B(p+h,\, q+m)}{B(p+h,\, q)} = 1 - \frac{m(p+h)}{p+q+h} + \frac{m(m-1)(p+h)(p+h+1)}{1.2(p+q+h)(p+q+h+1)}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)(p+h)(p+h+1)(p+h+2)}{1.2.3(p+q+h)(p+q+h+1)(p+q+h+2)} + \text{etc.} \ldots$$

En faisant $h=0$, les formules (11) et (12) donnent ces expressions plus simples:

$$(13)\quad \frac{B(p,\, q-m)}{B(p,\, q)} = 1 + \frac{mp}{p+q} + \frac{m(m+1)p(p+1)}{1.2(p+q)(p+q+1)}$$
$$+ \frac{m(m+1)(m+2)p(p+1)(p+2)}{1.2.3(p+q)(p+q+1)(p+q+2)} + \text{etc.} \ldots$$

$$(14)\quad \frac{B(p,\, q+m)}{B(p,\, q)} = 1 - \frac{mp}{p+q} + \frac{m(m-1)p(p+1)}{1.2(p+q)(p+q+1)}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)p(p+1)(p+2)}{1.2.3(p+q)(p+q+1)(p+q+2)} + \text{etc.} \ldots$$

d'où par un simple échange mutuel des lettres p et q, on obtient

$$(15)\quad \frac{B(q,\, p-m)}{B(p,\, q)} = 1 + \frac{mq}{p+q} + \frac{m(m+1)q(q+1)}{1.2(p+q)(p+q+1)}$$
$$+ \frac{m(m+1)(m+2)q(q+1)(q+2)}{1.2.3(p+q)(p+q+1)(p+q+2)} + \text{etc.} \ldots$$

$$(16)\quad \frac{B(q,\, p+m)}{B(p,\, q)} = 1 - \frac{mq}{p+q} + \frac{m(m-1)q(q+1)}{1.2(p+q)(p+q+1)}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)q(q+1)(q+2)}{1.2.3(p+q)(p+q+1)(p+q+2)} + \text{etc.} \ldots$$

Maintenant, si l'on écrit au lieu de p, $p+m$ dans la formule (15), et $q+m$ au lieu de q dans la formule (13), on obtiendra

$$(17)\quad \frac{B(p,\, q)}{B(p+m,\, q)} = 1 + \frac{mq}{p+m+q} + \frac{m(m+1)q(q+1)}{1.2(p+m+q)(p+m+q+1)} + \text{etc.} \ldots$$

$$(18)\quad \frac{B(p,\, q)}{B(q+m,\, p)} = 1 + \frac{mq}{p+m+q} + \frac{m(m+1)p(p+1)}{1.2(p+m+q)(p+m+q+1)} + \text{etc.} \ldots$$

Les seconds membres des formules (17) et (18) jouissent d'une propriété remarquable, c'est-à-dire, que si l'on change dans le premier de ces polynomes m en q, q en m et dans le second m en p, et p en m, leur valeur n'est pas alterée: en d'autres termes, on peut dire, que le premier de ces polynomes est symétrique par rapport aux lettres m et q et que le second est symétrique par rapport aux lettres m et p. Cela posé, il est évident que les formules (17) et (18) conduisent a ces relations remarquables:

$$\frac{B(p,\, q)}{B(p+m,\, q)} = \frac{B(p,\, m)}{B(p+q,\, m)}, \qquad \frac{B(p,\, q)}{B(q+m,\, p)} = \frac{B(q,\, m)}{B(p+q,\, m)},$$

$$\frac{B(p,q)}{B(p,m)B(p+m,q)} = \frac{B(p,q)}{B(q,m)B(q+m,p)} = \frac{1}{B(p+q,m)},$$

$$\frac{B(q+m,p)}{B(p+m,q)} = \frac{B(p,m)}{B(q,m)}.$$

Deuxième application.

Si l'on fait dans la formule (A)

$$x' = 0, \quad x'' = \infty, \quad \mathrm{P} = e^{-kx^n} x^{np-1},$$

en désignant avec *Legendre* par $\Gamma(p)$ l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx,$$

l'équation

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

donnant non seulement

$$\frac{\Gamma(p)}{nk^p} = \int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} dx,$$

mais aussi

$$\frac{\Gamma(p+m)}{nk^{p+m}} = \int_0^\infty e^{-kx^n} x^{n(p+m)-1} dx,$$

nous aurons

$$(19) \quad \int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{nk^p}\Big[a_0\Gamma(p) + \frac{a_1}{k}\Gamma(p+1) + \frac{a_2}{k^2}\Gamma(p+2) + \text{etc.}\ldots\Big].$$

Et comme on a généralement

$$\Gamma(p+k) = p(p+1)(p+2)\ldots.(p+k-1)\Gamma(p)$$

la formule (19) pourra encore s'écrire de cette manière:

$$(20) \quad \int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} f(x) dx = \frac{\Gamma(p)}{nk^p}\Big[a_0 + \frac{a_1 p}{k} + \frac{a_2 p(p+1)}{k^2} + \text{etc.}\ldots\Big].$$

Pour un premier exemple de la formule (20) soit

$$f(x) = e^{-zx}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{z}{1}, \quad a_2 = \frac{z^2}{1.2}, \text{ etc.},$$

nous aurons

$$(21) \quad \int_0^\infty e^{-kx^n} e^{-zx} x^{np-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{nk^p}\Big(1 + \frac{z}{k}\Big)^{-p}.$$

Deux autres formules remarquables peuvent se déduire de la formule (20), en faisant successivement

$$f(x) = \cos sx, \quad f(x) = \sin sx,$$

$a_0 = 1,\quad a_1 = 0,\quad a_2 = -\frac{1}{1.2}s^2,\quad a_3 = 0$ etc. ....

$a_0 = 1,\quad a_1 = \frac{s}{1},\quad a_2 = 0,\quad a_3 = -\frac{1}{1.2.3}s^3$ etc. ....

ce qui donne

$$\int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} \cos sx\,dx$$
$$= \frac{\Gamma(p)}{nk^p}\left[1 - \frac{p(p+1)}{1.2}\cdot\frac{s^2}{k^2} + \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{s^4}{k^4} - \text{etc.}...\right],$$
$$\int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} \sin sx\,dx$$
$$= \frac{\Gamma(p)}{nk^p}\left[\frac{p}{1}\cdot\frac{s}{k} - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\cdot\frac{s^3}{k^3} + \text{etc.}...\right].$$

En réfléchissant que l'on a par des formules connues

$$\frac{\cos py}{(1+\tang^2 y)^{\frac{1}{2}p}} = 1 - \frac{p(p+1)}{1.2}\tang^2 y + \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4}\tang^4 y + \text{etc.}....$$
$$\frac{\sin py}{(1+\tang^2 y)^{\frac{1}{2}p}} = \frac{p}{1}\tang y - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\tang^3 y + \text{etc.}....,$$

on verra évidemment que l'hypothèse $s = k\tang y$ donnera

$$(22)\quad \int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} \cos(k\tang y)\,x\,dx = \frac{\Gamma(p)\cos py}{nk^p(1+\tang^2 y)^{\frac{1}{2}p}},$$
$$(23)\quad \int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} \sin(k\tang y)\,x\,dx = \frac{\Gamma(p)\sin py}{nk^p(1+\tang^2 y)^{\frac{1}{2}p}}.$$

Ces formules renferment comme cas particuliers les expressions connues

$$(24)\quad \int_0^\infty e^{-kx} x^{p-1} \cos(k\tang y)\,x\,dx = \frac{\Gamma(p)\cos py}{(s^2+k^2)^{\frac{1}{2}p}},$$
$$(25)\quad \int_0^\infty e^{-kx} x^{p-1} \sin(k\tang y)\,x\,dx = \frac{\Gamma(p)\sin py}{(s^2+k^2)^{\frac{1}{2}p}}.$$

Les seconds membres de ces expressions peuvent être transformés en imaginaires par les considérations suivantes. Soient

$$r = (s^2+k^2)^{\frac{1}{2}},\qquad y = \text{arc tang}\,\frac{s}{k}$$

le module et l'argument de l'expression imaginaire $s+k\sqrt{-1}$, on aura généralement

$$\cos py = \frac{e^{py\sqrt{-1}} + e^{-py\sqrt{-1}}}{2} = \frac{(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y)^p}{2} + \frac{(\cos y - \sqrt{-1}.\sin y)^p}{2},$$
$$\sin py = \frac{e^{py\sqrt{-1}} - e^{-py\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y)^p}{2\sqrt{-1}} - \frac{(\cos y - \sqrt{-1}.\sin y)^p}{2\sqrt{-1}}$$

et par conséquent

$$\cos py = \frac{(s+k\sqrt{-1})^p}{2(s^2+k^2)^{\frac{1}{2}p}} + \frac{(s-k\sqrt{-1})^p}{2(s^2+k^2)^{\frac{1}{2}p}},$$

$$\sqrt{-1}\sin py = \frac{(s+k\sqrt{-1})^p}{2(s^2+k^2)^{\frac{1}{2}p}} - \frac{(s-k\sqrt{-1})^p}{2(s^2+k^2)^{\frac{1}{2}p}}.$$

Les formules (24) et (25) pourront donc s'écrire encore ainsi:

$$(26)\quad \int_0^\infty e^{-kx}x^{p-1}\cos sx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{2(s^2+k^2)^p}[(s+k\sqrt{-1})^p+(s-k\sqrt{-1})^p],$$

$$(27)\quad \int_0^\infty e^{-kx}x^{p-1}\sin sx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{2\sqrt{-1}(s^2+k^2)^p}[(s+k\sqrt{-1})^p-(s-k\sqrt{-1})^p].$$

Les formules (26) et (27) offrent la détermination d'un grand nombre d'intégrales définies.

En effet, si dans ces formules on fait $a = 1$, on obtient

$$(28)\quad \int_0^\infty e^{-kx}\cos sx\,dx = \frac{k}{s^2+k^2},$$

$$(29)\quad \int_0^\infty e^{-kx}\sin sx\,dx = \frac{s}{s^2+k^2}.$$

Si l'on fait $s = 1$, on a

$$(30)\quad \int_0^\infty e^{-kx}x^{p-1}\cos x\,dx = \frac{\Gamma(p)\cos py}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}p}},$$

$$(31)\quad \int_0^\infty e^{-kx}x^{p-1}\sin x\,dx = \frac{\Gamma(p)\sin py}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}p}}.$$

Les formules (30) et (31) donneront pour $k = 0$,

$$(32)\quad \int_0^\infty x^{p-1}\cos x\,dx = \Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2},$$

$$(33)\quad \int_0^\infty x^{p-1}\sin x\,dx = \Gamma(p)\sin\frac{p\pi}{2}.$$

Ensuite pour $p = \frac{1}{2}$, $p = 1$, $p = 2$, on obtiendra par les formules (32) et (33) les resultats suivants très simples:

$$(34)\quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\pi)},$$

$$(35)\quad \int_0^\infty \sin x\,dx = -\int_0^\infty x\cos x\,dx = 1,$$

$$(36)\quad \int_0 \cos x\,dx = \int_0^\infty x\sin x\,dx = 0.$$

En faisant $p = 0$, la formule (32) donnera

$$(37)\quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x}dx = 0.$$



On verra plus bas qu'au moyen de ces expressions très simples on peut parvenir à déterminer la valeur de plusieurs intégrales definies plus compliquées.

Un autre exemple remarquable de la formule (20) s'obtient en faisant

$$f(x) = \cos(2z\sqrt{kx}),$$

et par suite

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{2z^2 k}{1}, \quad a_2 = \frac{2k^2 z^4}{1.3} \text{ etc....}$$

En effet dans ces hypothèses la formule (20) donnera, en y faisant $p = \frac{1}{2}$,

$$(38) \quad \int_0^\infty e^{-kx^n} x^{\frac{1}{2}n-1} \cos(2z\sqrt{kx})\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{k}} e^{-z^2},$$

et pour $n = 1$,

$$(39) \quad \int_0^\infty e^{-kx} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2z\sqrt{kx})\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} e^{-z^2};$$

résultat qui est d'accord avec une formule connue. Si dans la formule (39) on fait $x = y^2$, $k = h^2$, $z = 0$, on a cette expression très simple:

$$\int_0^\infty e^{-h^2y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2h},$$

qui est due à *Euler*.

Enfin, si dans la formule (20) on fait

$$f(x) = (1+hx)^{-m},$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{m}{1}h, \quad a_2 = \frac{m(m+1)}{1.2}h^2,$$

$$a_3 = -\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}h^3 \text{ etc. ....}$$

on aura

$$(40) \quad \int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} (1+hx)^{-m}\,dx =$$

$$\frac{\Gamma(p)}{nk^p}\left[1 - \frac{pm}{1}\cdot\frac{h}{k} + \frac{p(p+1)m(m+1)}{1.2}\cdot\frac{h^2}{k^2} - \frac{p(p+1)(p+2)m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\cdot\frac{h^3}{k^3} + \text{etc.}\right]$$

Lorsqu'on rèduit a l'unité la quantité h, la série du second membre de l'équation (40) devient celle que Mr. *Kummer* dans ses recherches sur les intégrales définies désigne par $\chi(p, m, k)$. (Voyez le présent journal vol. 17.) La formule (40) donnera donc lorsque $h = 1$,

$$\int_0^\infty e^{-kx^n} x^{np-1} (1+x)^{-m}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{nk^p}\chi(p, m, k),$$

d'où, quand on fait $n = 1$,

$$(41) \quad \int_0^\infty e^{-kx} x^{p-1} (1+x)^{-m}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{k^p}\chi(p, m, k):$$

formule remarquable à laquelle parvient Mr. *Kummer* par une autre méthode (Voy. ce journal vol. 17, pag. 231).

Troisième application.

Faisons encore dans la formule (A)

$$x' = \infty, \quad x'' = 0, \quad P = e^{-x^2},$$

nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-x^2} f(x)\,dx = a_0\int_0^\infty e^{-x^2}dx + a_1\int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx + a_2\int_0^\infty e^{-x^2}x^2dx$$
$$+ a_3\int_0^\infty e^{-x^2}x^3dx + \text{etc.} \ldots.$$

Les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-x^2}x^n dx$$

ont une valeur connue qu'il est facile à déterminer.

En effet une formule, que nous venons de trouver dans l'application précédente, et qui d'ailleurs est très-connue, nous donne

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

et par cette valeur on obtient celle de l'autre intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}x^n dx$. C'est ce qu'on démontre aisement au moyen de la formule de réduction

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^n dx = \frac{n-1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{n-2}dx,$$

de laquelle pour les valeurs successives

$$n=1, \quad n=2, \quad n=3, \quad n=4, \quad n=5, \quad n=6, \quad \text{etc.} \ldots$$

on tire les équations suivantes:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx = 0, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}x^2dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^0dx = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$
$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^3dx = 0, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}x^4dx = \tfrac{3}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^2dx = \tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$
$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^5dx = 0, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}x^6dx = \tfrac{5}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}x^4dx = \tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

etc. ....

Concluons que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}x^n dx$ sera nulle pour toutes les valeurs impaires de n, et que pour les valeurs paires de n elle prendra les valeurs

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \frac{1}{2^2}\sqrt{\pi}, \quad \frac{1.3}{2^3}\sqrt{\pi}, \quad \frac{1.3.5}{2^4}\sqrt{\pi}, \quad \frac{1.3.5.7}{2^5}\sqrt{\pi}, \quad \text{etc.} \ldots.$$

On aura donc

$$(42)\quad \int_0^\infty e^{-x^2} f(x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[a_0 + a_2 . \frac{1}{2} + a_4 \frac{1.3}{2^2} + a_6 \frac{1.3.5}{2^3} + a_8 \frac{1.3.5.7}{2^4} + \text{etc. } \ldots\right].$$

Ajoutons que de l'équation

$$f(a) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{etc. } \ldots.$$

(en exprimant les dérivées de $f(x)$ par les notations $f'(x)$, $f''(x)$ etc. .... à la manière de *Lagrange*) on tire les valeurs

$$f(0) = a_0, \quad \frac{f''(0)}{1.2} = a_2, \quad \ldots. \quad \frac{f^{\text{IV}}(0)}{1.2.3.4} = a_4, \quad \text{etc. } \ldots.$$

La formule (42) pourra donc être écrite comme suit:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} f(x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[f(0) + \frac{1}{1.2}.\frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{1.2.3.4}.\frac{1.3}{2^2}f^{\text{IV}}(0) + \text{etc. } \ldots\right],$$

$$(43)\quad \int_0^\infty e^{-x^2} f(x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[f(0) + \frac{1}{2^2}f''(0) + \frac{1}{1.2}.\frac{1}{2^4}f^{\text{IV}}(0) + \text{etc.} \ldots\right].$$

La série

$$z = f(0) + \frac{1}{2^2}f''(0) + \frac{1}{1.2}.\frac{1}{2^4}f^{\text{IV}}(0) + \text{etc. } \ldots.$$

se réduit au développement de l'intégrale définie

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2} f(x)\,dx.$$

Ce théorème que l'on tire de l'équation (43) peut encore se déduire d'une formule que *Laplace* à donnée dans le XV. cahier du journal de l'école polytechnique.

Quatrième application.

Faisons dans la formule (A) $x' = \infty$, $x'' = 0$, et successivement

$$P = x^{p-1}\cos x, \qquad P = x^{p-1}\sin x.$$

Les formules (32) et (33) nous donneront non seulement les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty x^{p-1}\cos x\,dx, \quad \int_0^\infty x^{p-1}\sin x\,dx,$$

mais aussi les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty x^{p+n-1}\cos x\,dx,\quad \int_0^\infty x^{p+n-1}\sin x\,dx$$

exprimées par les formules

$$\int_0^\infty x^{p+n-1}\cos x\,dx = \Gamma(p+n)\cos\left(\frac{p+n}{2}\right)\pi,$$

$$\int_0^\infty x^{p+n-1}\sin x\,dx = \Gamma(p+n)\sin\left(\frac{p+n}{2}\right)\pi,$$

qu'on obtient en changeant p en $p+n$ dans les formules (32) et (33). Avec ces valeurs nous aurons

$$(44)\quad \int_0^\infty x^{p-1}\cos x\, f(x)\,dx$$

$$= a_0\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2} + a_1\Gamma(p+1)\cos\frac{p+1}{2}\pi + a_2\Gamma(p+2)\cos\frac{p+2}{2}\pi + \text{etc.}\ldots.$$

$$(45)\quad \int_0^\infty x^{p-1}\sin x\, f(x)\,dx$$

$$= a_0\Gamma(p)\sin\frac{p\pi}{2} + a_1\Gamma(p+1)\sin\frac{p+1}{2}\pi + a_2\Gamma(p+2)\sin\frac{p+2}{2}\pi + \text{etc.}\ldots.$$

ce qu'on peut encore écrire ainsi:

$$(46)\quad \frac{\int_0^\infty x^{p-1}\cos x\, f(x)\,dx}{\Gamma(p)}$$

$$= a_0\cos\frac{p\pi}{2} + a_1 p\cos\frac{p+1}{2}\pi + a_2 p(p+1)\cos\frac{p+2}{2}\pi + \text{etc.}\ \ldots.$$

$$(47)\quad \frac{\int_0^\infty x^{p-1}\sin x\, f(x)\,dx}{\Gamma(p)}$$

$$= a_0\sin\frac{p\pi}{2} + a_1 p\sin\frac{p+1}{2}\pi + a_2 p(p+1)\sin\frac{p+2}{2}\pi + \text{etc.}\ \ldots.$$

ou bien encore plus simplement,

$$(48)\quad \frac{\int_0^\infty x^{p-1}\cos x\, f(x)\,dx}{\Gamma(p)}$$

$$= a_0\cos\frac{p\pi}{2} - pa_1\sin\frac{p\pi}{2} - p(p+1)a_2\cos\frac{p\pi}{2} + p(p+1)(p+2)a_3\sin\frac{p\pi}{2} + \text{etc.}\ldots.$$

$$(49)\quad \frac{\int_0^\infty x^{p-1}\sin x\, f(x)\,dx}{\Gamma(p)}$$

$$= a_0\sin\frac{p\pi}{2} + a_1 p\cos\frac{p\pi}{2} - a_2 p(p+1)\sin\frac{p\pi}{2} - a_3 p(p+1)(p+2)\cos\frac{p\pi}{2} + \text{etc.}\ldots.$$

Cinquième application.

Supposons enfin dans la formule (A) $x' = \infty$, $x'' = 0$, et successivement

$$\mathrm{P} = x^{p-1}\cos x . e^{-kx}, \qquad \mathrm{P} = x^{p-1}\sin x . e^{-kx},$$

les formules (30) et (31) donneront non seulement les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p-1}\cos x\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p-1}\sin x\,dx,$$

mais aussi celles des intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p+n-1}\cos x\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p+n-1}\sin x\,dx$$

exprimées par les formules

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p+n-1}\cos x\,dx = \frac{\Gamma(p+n)\cos(p+n)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{p+n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p+n-1}\sin x\,dx = \frac{\Gamma(p+n)\sin(p+n)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{p+n}{2}}}.$$

On aura donc

$$(50) \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p-1}\cos x\,f(x)\,dx$$

$$= a_0\frac{\Gamma(p)\cos p\gamma}{(1+k^2)^{\frac{p}{2}}} + a_1\frac{\Gamma(p+1)\cos(p+1)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{p+1}{2}}} + a_2\frac{\Gamma(p+2)\cos(p+2)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{p-2}{2}}} + \text{etc.} \ldots.$$

$$(51) \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p-1}\sin x\,f(x)\,dx$$

$$= a_0\frac{\Gamma(p)\sin p\gamma}{(1+k^2)^{\frac{p}{2}}} + a_1\frac{\Gamma(p+1)\sin(p+1)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{p+1}{2}}} + a_2\frac{\Gamma(p+2)\sin(p+2)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{p+2}{2}}} + \text{etc.} \ldots.$$

et par suite

$$(52) \qquad \frac{\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p-1}\cos x\,f(x)\,dx}{\Gamma(p)}$$

$$= \frac{1}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}p}}\left[a_0\cos p\gamma + a_1 p\frac{\cos(p+1)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} + a_2 p(p+1)\frac{\cos(p+2)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{2}{2}}} + \text{etc.} \ldots.\right],$$

$$(53) \qquad \frac{\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{p-1}\sin x\,f(x)\,dx}{\Gamma(p)}$$

$$= \frac{1}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}p}}\left[a_0\sin p\gamma + a_1 p\frac{\sin(p+1)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} + a_2 p(p+1)\frac{\sin(p+2)\gamma}{(1+k^2)^{\frac{2}{2}}} + \text{etc.} \ldots.\right].$$

Deuxième partie.

Supposons déterminées par un moyen quelconque les valeurs des intégrales définies

$$\int_{x''}^{x'} P\,dx, \quad \int_{x''}^{x'} P\cos mnx\,dx, \quad \int_{x''}^{x'} P_1 \sin mnx\,dx,$$

P et P_1 étant deux fonctions réelles de x. Supposons ainsi qu'on connaisse la somme des séries

$$a_0, \quad a_1 z\cos mx, \quad a_2 z^2 \cos 2mx \quad \text{etc.} \dots.$$
$$a_1 z \sin mx, \quad a_2 z^2 \sin 2mx \quad \text{etc.} \dots.$$

exprimée par deux fonctions réelles et continues de z que nous désignerons par $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, on aura les équations suivantes:

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z\cos mx + a_2 z^2 \cos 2mx + \text{etc.} \dots$$
$$\psi(z) = \quad a_1 z \sin mx + a_1 z^2 \sin 2mx + \text{etc.} \dots$$

En multipliant la première par $P\,dx$ et la seconde par $P_1 dx$, et en intégrant dans l'une et l'autre chaque terme entre les limites x' et x'', on obtiendra les formules

$$\int_{x''}^{x'} \varphi(z) P\,dx$$
$$= a_0 \int_{x''}^{x'} P\,dx + a_1 z \int_{x''}^{x'} P\cos mx\,dx + a_2 \int_{x''}^{x'} P\cos 2mx\,dx + \text{etc.} \dots$$
$$\int_{x''}^{x'} \psi(z) P_1 dx$$
$$= a_1 z \int_{x''}^{x'} P_1 \sin mx\,dx + a_2 z^2 \int_{x''}^{x'} P_1 \sin 2mx\,dx + \text{etc.} \dots$$

Au moyen de ces formules l'on pourra toujours trouver la somme des séries

$$a_0 \int_{x''}^{x'} P\,dx, \quad a_1 z \int_{x''}^{x'} P\cos mx\,dx, \quad a_2 z^2 \int_{x''}^{x'} P\cos 2mx\,dx \quad \text{etc.} \dots$$
$$a_1 z \int_{x''}^{x'} P_1 \sin mx\,dx, \quad a_2 z^2 \int_{x''}^{x'} P_1 \sin 2mx\,dx \quad \text{etc.} \dots$$

sous forme de deux intégrales définies

$$\int_{x''}^{x'} P\varphi(z)\,dx, \quad \int_{x''}^{x'} P_1 \psi(z)\,dx$$

et l'on déterminera réciproquement pour ces séries la valeur de ces intégrales définies.

Nous allons voir comment en plusieurs cas, on puisse parvenir à ce double objet.

Première application.

Soient

$$P = \frac{r}{r^2+x^2}, \quad P_1 = \frac{x}{r^2+x^2}, \quad x' = \infty, \quad x'' = 0,$$

des valeurs particulières des fonctions P et P_1 et des limites x' et x''. On aura par des formules connues,

$$\int_0^\infty P\,dx = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \int_0^\infty P\cos mnx\,dx = \int_0^\infty P\sin mnx\,dx = \tfrac{1}{2}\pi e^{-mnr}$$

et les formules (B) donneront

$$(1) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi(z)\,r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi(a_0 + z a_1 e^{-mr} + z^2 a_2 e^{-2mr} + \text{etc.}\ldots),$$

$$(2) \quad \int_0^\infty \frac{\psi(z)\,x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi(z a_1 e^{-mr} + z^2 a_2 e^{-2mr} + \text{etc.}\ldots).$$

Exemple premier. Si l'on suppose

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{u}{1}, \quad a_2 = \frac{u(u-1)}{1.2}, \quad a_3 = \frac{u(u-1)(u-2)}{1.2.3} \text{ etc.} \ldots$$

on aura nécessairement

$$\varphi(z) = R^u \cos u\theta, \quad \psi(z) = R^u \sin u\theta,$$

R et θ étant déterminés par les équations

$$R = (1+2z\cos mx + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \text{arc tang}\frac{z\sin mx.}{1+z\cos mx}.$$

En substituant dans les formules (1) et (2), on trouvera

$$(3) \quad \int_0^\infty \frac{R^u \cos u\theta\,r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi(1+ze^{-mr})^u,$$

$$(4) \quad \int_0^\infty \frac{R^u \sin u\theta\,x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi(1+ze^{-mr})^u - \tfrac{1}{2}\pi$$

en observant que

$$(1+ze^{-mr})^u = 1 + \frac{zu}{1}e^{-mr} + \frac{u(u-1)}{1.2}z^2 e^{-2mr} + \text{etc.}\ldots.$$

En changeant le signe de u, les valeurs de a_0, a_1, a_2 etc. seront déterminées par les équations suivantes:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{u}{1}, \quad a_2 = \frac{u(u+1)}{1.2}, \quad a_3 = -\frac{u(u+1)(u+2)}{1.2.3} \text{ etc.} \ldots$$

et on aura alors

$$\varphi(z) = R^{-u}\cos u\theta, \quad \psi(z) = R^{-u}\sin u\theta$$

et par suite

$$(5) \quad \int_0^\infty \frac{R^{-u}\cos u\theta.r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi(1+ze^{-mr})^{-u},$$

$$(6) \quad \int_0^\infty \frac{R^{-u}\sin u\theta.x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi(1+ze^{-mr})^{-u}.$$

Si l'on combine par voie d'addition ou de soustraction les formules (3), (4), (5), (6), on aura aussi

$$(7)\quad \int_0^\infty \frac{(R^u+R^{-u})\cos u\theta\, r\, dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi[(1+ze^{-mr})^u+(1+ze^{-mr})^{-u}],$$

$$(8)\quad \int_0^\infty \frac{(R^u+R^{-u})\sin u\theta\, x\, dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi[(1+ze^{-mr})^u-(1+ze^{-mr})^{-u})],$$

$$(9)\quad \int_0^\infty \frac{(R^u-R^{-u})\cos u\theta\, r\, dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi[(1+ze^{-mr})^u-(1+ze^{-mr})^{-u}],$$

$$(10)\quad \int_0^\infty \frac{(R^u-R^{-u})\sin u\theta\, x\, dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi[(1+ze^{-mr})^u-(1+ze^{-mr})^{-u}-2].$$

Ajoutons que les formules (7) et (8) puisqu'elles peuvent être écrites ainsi:

$$\int_0^\infty \frac{(e^{u\log R}+e^{-u\log R})\cos u\theta\, r\, dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,[e^{u\log(1+ze^{-mr})}+e^{-u\log(1+ze^{-mr})}],$$

$$\int_0^\infty \frac{(e^{u\log R}+e^{-u\log R})\sin u\theta\,.\,x\, dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,[e^{u\log(1+ze^{-mr})}-e^{-u\log(1+ze^{-mr})}],$$

donnent pour une valeur imaginaire de u, p. e. $u=u_1\sqrt{-1}$:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(u_1\log R)(e^{u_1\theta}+e^{-u_1\theta})\, r\, dx}{r^2+x^2} = \pi\cos(u_1\log(1+ze^{-mr})),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(u_1\log R)(e^{u_1\theta}-e^{-u_1\theta})\, x\, dx}{r^2+x^2} = \pi\sin(u_1\log(1+ze^{-mr})).$$

On pourrait obtenir des résultats analogues par les formules (9) et (10).

Exemple second. Si l'on suppose

$a_0=1,\qquad a_1=1,\qquad a_2=-\tfrac{1}{2},\qquad a_3=\tfrac{1}{3},\qquad a^4=-\tfrac{1}{4}$ etc....,

on aura

$$\varphi(z)=\log(1+2z\cos mx+z^2),\qquad \psi(z)=\operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin mx}{1+z\cos mx}.$$

On trouvera parsuite

$$(11)\quad \int_0^\infty \tfrac{1}{2}\log(1+2z\cos mx+z^2)\frac{r\,dx}{r^2+x^2}$$

$$=\int_0^\infty \operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin nx}{1+z\cos mx}\cdot\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\log(1+ze^{-mr}).$$

En réfléchissant que le développement de la fonction $\log(1+ze^{-mr})$ donne

$$\log(1+ze^{-mr}) = \frac{ze^{-mr}}{1}+\frac{z^2e^{-2mr}}{2}+\frac{z^3e^{-3mr}}{3}+\text{etc.....},$$

la formule (11) donnera

$$(12)\quad \int_0^\infty \log(1+2z\cos mx+z^2)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \pi\log(1+ze^{-mr}),$$

et celle-ci par un simple changement de signe de z donnera

$$(13)\quad \int_0^\infty \log(1-2z\cos mx+z^2)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \pi\log(1-ze^{-mr}).$$

En combinant par voie d'addition ou de soustraction les formules (12) et (13), on obtiendra les suivantes

$$(14)\quad \int_0^\infty \log\left(\frac{1+2z\cos mx+z^2}{1-2z\cos mx+z^2}\right)\cdot\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \pi\log\left(\frac{1+ze^{-mr}}{1-ze^{-mr}}\right),$$

$$(15)\quad \int_0^\infty \log\left(\frac{1-2z\cos mx+z^2}{1+2z\cos mx+z^2}\right)\cdot\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \pi\log\left(\frac{1-ze^{-mr}}{1+ze^{-mr}}\right).$$

Si l'on reduit à l'unité la valeur de z dans les formules (12), (13), (14), (15) on en tirera les expressions plus simples:

$$(16)\quad \int_0^\infty \log(2\cos\tfrac{1}{2}mx)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\log(1+e^{-mr}),$$

$$(17)\quad \int_0^\infty \log(2\sin\tfrac{1}{2}mx)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\log(1-e^{-mr}),$$

$$(18)\quad \int_0^\infty \log(\cot\tfrac{1}{2}mx)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\log\left(\frac{1+e^{-mr}}{1-e^{-mr}}\right),$$

$$(19)\quad \int_0^\infty \log(\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}mx)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\log\left(\frac{1-e^{-mr}}{1+e^{-mr}}\right)$$

dont les deux premières, et la dernière sont dues à l'illustre géomètre italien *Bidone* qui les a données pour la première fois dans un mémoire très-important sur les intégrales définies lu à l'Académie des sciences de Turin le 23 Mai 1812.

Exemple troisième. Si l'on fait

$$a_0 = 1,\qquad a_1 = \frac{1}{1},\qquad a_2 = \frac{1}{1.2},\qquad a_3 = \frac{1}{1.2.3}\quad \text{etc.} \ldots.$$

on aura

$$\varphi(z) = e^{z\cos mx}\cos(z\sin mx),\qquad \psi(z) = e^{z\cos mx}\sin(z\sin mx)$$

et parsuite

$$(20)\quad \int_0^\infty e^{z\cos mx}\cos(z\sin mx)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{ze^{-mr}}$$

$$(21)\quad \int_0^\infty e^{z\cos mx}\sin(z\sin mx)\frac{x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi(e^{ze^{-mr}}-1);$$

car le développement de la fonction $e^{ze^{-mr}}$ en série donne

$$e^{ze^{-mr}} = 1+\frac{ze^{-mr}}{1}+\frac{z^2e^{-2mr}}{1.2}+\text{etc.}\ldots.$$

Les expressions (20) et (21) on été trouvées par Mr. *Cauchy* à l'aide du

calcul des résidus. (Voyez Exercices de Mathématiques, vol. I. pag. 108.) Notre méthode en donne une verification très simple.

Exemple quatrième. Si l'on fait

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{1.2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{1.2.3.4} \text{ etc.} \ldots$$

en ayant ègard aux expressions connues

$$\frac{e^{z\sin mx}+e^{-z\sin mx}}{2}\cos(z\cos mx) = 1-\frac{z^2}{1.2}\cos 2mx+\frac{z^4}{1.2.3.4}\cos 4mx - \text{etc.} \ldots$$

$$\frac{e^{-z\sin mx}-e^{z\sin mx}}{2}\sin(z\cos mx) = -\frac{z^2}{1.2}\sin 2mx+\frac{z^4}{1.2.3.4}\sin 4mx - \text{etc.} \ldots$$

$$\cos(ze^{-mr}) = 1-\frac{z^2e^{-2mr}}{1.2}+\frac{z^4e^{-4mr}}{1.2.3.4} - \text{etc.} \ldots,$$

les formules (1) et (2) donneront immediatement

$$(22) \quad \int_0^\infty \frac{e^{z\sin mx}+e^{-z\sin mx}}{2}\cos(z\cos mx)\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\cos(ze^{-mr}),$$

$$(23) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-z\sin mx}-e^{z\sin mx}}{2}\sin(z\cos mx)\frac{x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi(\cos(ze^{-mr})-1).$$

Exemple cinquième. Si l'on suppose

$$a_0=0, \quad a_1=1, \quad a_2=0, \quad a_3=-\frac{1}{1.2.3}, \quad a_4=0, \quad \text{etc.} \ldots$$

on aura cette autre formule:

$$24. \quad \int_0^\infty \frac{e^{z\sin mx}+e^{-z\sin mx}}{2}\sin(z\cos mx)\frac{r\,dx}{r^2+x^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{z\sin mx}-e^{-z\sin mx}}{2}\cos(z\cos mx)\frac{x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\sin(ze^{-mr}),$$

que l'on déduira des formules (1) et (2) en ayant égard aux expressions connues

$$\frac{e^{z\sin mx}+e^{-z\sin mx}}{2}\sin(z\cos mx) = \frac{z}{1}\cos mx-\frac{z^3}{1.2.3}\cos 3mx + \text{etc.} \ldots$$

$$\frac{e^{z\sin mx}-e^{-z\sin mx}}{2}\cos(z\cos mx) = \frac{z}{1}\sin mx-\frac{z^3}{1.2.3}\sin 3mx + \text{etc.} \ldots$$

$$\sin(ze^{-mr}) = \frac{z}{1}e^{-mr}-\frac{z^3}{1.2.3}e^{-3mr}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}e^{-5mr} - \text{etc.} \ldots$$

Exemple sixième. Si l'on réduit à l'unité les valeurs des coëfficients a_0, a_1, a_2 etc. .... on aura

$$\varphi(z) = \frac{1 - z\cos mx}{1 - 2z\cos mx + z^2}, \qquad \psi(z) = \frac{z\sin mx}{1 - 2z\cos mx + z^2}$$

et parsuite

$$(25) \quad \int_0^\infty \frac{1 - z\cos mx}{1 - 2z\cos mx + z^2} \cdot \frac{r\,dx}{r^2 + x^2} = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{1 - ze^{-mr}},$$

$$(26) \quad \int_0^\infty \frac{z\sin mx}{1 - 2z\cos mx + z^2} \cdot \frac{x\,dx}{r^2 + x^2} = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{ze^{-mr}}{1 - ze^{-mr}};$$

car, on a

$$\frac{1}{1 - ze^{-mr}} = 1 + ze^{-mr} + (ze^{-mr})^2 + (ze^{-mr})^3 + \text{etc.} \ldots.$$

Deuxième application.

Supposons maintenant que P et P_1 soient déterminés par les équations

$$P = \frac{r\cos hx}{r^2 + x^2}, \qquad P_1 = \frac{r\sin hx}{r^2 + x^2},$$

ou bien par les équations

$$P = \frac{x\sin hx}{r^2 + x^2}, \qquad P_1 = \frac{x\cos hx}{r^2 + x^2}.$$

Prenons toujours $x' = \infty$, $x'' = 0$.

Dans chacun de ces deux cas les formules connues

$$\int_0^\infty \frac{r\cos hx\,dx}{r^2 + x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-rh}, \qquad \int_0^\infty \frac{r\sin hx\,dx}{r^2 + x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-rh}$$

détermineront la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty P\,dx$ et donneront aussi aisément les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty P\cos mnx\,dx, \qquad \int_0^\infty P_1 \sin mnx\,dx.$$

En effet, si dans les formules précédentes on écrit successivement $h + k$ et $h - k$ au lieu de h, on obtiendra

$$\int_0^\infty \frac{r\cos(h+k)x}{r^2 + x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-r(h+k)}, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin(h+k)x}{r^2 + x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-r(h+k)},$$

$$\int_0^\infty \frac{r\cos(h-k)x}{r^2 + x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-r(h-k)}, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin(h-k)x}{r^2 + x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-r(h+k)},$$

d'ou

$$\int_0^\infty \cos hx \cos kx \frac{r\,dx}{r^2 + x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-hr}\left(\frac{e^{kr} + e^{-kr}}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty \sin hx \sin kx \frac{r\,dx}{r^2 + x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-hr}\left(\frac{e^{kr} - e^{-kr}}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty \sin hx \cos kx \frac{x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-hr}\left(\frac{e^{kr}+e^{-kr}}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty \cos hx \sin kx \frac{x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-hr}\left(\frac{e^{-kr}-e^{kr}}{2}\right).$$

On obtiendra les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty \cos hx \cos mnx \frac{r\,dx}{r^2+x^2}, \qquad \int_0^\infty \sin hx \sin mnx \frac{r\,dx}{r^2+x^2},$$

$$\int_0^\infty \sin hx \cos mnx \frac{x\,dx}{r^2+x^2}, \qquad \int_0^\infty \cos hx \sin mnx \frac{x\,dx}{r^2+x^2}$$

en faisant $k = mn$ dans les expressions précédentes. Donc par les hypothèses que nous avons admis, on pourra déduire des formules (B) les suivantes:

$$(27) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi(z)\cos hx . r\,dx}{r^2+x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi e^{-hr}\left[a_0 + a_1 z\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right) + a_2 z^2\left(\frac{e^{2mr}+e^{-2mr}}{2}\right) + \text{etc.} \ldots\right],$$

$$(28) \quad \int_0^\infty \frac{\psi(z)\sin hx . r\,dx}{r^2+x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi e^{-hr}\left[a_1 z\left(\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2}\right) + a_2 z^2\left(\frac{e^{2mr}-e^{-2mr}}{2}\right) + \text{etc.} \ldots\right],$$

$$(29) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi(z)\sin hx . x\,dx}{r^2+x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi e^{-hr}\left[a_0 + a_1 z\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right) + a_2 z^2\left(\frac{e^{2mr}+e^{-2mr}}{2}\right) + \text{etc.} \ldots\right],$$

$$(30) \quad \int_0^\infty \frac{\psi(z)\cos hx . x\,dx}{r^2+x^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\pi e^{-hr}\left[a_1 z\left(\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2}\right) + a_2 z^2\left(\frac{e^{2mr}-e^{-2mr}}{2}\right) + \text{etc.} \ldots\right].$$

Pour donner un exemple de ces formules, nous prendrons le cas très simple

$$a_0 = a_1 = a_2 = \text{etc.} \ldots = 1.$$

On aura

$$\psi(z) = \frac{z \sin mx}{1 - 2z\cos mx + z^2}$$

et les formules (28) et (29) donneront

$$(31) \quad \int_0^\infty \frac{z \sin mx \sin hx}{1-2z\cos mx+z^2} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-hr}\left[\frac{z e^{mr}}{1-z e^{mr}} - \frac{z e^{-mr}}{1-z e^{-mr}}\right],$$

$$(32) \quad \int_0^\infty \frac{z \sin mx \cos hx}{1-2z\cos mx+z^2} \cdot \frac{x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-hr}\left[\frac{z e^{-mr}}{1-z e^{-mr}} - \frac{z e^{mr}}{1-z e^{mr}}\right],$$

car on a

$$\frac{z e^{-mr}}{1-z e^{-mr}} = z e^{-mr} + (z e^{-mr})^2 + (z e^{-mr})^3 + \text{etc.} \ldots\ldots$$
$$\frac{z e^{mr}}{1-z e^{-mr}} = z e^{mr} + (z e^{mr})^2 + (z e^{mr})^3 + \text{etc.} \ldots\ldots$$

On obtiendra aussi

$$(33) \quad \int_0^\infty \frac{z \sin hx \sin mx}{1+2z\cos mx + z^2} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{4}\pi\, e^{-hr}\left[\frac{z e^{mr}}{1+z e^{mr}} - \frac{z e^{-mr}}{1+z e^{-mr}}\right],$$
$$(34) \quad \int_0^\infty \frac{z \cos hx \sin mx}{1+2z\cos mx + z^2} \cdot \frac{x\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{4}\pi\, e^{-hr}\left[\frac{z e^{-mr}}{1+z e^{-mr}} - \frac{z e^{mr}}{1+z e^{mr}}\right],$$

en changeant le signe de z dans les formules (3?) et (33). Si l'on suppose

$$h = a + b, \qquad z = 1, \qquad m = 2a,$$

les formules (32) et (34) donneront

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x \sin 2ax}{1-\cos 2ax} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-(a+b)r}\left[\frac{e^{2ar}}{1-e^{2ar}} - \frac{e^{-2ar}}{1-e^{-2ar}}\right],$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x \sin 2ax}{1+\cos 2ax} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-(a+b)r}\left[\frac{e^{2ar}}{1+e^{2ar}} - \frac{e^{-2ar}}{1+e^{-2ar}}\right].$$

Par des réductions bien simples on trouvera

$$\frac{\sin(a+b)x \sin 2ax}{1-\cos 2ax} = \frac{\sin bx}{\sin ax} + \cos(a+b)x,$$
$$\frac{\sin(a+b)x \sin 2ax}{1+\cos 2ax} = \frac{\cos bx}{\cos ax} - \cos(a+b)x.$$

En substituant ces valeurs dans les équations précédentes et en ayant égard à la formule

$$\int_0^\infty \cos(a+b)x \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-(a+b)r},$$

on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sin ax} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-(a+b)r}\left[1 + \frac{e^{2ar}}{1-e^{2ar}} - \frac{e^{-2ar}}{1-e^{-2ar}}\right],$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\cos ax} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\, e^{-(a+b)r}\left[1 + \frac{e^{2ar}}{1+e^{2ar}} - \frac{e^{-2ar}}{1+e^{-2ar}}\right].$$

En réduisant au même dénominateur les fractions des seconds membres, ces formules pourront s'écrire ainsi:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sin ax} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi r^{-br}}{e^{-ar}+e^{ar}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{\cos ax} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi e^{-br}}{e^{ar}+e^{-ar}}.$$

Pour des valeurs négatives de la constante b on aurait à substituer à ces expressions les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sin ax} \cdot \frac{r\,dr}{r^2+x^2} = -\frac{\pi e^{br}}{e^{-ar}-e^{ar}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{\cos ax} \cdot \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi e^{br}}{e^{ar}+e^{-ar}}$$

et celles-ci ajoutées aux précédentes donneront

$$(35)\quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sin ax}\cdot\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{br}-e^{-br}}{e^{ar}-e^{-ar}},$$

$$(36)\quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{\cos ax}\cdot\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{br}+e^{-br}}{e^{ar}+e^{-ar}}.$$

Si l'on différentie par rapport à b les deux membres de chacune de ces équations, on aura

$$(37)\quad \int_0^\infty \frac{x\cos bx}{\sin ax}\cdot\frac{dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{br}+e^{-br}}{e^{ar}-e^{-ar}},$$

$$(38)\quad \int_0^\infty \frac{x\sin bx}{\cos ax}\cdot\frac{dx}{r^2+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{-br}-e^{br}}{e^{ar}+e^{-ar}}.$$

Si au contraire l'on multiplie les deux membres de chacune des équations (35) et (36), et qu'on intègre ensuite par rapport à b, on obtiendra

$$(39)\quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x\sin ax}\cdot\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{2r}\cdot\frac{e^{br}+e^{-br}}{e^{ar}-e^{-ar}},$$

$$(40)\quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x\cos ax}\cdot\frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{2r}\cdot\frac{e^{br}-e^{-br}}{e^{ar}+e^{-ar}}.$$

Les formules (35), (36), (37), (40) comprennent comme cas particuliers les expressions très-rémarquables, que Mr. *Cauchy* a donné le premier dans un mémoire sur les intégrales définies présenté à l'Institut de France le 22 août 1814, et que *Legendre* aussi a données dans ses Exercices de Calcul intégral p. V. pag. 135. En effet, si dans les formules (35), (36), (37) et (40) on fait $r=1$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sin ax}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{b}-e^{-b}}{e^{a}-e^{-a}},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\cos ax}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{b}+e^{-b}}{e^{a}+e^{-a}},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x\cos ax}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{b}-e^{-b}}{e^{a}+e^{-a}},$$

$$\int_0^\infty \frac{x\cos bx}{\sin ax}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{b}+e^{-b}}{e^{a}-e^{-a}},$$

et ce sont les formules qu'on doit a Mr. *Cauchy*.

hervorgehen. Enthält die Gleichung $fx = 0$ imaginaire Wurzeln und man benutzt dieselben in den

et

Si
éq

Si
(3

L
e:
u
2
C
(

e

6.

Einige neue Integralgleichungen des Jacobischen Systems Differentialgleichungen.

(Von dem Herrn Professor *Richelot* zu Königsberg in Pr.)

1.

In der Abhandlung 15. Band 23. d. Journ. habe ich Seite 366. $n-1$ algebraische Integralgleichungen des Systems Differentialgleichungen

$$1.\quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \frac{\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \dots + \frac{\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0, \\ \frac{x_1 \partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \frac{x_2 \partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \dots + \frac{x_n \partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{x_1^{n-2} \partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \frac{x_2^{n-2} \partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \dots + \frac{x_n^{n-2} \partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0, \end{cases}$$

welches der Herr Professor *Jacobi* im 9ten Bande d. Journ. aus dem *Abel*schen Theorem hergeleitet hat, aus demselben Theorem deducirt.

Diese Integralgleichungen haben eine solche Form, dafs ihre ersten Theile zugleich $n-1$ von einander unabhängige Lösungen der mit obigem System correspondirenden partiellen Differentialgleichung

$$2.\quad \frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = 0$$

liefern, wenn nemlich im Allgemeinen durch $F'x_h$ der Werth von $\left(\frac{\partial Fx}{\partial x}\right)$ für $x = x_h$ bezeichnet, und

$$Fx = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

gesetzt wird.

Bei jeder dieser Integralgleichungen werden zwei Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ benutzt, während Herr Professor *Jacobi* in der Abhandlung 3. Band 24. S. 33 eine Integralgleichung von ähnlicher Form, und zwar durch directe Integration gefunden hat, worin nur eine dieser Wurzeln vorkommt, so dafs hieraus, wenn alle $2n$ Wurzeln dafür substituirt werden, $2n$ solcher Integralgleichungen hervorgehen. Enthält die Gleichung $fx = 0$ imaginaire Wurzeln und man benutzt dieselben in den

beiden ebengenannten Auflösungen, so erscheinen sie in imaginairer Form. Ich werde daher im Folgenden eine andere Auflösung mittheilen, welche ebenfalls von zwei Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ abhängt und die Eigenschaft hat, reell zu bleiben, wenn man für diese beiden Wurzeln zwei conjugirte substituirt. Es ist mir aber ferner, was bedeutend wichtiger ist, jetzt gelungen, vollständige Systeme von $n-1$ Lösungen der obigen Gleichung (2.) zu finden, deren Character darin zu suchen ist, dafs sie durchaus *keine* der Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ enthalten, oder irgendwie voraussetzen. In der oben angeführten Abhandlung hatte ich nur *zwei* solcher Lösungen, und zwar in §. 4. durch eine directe Integration, welche ich die verallgemeinerte *Lagrange*sche Methode nannte, abgeleitet, hingegen in §. 5. mit dem *Abel*schen Theorem in Einklang gebracht. Auf ähnliche Weise werde ich im Laufe dieser Abhandlung meine neue und allgemeinste Lösung sowohl auf demselben directen Wege der Integration deduciren, (welche zugleich mit der oben angeführten, auf einer höchst sinnreichen Erweiterung der Auflösungsart einer berühmten mechanischen Aufgabe beruhenden *Jacobi*schen Integrationsmethode im Wesentlichen übereinkommt) als auch ihren Zusammenhang mit dem *Abel*schen Theoreme beleuchten und einige Hauptformen desselben direct durch passende Integrationen herleiten.

2.

Es sei fx irgend eine ganze rationale Function von x von beliebigem Grade. Führt man die Gröfse t ein, von der Beschaffenheit, dafs bei der obigen Bezeichnung die Gleichungen

$$3.\quad \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1},\quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2},\quad \frac{\partial x_n}{\partial t} = \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}$$

bestehen, so führt der bekannte Satz, dafs man

$$\frac{\Pi x_1}{F'x_1} + \frac{\Pi x_2}{F'x_2} + \dots + \frac{\Pi x_n}{F'x_n} = \left[\frac{\Pi z}{Fz}\right]_{z^{-1}}$$

hat, wo Πz eine beliebige ganze rationale Function von z ist, und $\left[\frac{\Pi z}{Fz}\right]_{z^{-1}}$ den Coëfficienten von z^{-1} in der Entwickelung des Bruchs $\frac{\Pi z}{Fz}$ nach fallenden Potenzen von z bedeutet, sogleich auf die Differentialgleichung:

$$\frac{\Pi x_1}{\sqrt{(fx_1)}}\partial x_1 + \frac{\Pi x_2}{\sqrt{(fx_2)}}\partial x_2 + \dots + \frac{\Pi x_n}{\sqrt{(fx_n)}}\partial x_n = \left[\frac{\Pi z}{Fz}\right]_{z^{-1}}\partial t,$$

aus welcher sich, aufser dem Systeme Differentialgleichungen (1.), noch folgende ergiebt:

$$4. \quad \frac{x_1^{n-1}\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \frac{x_2^{n-1}\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \dots + \frac{x_n^{n-1}\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}} = \partial t.$$

Nun hat Hr. Prof. *Jacobi* am angeführten Orte Seite 34 die schöne Bemerkung gemacht, dafs, wenn zwischen den Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ die Differentialgleichungen (1.) bestehn und α und β zwei Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ sind, das Integral

$$\int \left[\frac{fz}{(z-\alpha)(z-\beta)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}} \sqrt{(F\alpha.F\beta)}\,\partial t,$$

worin ∂t durch die Gleichung (4.) gegeben ist, dem algebraischen Ausdrucke

$$C + \sqrt{(F\alpha.F\beta)}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(x_1-\alpha)(x_1-\beta)F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{(x_2-\alpha)(x_2-\beta)F'x_2} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{(x_n-\alpha)(x_n-\beta)F'x_n}\right\}$$

gleich ist. Führt man das gewöhnliche Summenzeichen ein, so hat man daher unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichung

$$5. \quad \int \left[\frac{fz}{(z-\alpha)(z-\beta)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}} \sqrt{(F\alpha.F\beta)}\, \Sigma_1^n \left(\frac{x_h^n \partial x_h}{\sqrt{(fx_h)}}\right)$$
$$= \sqrt{(F\alpha.F\beta)}\, \Sigma_1^n \left(\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x_h-\alpha)(x_h-\beta)F'x_h}\right).$$

Nennt man die Werthe der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, welche sie für $t = t_0$ annehmen, resp. $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$, und setzt das Product

$$(x-x_1^0)(x-x_2^0)\dots(x-x_n^0) = F_0 x,$$

so erhält man aus (5.) folgende Gleichung:

$$\int_{t_0}^{t} \left[\frac{fz}{(z-\alpha)(z-\beta)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}} \sqrt{(F\alpha.F\beta)}\,\partial t$$
$$= \sqrt{(F\alpha.F\beta)}\, \Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x_h-\alpha)(x_h-\beta)F'x_h} - \sqrt{(F_0\alpha.F_0\beta)}\, \Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(x_h^0-\alpha)(x_h^0-\beta)F'x_h^0}.$$

Man sieht hienach leicht ein, dafs, wenn die Function fx den $2n$ten Grad nicht übersteigt, die algebraische Gleichung

$$\sqrt{(F\alpha.F\beta)}\, \Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x_h-\alpha)(x_h-\beta)F'x_h} = \text{const.}$$

dem System Differentialgleichungen (1.) Genüge leistet, indem dann die linke Seite der Gleichung (6.) verschwindet und das zweite Glied der rechten

Seite $= -$Const. gesetzt ist, da es von den n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ unabhängig ist. Man erhält daher folgendes

Theorem 1.

„Wenn α und β zwei Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ sind, welche „den $2n$ten Grad nicht überschreitet, so ist die Function

$$7.\quad „v = \sqrt{(F\alpha . F\beta)}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(x_1-\alpha)(x_1-\beta)F'x_1} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{(x_n-\alpha)(x_n-\beta)F'x_n}\right\}$$

„eine Auflösung der partiellen Differentialgleichung

$$8.\quad „\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = 0;“$$

was ich hier kurz auf directem Wege beweisen werde.

Beweis. Setzt man

$$fx = (x-\alpha)(x-\beta)\varphi x,$$

so geht die Formel (7.) in folgende über:

$$v = \sqrt{\left(\frac{F\alpha . F\beta}{(x_1-\alpha)(x_1-\beta)}\right)}\frac{\sqrt{(\varphi x_1)}}{F'x_1} + \sqrt{(F\alpha . F\beta)}\left\{\frac{\sqrt{(fx_2)}}{(x_2-\alpha)(x_2-\beta)F'x_2} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{(x_n-\alpha)(x_n-\beta)F'x_n}\right\}.$$

Hieraus erhält man sofort die Gleichung

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{F\alpha . F\beta}{(x_1-\alpha)(x_1-\beta)}\right)}\left(\frac{\partial \frac{\varphi x_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\right)\frac{F'x_1}{\sqrt{(\varphi x_1)}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{(F\alpha . F\beta)}\frac{\alpha+\beta-2x_1}{(x_1-\alpha)(x_1-\beta)}\left\{\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\cdot\frac{1}{(x_2-\alpha)(x_2-\beta)} + \dots\dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\cdot\frac{1}{(x_n-\alpha)(x_n-\beta)}\right\}$$

$$+\sqrt{(F\alpha . F\beta)}\left\{\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\cdot\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-\alpha)(x_2-\beta)} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\cdot\frac{1}{(x_n-x_1)(x_n-\alpha)(x_n-\beta)}\right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit

$$\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\cdot\frac{2}{\sqrt{(F\alpha . F\beta)}}$$

und zieht je zwei untereinanderstehende Glieder zusammen, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{2}{\sqrt{(F\alpha . F\beta)}}\cdot\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial \frac{\varphi x_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{(fx_1 fx_2)}}{(x_2-x_1)F'x_1 F'x_2}\left(\frac{1}{(x_1-\alpha)(x_2-\beta)} + \frac{1}{(x_1-\beta)(x_2-\alpha)}\right) - \dots$$

$$\dots - \frac{\sqrt{(fx_1 fx_n)}}{(x_n-x_1)F'x_1 F'x_n}\left(\frac{1}{(x_1-\alpha)(x_n-\beta)} + \frac{1}{(x_n-\alpha)(x_1-\beta)}\right).$$



Vertauscht man in dieser Formel der Reihe nach die Argumente x_2, x_3, ... x_n mit x_1, so hat man im Ganzen n Formeln, in deren Summe sich alle die negativen Glieder der zweiten Reihe gegen einander fortheben; also zuletzt die Gleichung

$$\frac{2}{\sqrt{(F\alpha F\beta)}}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{\partial\frac{\varphi x_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial\frac{\varphi x_2}{(F'x_2)^2}}{\partial x_2}\right)+\dots+\left(\frac{\partial\frac{\varphi x_n}{(F'x_n)^2}}{\partial x_n}\right),$$

deren zweiter Theil $=\left[\frac{\varphi z}{(Fz)^2}\right]_{z=\infty}$, mithin identisch $=0$ ist. So erhält man also sogleich die zu beweisende Gleichung (8.).

Nimmt man für α und β $n-1$ beliebige Paare der Wurzeln der Gleichung $fx=0$, so erhält man aus der Formel (7.) $n-1$ von einander unabhängige Lösungen.

3.

Man kann, um solche Systeme von $n-1$ Lösungen mit einander zu vergleichen, bekanntlich alle als Functionen der $n-1$ dem Anfangswerthe x_1^0 entsprechenden Anfangswerthe der übrigen Variabeln darstellen, welche bei einem jeden vollständigen Systeme Integralgleichungen des Systems Differentialgleichungen (1.) statt der willkürlichen Constanten eingeführt und aus einem derselben als Functionen der Variabeln bestimmt gedacht werden können. Es wird in verschiedenen Fällen für die Kürze des Calculs vortheilhafter sein, die eine oder die andere von den Annahmen

$$x_1^0=\infty,\qquad x_1^0=\infty,\qquad x_1^0=\alpha$$

zu machen oder x_1 gleich einer andern Wurzel der Gleichung $fx=0$ zu setzen, welche unter den zum System der Lösungen benutzten $n-1$ Paaren nicht vorkommt. In unserem vorliegenden Falle werden die $n-1$ Gröfsen x_2^0, x_3^0, ... x_n^0 als Functionen der n Argumente bestimmt, wenn man sie aus $n-1$ Gleichungen folgender Art eliminirt:

$$9.\quad \sqrt{(F\alpha F\beta)}\,\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x_h-\alpha)(x_h-\beta)F'x_h}=\sqrt{(F_0\alpha F_0\beta)}\,\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(x_h^0-\alpha)(x_h^0-\beta)F'x_h^0}.$$

Nimmt man z. B. an, dafs in allen $n-1$ Lösungen α dasselbe sei und setzt $x_1^0=\alpha$, so werden die Gleichungen die einfachere Form

$$10.\quad \sqrt{(F\alpha F\beta)}\,\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x_h-\alpha)(x_h-\beta)F'x_h}=\sqrt{\left\{\frac{f'\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\frac{(\beta-x_2^0)\dots(\beta-x_n^0)}{(\alpha-x_2^0)\dots(\alpha-x_n^0)}\right\}}$$

haben, während, wenn x_1^0 eine andere Wurzel der Gleichung $fx=0$ ist, die Form der Gleichungen folgende ist:

$$11.\quad \sqrt{(F\alpha.F\beta)}\,\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x_h-\alpha)(x_h-\beta)F'x_h}=\sqrt{(F_0\alpha.F_0\beta)}\,\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(x_h^0-\alpha)(x_h^0-\beta)F'x_h^0}.$$

Nimmt man für α und β zwei conjugirte imaginaire Wurzeln der Gleichung $fx=0$ an, so erhält die Auflösung des Theorems 1. eine reelle Form. Ist nemlich

$$\alpha = r(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$\beta = r(\cos\theta-i\sin\theta),$$

so geht die Formel (7.) in folgende über:

$$v=\left\{\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{F'x_h}\cdot\frac{1}{r^2-2rx_h\cos\theta+x_h^2}\right\}\sqrt{((r^2-2rx_1\cos\theta+x_1^2)\ldots.(r^2-2rx_n\cos\theta+x_n^2))},$$

und man kann daher, selbst wenn $fx=0$ lauter imaginaire conjugirte Wurzeln hat, $n-1$ reelle Lösungen aufstellen.

Nimmt man z. B. an, es sei

$$fx = 1-x^5,$$

wodurch man auf Eigenschaften des Integrals

$$\frac{(M+Nx)\partial x}{\sqrt{(1-x^5)}}$$

geführt wird, welches *Legendre* im 3ten Bande seiner „Théorie des fonctions elliptiques" behandelt hat, so erhält man, als eine allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$12.\quad \frac{\sqrt{(1-x_1^5)}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)+\frac{\sqrt{(1-x_2^5)}}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+\frac{\sqrt{(1-x_3^5)}}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)=0,$$

eine willkürliche Function zwischen den beiden Werthen des Ausdrucks

$$13.\quad \sqrt{\{(1+(1\pm\sqrt5)x_1+x_1^2)(1+(1\pm\sqrt5)x_2+x_2^2)(1+(1\pm\sqrt5)x_3+x_3^2)\}}$$
$$.\left\{\frac{\sqrt{(1-x_1^5)}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(1+(1\pm\sqrt5)x_1+x_1^2)}+\frac{\sqrt{(1-x_2^5)}}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)(1+(1\pm\sqrt5)x_2+x_2^2)}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{(1-x_3^5)}}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(1+(1\pm\sqrt5)x_3+x_3^2)}\right\}.$$

Uebrigens ergeben sich aus den Gleichungen (26.) und (27.) meiner oben angeführten Abhandlung in diesem Beispiele sofort folgende einfachere Lösungen:

$$14.\quad v_1=\left\{\frac{\sqrt{(1-x_1^5)}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{\sqrt{(1-x_2^5)}}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{\sqrt{(1-x_3^5)}}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right\}^2+x_1+x_2+x_3,$$

$$15.\quad v_2=\left\{\frac{x_2x_3\sqrt{(1-x_1^5)}}{x_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_3x_1\sqrt{(1-x_2^5)}}{x_2(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{x_1x_2\sqrt{(1-x_3^5)}}{x_3(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right\}^2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2;$$

Setzt man in der Auflösung (7.) $fx = \frac{(1-x^5)(\alpha-x)}{\alpha^2}$, und dann $\alpha = \infty$ und $\beta = 1$, so erhält man folgende Lösung:

$$16.\quad v_3 = \sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)]}\left\{\frac{\sqrt{(1-x_1^5)}}{(1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{\sqrt{(1-x_2^5)}}{(1-x_2)(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + \frac{\sqrt{(1-x_3^5)}}{(1-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right\}.$$

Nimmt man in diesen 5 Functionen (13), (14), (15) und (16)

$$x_1 = \infty, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad x_3 = x_3^0$$

an, so werden die folgenden Functionen von x_2^0 und x_3^0

$$\frac{1}{x_3^0 - x_2^0}\{\sqrt{(1+(1\mp\sqrt{5})x_2^0 + x_2^{0\,2})(1+(1\pm\sqrt{5})x_3^0 + x_3^{0\,2})}$$
$$-\sqrt{(1+(1\pm\sqrt{5})x_2^0 + x_2^{0\,2})(1+(1\pm\sqrt{5})x_3^0 + x_3^{0\,2})}\},$$
$$-(x_2^0 + x_3^0),$$
$$\left\{\frac{x_2^{0\,2}\sqrt{(1-x_2^{0\,6})} - x_3^{0\,2}\sqrt{(1-x_2^{0\,5})}}{x_2^0 x_3^0 (x_2^0 - x_3^0)}\right\}^2 - \left(\frac{1}{x_2^0} + \frac{1}{x_3^0}\right)^2$$

und

$$\sqrt{((1-x_2^0)(1+x_3^0))},$$

während x_2^0 und x_3^0 ist, aus den Gleichungen

$$v_1 = -(x_2^0 + x_3^0) \text{ und } v_3^2 = \sqrt{((1-x_2^0)(1-x_3^0))},$$

wenn man links die Werthe aus den Formeln (14) und (16) substituirt, als Functionen von x_1, x_2, x_3 bestimmt werden, welche der Gleichung (12) ebenfalls Genüge leisten.

4.

Auf eine ähnliche Weise, wie im §. 2., kann das Theorem, welches ich in §. 6. meiner angeführten Abhandlung aus dem *Abel*schen Theorem abgeleitet habe, direct bewiesen werden. Ich ziehe es jedoch vor, dasselbe auf folgende Weise darzuthun. In §. 3. der oben angeführten Abhandlung hat Hr. Prof. *Jacobi* durch directe Integration gezeigt, dafs, wenn α eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ ist, deren höchstes Glied den Coëfficienten A_m besitzt,

$$F\alpha\left\{\left(\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(x_1-\alpha)F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{(x_2-\alpha)F'x_2}\dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{(x_n-\alpha)F'x_n}\right)^2 - A_{2n}\right\} = \text{const.}$$

ebenfalls eine Integralgleichung des Systems (1) ist. Dividirt man daher den linken Theil derselben in das Quadrat der Lösung (7.), so erhält man folgende Auflösung der obigen partiellen Differentialgleichung:

$$v = \frac{F\beta\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(x_1-\alpha)(x_1-\beta)F'x_1}+\ldots\ldots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(x_n-\alpha)(x_n-\beta)F'x_n}\right\}^2}{\left(\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(x_1-\alpha)F'x_1}+\ldots\ldots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(x_n-\alpha)F'x_n}\right)^2-A_{2n}},$$

welche sich von der oben angeführten mutatis mutandis nur durch den constanten Factor $\frac{1}{\beta-\alpha}$ unterscheidet. Um zu sehen, als welche Function von den Anfangswerthen $x_2^\circ, x_3^\circ, \ldots\ldots x_n^\circ$, die zu $x_1^\circ = \alpha$ gehören, diese Auflösung sich darstellt, setze man dieselben hinein, so erhält man

$$v = \frac{(\beta-x_2^\circ)(\beta-x_3^\circ)\ldots\ldots(\beta-x_n^\circ)}{\beta-\alpha};$$

ebenso wie es sich aus den Formeln (42.) der angeführten Abhandlung ergiebt.

5.

Nachdem ich nun im Vorigen die schon früher mitgetheilten Auflösungen theils in modificirter Form vorgetragen, theils auf neue Art hergeleitet habe, schreite ich zu dem zweiten Theile meiner Untersuchung, in welchem ich durch directe Integration des obigen Systems (1.) solche allgemeine Systeme von Auflösungen der partiellen Differentialgleichung (2.) ableiten werde, bei welchen gar keine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ benutzt wird. Zu dem Ende bezeichne ich, wenn α eine *ganz beliebige* Zahl ist, das Product

$$17.\quad \sqrt{[(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots\ldots(\alpha-x_n)]} = \sqrt{(F\alpha)}$$

durch y und erhalte durch Differentiation nach t die Gleichung

$$18.\quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\tfrac{1}{2}y\left\{\frac{1}{\alpha-x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{1}{\alpha-x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t}\ldots\ldots+\frac{1}{\alpha-x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t}\right\},$$

welche mit Hinzuziehung der Gleichung (3) in folgende übergeht:

$$19.\quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\tfrac{1}{2}y\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(\alpha-x_1)F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{(\alpha-x_2)F'x_2}\ldots\ldots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(\alpha-x_n)F'x_n}\right\}.$$

worin fx wieder eine Function von einem beliebigen Grade bezeichnet. Durch fortgesetzte Differentiation erhält man aus (18) folgende Formel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = &-\tfrac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial t}\left\{\frac{1}{\alpha-x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}+\ldots\ldots+\frac{1}{\alpha-x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t}\right\}\\ &-\tfrac{1}{2}y\left\{\frac{1}{(\alpha-x_1)^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2+\ldots\ldots+\frac{1}{(\alpha-x_n)^2}\left(\frac{\partial x_n}{\partial t}\right)^2\right\}\\ &-\tfrac{1}{2}y\left\{\frac{1}{\alpha-x_1}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\alpha-x_n}\cdot\frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}\right\},\end{aligned}$$

welche mit Benutzung der Formel (3.) nach leichter Reduction die Form

$$20.\quad \frac{2}{y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(a-x_1)F'x_1}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(a-x_n)F'x_n}\right\}$$
$$-\frac{fx_1}{(a-x_1)^2(F'x_1)^2}-\dots-\frac{fx_n}{(a-x_n)^2(F'x_n)^2}$$
$$-\frac{1}{a-x_1}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}-\dots-\frac{1}{a-x_n}\cdot\frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

annimmt. Man leitet ferner aus den Gleichungen (3.) folgende Gleichung ab:

$$21.\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\right)+\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\left(\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}+\dots+\frac{1}{x_1-x_n}\cdot\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right),$$

aus welcher sich durch leichte Reduction diese ergiebt:

$$22.\quad \frac{1}{(a-x_1)}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(a-x_1)F'x_1}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(a-x_1)F'x_1}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(a-x_n)F'x_n}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a-x_1}-\frac{fx_1}{(a-x_1)^2(F'x_1)^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1\,fx_2)}}{(a-x_1)(a-x_2)F'x_1\,F'x_2}\cdot\frac{x+x_2-2a}{x_1-x_2}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_1\,fx_n)}}{(a-x_1)(a-x_n)F'x_1\,F'x_n}\cdot\frac{x_1+x_n-2a}{x_1-x_n}\right\}.$$

Man vertausche hierin x_2 mit x_1, x_3 mit x_1, ... x_n mit x_1, so erhält man im Ganzen n Gleichungen, in deren Summe sich die negativen Glieder der letzten Reihe auf der rechten Seite gegeneinander aufheben, so dafs man zu der Formel

$$\frac{1}{a-x_1}\cdot\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}+\dots+\frac{1}{a-x_n}\cdot\frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(a-x_1)F'x_1}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(a-x_n)F'x_n}\right\}^2$$
$$=+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a-x_1}\cdot\frac{\partial\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}+\dots+\frac{1}{a-x_n}\cdot\frac{\partial\frac{fx_n}{(F'x_n)^2}}{\partial x_1}\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{fx_1}{(a-x_1)^2(F'x_1)^2}+\dots+\frac{fx_n}{(a-x_n)^2(F'x_n)^2}\right\}$$

gelangt, welche, von der Gleichung (20.) abgezogen, folgendes Resultat liefert:

$$23.\quad \frac{2\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{y}{4}\left(\frac{fx_1}{(a-x_1)^2(F'x_1)^2}+\dots+\frac{fx_n}{(a-x_n)^2(F'x_n)^2}\right)$$
$$-\frac{y}{4}\left(\frac{1}{a-x_1}\cdot\frac{\partial\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}+\dots+\frac{1}{a-x_n}\cdot\frac{\partial\frac{fx_n}{(F'x_n)^2}}{\partial x_1}\right).$$

Aus der Theorie der Partialbrüche ist aber die Formel

$$24.\quad \frac{f\alpha}{(F\alpha)^2} = \left[\frac{fz}{(z-\alpha)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}}$$
$$+\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}\cdot\frac{1}{(\alpha-x_1)^2}+\dots+\frac{fx_n}{(F'x_n)^2}\cdot\frac{1}{(\alpha-x_n)^2}$$
$$+\frac{\partial\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\cdot\frac{1}{\alpha-x_1}+\dots+\frac{\partial\frac{fx_n}{(F'x_n)^2}}{\partial x_n}\cdot\frac{1}{\alpha-x_n}$$

bekannt, worin, wie sich aus der obigen Bezeichnung ergiebt, $\left[\frac{fx}{(z-\alpha)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}}$ die ganze Function von α bedeutet, die sich bei der Entwickelung des Bruches $\frac{f\alpha}{(F\alpha)^2}$ nach fallenden Potenzen von α ziegt. Substituirt man diese Formel in der Gleichung (23.), so erhält man die einfache Gleichung

$$25.\quad 2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{f\alpha}{2y^3}-\frac{y}{2}\left[\frac{fz}{(z-\alpha)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}} = 0.$$

Ich multiplicire dieselbe mit $4\partial y$, integrire und erhalte die Gleichung

$$26.\quad \text{Const.}+4\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{f\alpha}{y^2} = 2\int y\left[\frac{fz}{(z-\alpha)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}}\partial y,$$

oder auch, da y unabhängig von z und $\frac{fz}{z-\alpha}$ unabhängig von t ist,

$$\text{Const.}+4\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{f\alpha}{y^2} = \left|2\frac{fz}{z-\alpha}\int\frac{y\cdot\frac{\partial y}{\partial t}}{(Fz)^2}\partial t\right]_{z^{-1}}$$

und mit Hinzuziehung der Gleichung (17.) und (19.) folgendes

Theorem 2.

„Wenn fz eine beliebige ganze Function von z ist, und die Varia-„beln $x_1, x_2, \dots x_n$ dem Systeme Differentialgleichungen (1.) Genüge „leisten, ferner aber

$$y^2 = (\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\dots(\alpha-x_n) = F\alpha,$$
$$y_0^2 = (\alpha-x_1^0)(\alpha-x_2^0)\dots(\alpha-x_n^0) = F_0\alpha$$

„gesetzt wird, wo α eine ganz willkürliche Zahl ist, so ist das Integral

$$\int_{y_0}^{y}\left[\frac{fz}{(z-\alpha)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}} y\,\partial y$$

„gleich dem algebraischen Ausdrucke

$$27.\quad \frac{F\alpha}{2}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(\alpha-x_1)Fx_1}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(\alpha-x_n)F'x_n}\right\}^2-\frac{f\alpha}{2F\alpha}$$
$$-\frac{F_0\alpha}{2}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1^0)}}{(\alpha-x_1^0)F_0'x_1^0}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n^0)}}{(\alpha-x_n^0)F_0'x_n^0}\right\}^2+\frac{f\alpha}{2F_0\alpha}.\text{"}$$

Ist die Function fx vom $2n$ten Grade und ihr höchstes Glied $A_{2n}x^{2n}$, so ist

$$\left[\frac{fz}{(z-\alpha)(Fz)^2}\right]_{z^{-1}} = A_{2n}.$$

Es gehen dann die Gleichungen (25.) und (26.) in folgende über:

$$28.\quad 2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{f\alpha}{2y^3}-\frac{A_{2n}}{2}y = 0,$$

$$29.\quad 4\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{f\alpha}{y^2}-A_{2n}y^2 = \text{Const.},$$

und man erhält auf ähnliche Weise folgendes

Theorem 3.

„Die Gleichung

$$30.\quad \text{„Const.} = F\alpha\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(\alpha-x_1)F'x_1}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(\alpha-x_n)F'x_n}\right\}^2-\frac{f\alpha}{F\alpha}-A_{2n}F\alpha,$$

„in welcher α eine ganz beliebige Zahl bezeichnet, ist, wenn

$$\text{„}fx = A_0+A_1x+\dots+A_{2n}x^{2n}$$

„gesetzt wird, eine dem System Differentialgleichungen (1.) genügende In-„tegralgleichung, oder die Function

$$31.\quad \text{„}v = F\alpha\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{(\alpha-x_1)F'x_1}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(\alpha-x_n)F'x_n}\right\}^2-\frac{f\alpha}{F\alpha}-A_{2n}F\alpha$$

„ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.)." Ich werde Letzteres noch kurz direct beweisen.

Setzt man der Kürze halber $\psi x = (x-\alpha)Fx$ und benutzt das Summenzeichen, so erhält man aus der Gleichung (31.) folgende:

$$v = -\frac{f\alpha}{F\alpha}-A_{2n}F\alpha+F\alpha\left\{\Sigma\frac{\sqrt{(fx_h)}}{\psi'x_h}\right\}^2,$$

und aus dieser durch partielle Differentiation diese:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) = \frac{f\alpha}{(x_1-\alpha)F\alpha}-\frac{A_{2n}F\alpha}{x_1-\alpha}+2F\alpha\left(\frac{\partial\frac{\sqrt{(fx_1)}}{\psi'x_1}}{\partial x_1}\right)\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{\psi'x_h}$$
$$+F\alpha\left(\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{\psi'x_h}\right)\left\{\frac{2\sqrt{(fx_2)}}{(x_2-x_1)\psi'x_2}+\dots+\frac{2\sqrt{(fx_n)}}{(x_n-x_1)\psi'x_n}+\frac{1}{x_1-\alpha}\Sigma_2^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{\psi'x_h}\right\}.$$

Multiplicirt man dieselbe mit $\frac{(x_1-\alpha)\sqrt{(fx_1)}}{\psi'x_1}\cdot\frac{1}{F\alpha\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{\psi'x_h}}$, so reducirt sie

sich, indem

$$2\frac{\sqrt{(fx_1)}}{\psi' x_1}\cdot\left(\frac{\partial\frac{\sqrt{(fx_1)}}{\psi' x_1}}{\partial x_1}\right) = \frac{fx_1}{(F'x_1)^2}\cdot\frac{1}{(a-x_1)^2} - \left(\frac{\partial\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\right)\frac{1}{a-x_1}$$

ist, auf die Gleichung

$$\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\left\{\frac{1}{Fa}\cdot\frac{1}{\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{\psi' x_h}}\right\}$$

$$= \left(\frac{fa}{(Fa)^2}-A_{2n}\right)\frac{\sqrt{(fx_1)}}{\psi' x_1}\cdot\frac{1}{\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{\psi' x_h}} - \frac{fx_1}{(F'x_1)^2}\cdot\frac{1}{(a-x_1)^2} - \left(\frac{\partial\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\right)\frac{1}{a-x_1}$$

$$-\frac{\sqrt{(fx_1.fx_2)}}{\psi' x_1\psi' x_2}\cdot\frac{x_1+x_2-2a}{x_1-x_2} - \frac{\sqrt{(fx_1 fx_3)}}{\psi' x_1\psi' x_3}\cdot\frac{x_1+x_3-2a}{x_1-x_3}\cdots\frac{\sqrt{(fx_1 fx_n)}}{\psi' x_1\psi' x_n}\cdot\frac{x_1+x_n-2a}{x_1-x_n}.$$

Vertauscht man hierin wieder x_2 mit x_1, oder x_3 mit x_1 etc. und addirt die n Resultate, so heben sich die negativen Glieder der letzten Reihen auf der rechten Seite gegen einander zu je zweien auf, und die ersten bilden die identische Gleichung

$$\frac{fa}{(Fa)^2} - A_{2n} - \Sigma_1^n\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}\cdot\frac{1}{(a-x_1)^2} - \Sigma_1^n\frac{\partial\frac{fx_1}{(F'x_1)^2}}{\partial x_1}\cdot\frac{1}{a-x_1},$$

während die Glieder links auf die zu beweisende Gleichung

$$\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = 0$$

führen.

6.

Giebt man der beliebigen Zahl a $n-1$ verschiedene Werthe a_1, $a_2, \ldots a_{n-1}$, so sieht man, dafs die $n-1$ aus (31.) dadurch hervorgehenden Ausdrücke ein vollständiges System von $n-1$ Lösungen der Gleichung (2.) liefern. Man erhält jedoch auch andere solche Systeme, wenn man den Ausdruck (31.) nach a partiell differentiirt und dann dem a einen beliebigen Werth giebt. Um die daraus hervorgehenden Resultate kurz darzustellen, werde ich die Summen der Combinationen ohne Wiederholung zwischen den Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $C_1, C_2, \ldots C_n$ bezeichnen, die Summe der Combinationen mit Wiederholung zwischen den Argumenten

$$\frac{1}{x_1},\ \frac{1}{x_2},\ \ldots\ \frac{1}{x_n},$$

durch $K_{-1}, K_{-2}, \ldots K_{-n}$ etc. und durch K_1, K_2 etc. die Summen der Com-

binationen mit Wiederholung zwischen den Argumenten x_1, x_2, x_n. Indem ich ferner

$$\Sigma_\lambda = \frac{x_1^\lambda \sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} + \frac{x_2^\lambda \sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} + \dots + \frac{x_n^\lambda \sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}$$

setze, bezeichne ich für nicht negative ganze Werthe von μ das Aggregat

$$\Sigma_0 \Sigma_\mu + \Sigma_1 \Sigma_{\mu-1} + \dots + \Sigma_\mu \Sigma_0 \quad \text{durch} \quad S_\mu$$

und das Aggregat

$$\Sigma_{-1} \Sigma_{-(\mu+1)} + \Sigma_{-2} \Sigma_{-\mu} + \dots + \Sigma_{-(\mu+1)} \Sigma_{-1} \quad \text{durch} \quad S_{-(\mu+2)}.$$

Setzt man nun in der Auflösung (31.) und ihren Abgeleiteten nach α, $\alpha = 0$, so erhält man folgende Lösungen der Gleichung (2.):

$$C_n S_{-2} - \frac{A_0}{C_n} - C_n A_{2n},$$

$$C_n S_{-3} - C_{n-1} S_{-2} - \frac{A_0 K_{-1} + A_1}{C_n} + C_{n-1} A_{2n},$$

. . . .

$$C_n S_{-h} - C_{n-1} S_{-(h-1)} \dots \pm C_{n-h+2} S_{-2} - \frac{A_0 K_{-(h-2)} + \dots + A_{h-2}}{C_n} \pm C_{n-h+2} A_{2n}.$$

Setzt man hingegen $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ in (31.), multiplicirt mit α^n und setzt im Resultate, wie in seinen Abgeleiteten nach α, $\alpha = 0$, so erhält man folgende Lösungen:

$$S_0 - A_{2n-1} K_1 - A_{2n}(K_2 + C_2),$$

$$S_1 - S_0 C_1 - A_{2n-2} K_1 - A_{2n-1} K_2 - A_{2n}(K_3 - C_3),$$

. . . .

$$S_h - S_{h-1} C_1 + \dots \pm S_0 C_h - A_{2n-h-1} K_1 - A_{2n-h} K_2 - A_{2n} K_{h+2} \mp A_{2n} C_{h+2}$$

Die erste derselben ist die in meiner oben angeführten Abhandlung in der Formel (26.) enthaltene, denn es ist

$$K_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$K_2 + C_2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2,$$

$$S_0 = \Sigma_0 \Sigma_0 = \left(\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right)^2,$$

also die Lösung

$$\left(\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right)^2 - A_{2n-1}(x_1 + x_2 \dots + x_n)$$
$$- A_{2n}(x_1 + x_2 \dots + x_n)^2;$$

wie am angeführten Orte. Die erste Auflösung der vorigen Reihe giebt folgende einfache Lösung:

$$x_1 x_2 \dots x_n \left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{x_1 F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{x_2 F'x_2} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{x_n F'x_n}\right\}^2 - \frac{A_0}{x_1 x_2 \dots x_n} - A_{2n} x_1 x_2 \dots x_n.$$

Endlich schliefst man aus der Form der Gleichung (2.), mit Hülfe der Substitutionen

$$x_1 = \frac{1}{\xi_1}, \quad x_2 = \frac{1}{\xi_2}, \quad \dots\dots \quad x_n = \frac{1}{\xi_n},$$

indem die Gleichung dadurch in folgende übergeht:

$$\frac{\sqrt{(f_1\xi_1)}}{F'\xi_1}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\sqrt{(f_1\xi_2)}}{F'\xi_2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi_2}\right) + \dots + \frac{\sqrt{(f_1\xi_n)}}{F'\xi_n}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi_n}\right) = 0,$$

wo

$$f_1\xi = A_{2n} + A_{2n-1}\xi + A_{2n-2}\xi^2 + \dots + A_0\xi^{2n}$$

gesetzt ist, sehr leicht, dafs, wenn die Function

$$\Phi(x_1, x_2, \dots x_n, A_0, A_1, \dots A_{2n})$$

eine ihrer Lösungen ist, auch

$$\Phi\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots \frac{1}{x_n}, A_{2n}, A_{2n-1}, \dots A_0\right)$$

eine Lösung sein wird. Wendet man diese Bemerkung beim Theorem 3. an, und setzt aufserdem $\alpha = \frac{1}{\beta}$, so erhält man folgendes

Theorem 4.

„Wenn β eine beliebige Zahl und $fx = A_0 + A_1 x + \dots + A_{2n} x^{2n}$ ist, „so ist der Ausdruck

$$„\beta^2\psi'\beta . x_1 x_2 \dots x_n \left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{x_1^2\psi'x_1} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{x_n^2\psi'x_n}\right\}^2 - \frac{x_1 x_2 \dots x_n . f\beta}{\psi'\beta} - \frac{A_0\psi'\beta}{x_1 x_2 \dots x_n},$$

„wo

$$„\psi x = (x-\beta)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

„gesetzt wird, eine Auflösung der partiellen Differentialgleichung (2.)."

Es lassen sich aus diesem Satze, dessen directer Beweis den obigen ganz ähnlich ist, verschiedene Lösungen durch die Entwickelung dieses Ausdrucks nach steigenden oder fallenden Potenzen von β ableiten. Z. B. der Coëfficient von β^2 in der Entwickelung nach steigenden Potenzen giebt die Lösung

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^2 \left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{x_1^2\psi'x_1} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{x_n^2\psi'x_n}\right\}^2 - A_2 - A_1\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots \frac{1}{x_n}\right)$$
$$- A_0\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)^2,$$

welche von der in der Formel (28.) meiner obigen Abhandlung enthaltenen nur um die Constante $-A_2$ abweicht.

Alle diese verschiedenen Lösungen werden sogleich als Functionen derselben $n-1$ Lösungen dargestellt, wenn man als die letzteren die zu

einem beliebig angenommenen Werthe von $x_1 = x_1^0$ gehörigen Anfangswerthe x_2^0, x_3^0, ... x_n^0 annimmt. Man setze nämlich eine jede der Lösungen respective gleich einer eben solchen Function der Gröfsen x_1^0, x_2^0, ... x_n^0, wie oben auseinandergesetzt ist, so erhält man z. B. aus dem Theorem 3. die Gleichung

$$32. \quad F\alpha\left(\Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha - x_h)F'x_h}\right)^2 - \frac{f\alpha}{F\alpha} - A_{2n}F\alpha$$
$$= F_0\alpha\left(\Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(\alpha - x_h^0)F'x_h^0}\right)^2 - \frac{f\alpha}{F_0\alpha} - A_{2n}F_0\alpha$$

als solche, die zwischen den Anfangs- und Endwerthen der dem System Differentialgleichungen (1.) genügenden Variabeln besteht.

7.

Es wird nicht uninteressant sein, eben so wie ich es in meiner früheren Abhandlung mit zwei Integralgleichungen des obigen Systems gethan habe, die im Theorem 3. enthaltene neue Integralgleichung aus dem *Abel*schen Theorem abzuleiten. Zu dem Ende beziehe ich mich auf folgenden Satz, welcher sich aus dem genannten Theorem unmittelbar ergiebt.

Wenn die Gröfsen

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_n,$$
$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \dots \quad x_n^0$$

den Gleichungen

$$33. \quad \begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = \sqrt{(fx_1)}, \\ a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_n x_2^n = \sqrt{(fx_2)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = \sqrt{(fx_n)}, \\ a_0 + a_1 x_1^0 + \dots + a_n x_1^{0n} = -\sqrt{(fx_1^0)}, \\ a_0 + a_1 x_2^0 + \dots + a_n x_2^{0n} = -\sqrt{(fx_2^0)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n^0 + \dots + a_n x_1^{0n} = -\sqrt{(fx_n^0)}, \end{cases}$$

in welchen die ersten n Wurzelzeichen beliebig *positiv* oder *negativ*, die letzten n Wurzelzeichen jedoch den ersten respective gleich angenommen werden sollen, Genüge leisten, also zugleich die Wurzeln der Gleichung

$$34. \quad 0 = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 - fx$$

sind, so bestehen zwischen ihnen auch die transcendenten Gleichungen

$$\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\partial x}{\sqrt{(fx)}}+\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{\partial x}{\sqrt{(fx)}}+\dots+\int_{x_n^0}^{x_n}\frac{\partial x}{\sqrt{(fx)}} = 0.$$

$$\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{x\partial x}{\sqrt{(fx)}}+\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{x\partial x}{\sqrt{(fx)}}+\dots+\int_{x_n^0}^{x_n}\frac{x\partial x}{\sqrt{(fx)}} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{x^{n-2}\partial x}{\sqrt{(fx)}}+\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{x^{n-2}\partial x}{\sqrt{(fx)}}+\dots+\int_{x_n^0}^{x_n}\frac{x^{n-2}\partial x}{\sqrt{(fx)}} = 0,$$

oder sie sind die Anfangs- und Endwerthe für die n Variabeln, welche dem System Differentialgleichungen (1.) genügen.

Entwickelt man nun die Ausdrücke

$$\frac{a_0+a_1x+\dots a_nx^n}{Fx}-a_n,$$

$$\frac{a_0+a_1x+\dots a_nx^n}{F_0x}-a_n,$$

in Partialbrüche, und benutzt dabei die Gleichungen (33.), so erhält man die beiden Formeln:

$$\frac{a_0+a_1x\dots+a_nx^n}{Fx}-a_n = \frac{\sqrt{(fx_1)}}{(x-x_1)F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{(x-x_2)F'x_2}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{(x-x_n)F'x_n},$$

$$-\frac{a_0+a_1x\dots+a_nx^n}{F_0x}+a_n = \frac{\sqrt{(fx_1^0)}}{(x-x_1^0)F'x_1^0}+\frac{\sqrt{(fx_2^0)}}{(x-x_2^0)F'x_2^0}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n^0)}}{(x-x_n^0)F'x_n^0};$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$a_0+a_1x+\dots a_nx^n = \varphi x$$

setzt und das Summenzeichen benutzt:

$$35.\quad\begin{cases}\dfrac{\varphi x}{Fx}-a_n = +\Sigma_1^n\dfrac{\sqrt{(fx_h)}}{(x-x_h)F'x_h},\\[2ex] \dfrac{\varphi x}{F_0x}-a_n = -\Sigma_1^n\dfrac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(x-x_h^0)F'x_h^0}.\end{cases}$$

Erhebt man die beiden Gleichungen aufs Quadrat, multiplicirt die erste dann mit Fx, die zweite mit F_0x, und zieht die Producte von einander ab, so erhält man die Gleichung

$$36.\quad \frac{(\varphi x)^2}{Fx}+a_n^2Fx-\frac{(\varphi x)^2}{F_0x}-a_n^2F_0x$$

$$= Fx\left(\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x-x_h)F'x_h}\right)^2-F_0x\left(\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(x-x_h^0)F_0'x_h^0}\right)^2.$$

Die Gleichung (34.) giebt aber, da ihre rechte Seite durch Fx und F_0x theilbar ist, die für ein beliebiges x geltenden Formeln

$$36.\quad \begin{cases} \dfrac{(\varphi x)^2}{Fx} - \dfrac{fx}{Fx} = (\alpha_n^2 - A_{2n}) F_0 x, \\[2ex] \dfrac{(\varphi x)^2}{F_0 x} - \dfrac{fx}{F_0 x} = (\alpha_n^2 - A_{2n}) Fx, \end{cases}$$

deren Differenz folgende Gleichung liefert:

$$\frac{(\varphi x)^2}{Fx} + \alpha_n^2 Fx - \frac{(\varphi x)^2}{F_0 x} - \alpha_n^2 F_0 x = \frac{fx}{Fx} + A_{2n} Fx - \frac{fx}{F_0 x} - A_{2n} F_0 x.$$

Substituirt man dieselbe in die Gleichung (36.), so zeigt sich, dafs der Ausdruck

$$Fx\left(\Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x-x_h)F'x_h}\right)^2 - \frac{fx}{Fx} - A_{2n} Fx$$

einem analogen Ausdrucke, in welchem statt der Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ ihre Anfangswerthe substituirt sind, gleich, und dafs also für ein beliebiges x die Gleichung

$$Fx\left(\Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(x-x_h)F'x_h}\right)^2 - \frac{fx}{Fx} - A_{2n} Fx = \text{Const.}$$

eine algebraische, dem System Differentialgleichungen (1.) genügende Integralgleichung ist; q. e. i.

8.

Herr Professor *Jacobi* hat die am angeführten Orte mitgetheilte Integrationsmethode als einen neuen Beweis des *Abel*schen Theorems betrachtet. Ich werde im Folgenden, dieser Idee gemäfs, aus dem System Differentialgleichungen (1.) verschiedene Formen des *Abel*schen Theorems durch passende Integrationen ableiten. Zu dem Ende gehe ich auf die Differentialgleichung der zweiten Ordnung (28.) zurück, welche aus dem obigen Systeme entspringt. Nimmt man eine, eben wie α, ganz beliebige Zahl β an, und setzt, statt wie oben

$$y = \sqrt{[(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots(\alpha-x_n)]} = \sqrt{(F\alpha)},$$

hier

$$37.\quad z = \sqrt{[(\beta-x_1)(\beta-x_2)\ldots(\beta-x_n)]} = \sqrt{(F\beta)},$$

wozu die aus (19.) sich ergebenden Formeln

$$38.\quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\tfrac{1}{2} y\, \Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)F'x_h}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = -\tfrac{1}{2} z\, \Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\beta-x_h)F'x_h}$$

gehören, so liefert die frühere Analysis die beiden Differentialgleichungen

$$39.\quad 2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{f\alpha}{2y^3} - \frac{A_{2n}}{2} y = 0, \qquad 2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{f\beta}{2z^3} - \frac{A_{2n}}{2} z = 0.$$

Multiplicirt man die erste mit $4z\left(z\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial z}{\partial t}\right)$, die zweite mit $4y\left(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}\right)$ und addirt die Producte, so erhält man die Gleichung:

$$8\left(z\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)-2f\alpha\frac{yz\frac{\partial z}{\partial t}-z^2\frac{\partial y}{\partial t}}{y^3}-2f\beta\frac{zy\frac{\partial y}{\partial t}-y^2\frac{\partial z}{\partial t}}{z^3}=0,$$

deren erster Theil ein exactes Differential ist, so dafs sie die Integralgleichung

$$4\left(z\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-f\alpha\frac{z^2}{y^2}-f\beta\frac{y^2}{z^2}=\text{Const.}$$

giebt, welche mit Hinzuziehung der Formeln (37.) und (38.) *auf folgende neue algebraische Integralgleichung des Systems* (1.) führt:

$$40.\quad (\alpha-\beta)^2 F\alpha.F\beta\left(\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(\beta-x_h)F'x_h}\right)^2-f\alpha.\frac{F\beta}{F\alpha}-f\beta.\frac{F\alpha}{F\beta}=\text{Const.},$$

deren linke Seite zugleich eine Lösung der Differentialgleichung (2.) ist.*) Man leitet dieselbe aus dem *Abel*schen Theorem ab, wenn man in die Gleichungen (35.) und (36.) α und β statt x substituirt, woraus sich durch leichte Reductionen folgende Gleichungen ergeben:

$$41.\quad\begin{cases}\left(\frac{\varphi\alpha}{F\alpha}-\frac{\varphi\beta}{F\beta}\right)^2=+(\alpha-\beta)^2\left(\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(\beta-x_h)F'x_h}\right)^2,\\ \left(\frac{\varphi\alpha}{F_0\alpha}-\frac{\varphi\beta}{F_0\beta}\right)^2=+(\alpha-\beta)^2\left(\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(\alpha-x_h^0)(\beta-x_h^0)F_0'x_h^0}\right)^2,\end{cases}$$

$$42.\quad\begin{cases}\frac{F\beta(\varphi\alpha)^2}{F\alpha}-\frac{F\beta.f\alpha}{F\alpha}=(a_n^2-A_{2n})F_0\alpha.F\beta,\\ \frac{F\alpha(\varphi\beta)^2}{F\beta}-\frac{F\alpha.f\beta}{F\beta}=(a_n^2-A_{2n})F_0\beta.F\alpha,\\ \frac{F_0\beta(\varphi\alpha)^2}{F_0\alpha}-\frac{F_0\beta.f\alpha}{F_0\alpha}=(a_n^2-A_{2n})F_0\beta.F\alpha,\\ \frac{F_0\alpha(\varphi\beta)^2}{F_0\beta}-\frac{F_0\alpha.f\beta}{F_0\beta}=(a_n^2-A_{2n})F_0\alpha.F\beta.\end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (41.) respective mit $F\alpha.F\beta$ und $F_0\alpha.F_0\beta$, und zieht die Producte von einander ab, so erhält man die Gleichung

$$(\alpha-\beta)^2F\alpha.F\beta\left\{\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(\beta-x_h)F'x_h}\right\}^2-(\alpha-\beta)^2F_0\alpha.F_0\beta\left\{\Sigma_1^n\frac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(\alpha-x_h^0)(\beta-x_h^0)F_0'x_h^0}\right\}^2$$
$$=\frac{F\beta.(\varphi\alpha)^2}{F\alpha}+\frac{F\alpha.(\varphi\beta)^2}{F\beta}-\frac{F_0\beta.(\varphi\alpha)^2}{F_0\alpha}-\frac{F_0\alpha.(\varphi\beta)^2}{F_0\beta},$$

*) Multiplicirt man diese Lösung mit $\frac{1}{\beta^n}$ und setzt dann $\beta=\infty$, so ergiebt sich daraus die des 3ten Theorems.

deren rechte Seite, der Gleichungen (42.) halber, in folgende übergeht:

$$= \frac{F\beta . f\alpha}{F\alpha} + \frac{F\alpha . f\beta}{F\beta} - \frac{F_0\beta . f\alpha}{F_0\alpha} - \frac{F_0\alpha . f\beta}{F_0\beta};$$

wodurch es klar wird, dafs der Ausdruck

$$(\alpha-\beta)^2 F\alpha . F\beta \left(\Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(\beta-x_h)F'x_h}\right)^2 - \frac{F\beta . f\alpha}{F\alpha} - \frac{F\alpha . f\beta}{F\beta}$$

einem analogen Ausdrucke für die Argumente $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ gleich, also constant wird, q. e. d.

Man leitet aber aus der Gleichung (40.) auch sogleich einen besondern Fall des *Abel*schen Theorems ab, wenn man die Constante durch die Anfangswerthe ausdrückt und dazu annimmt, dafs β einer Wurzel der Gleichung $fx = 0$ gleich sei, während $x_1^0 = \beta + \varepsilon$ gesetzt und dann der Werth der Constanten für $\varepsilon = 0$ bestimmt wird. Es geht dadurch die Gleichung, welche

$$= (\alpha-\beta)^2 F_0\alpha . F_0\beta \left(\Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h^0)}}{(\alpha-x_h^0)(\beta-x_h^0)F_0'x_h^0}\right)^2 - \frac{F_0\beta . f\alpha}{F_0\alpha} - \frac{F_0\alpha . f\beta}{F_0\beta}$$

war, in den Ausdruck $= -\frac{F_0\alpha . f'\beta}{F_0'\beta}$ über, und es wird aus (40.) folgende andere Gleichung leicht abgeleitet:

$$(\alpha-\beta)^2 \left\{F\alpha . \Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(\beta-x_h)F'x_h}\right\}^2 - f\alpha = -\frac{f'\beta}{F\beta . F_0'\beta} . F\alpha . F_0\alpha.$$

Dieselbe zeigt, dafs die Gröfsen

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots & x_n \\ \beta, & x_2^0, & \ldots & x_n^0, \end{matrix}$$

die Wurzeln einer Gleichung sind, deren Form

$$43. \quad (\alpha-\beta)^2 (a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1})^2 - f\alpha = 0$$

in der Gleichung des *Abel*schen Theorems enthalten ist.

Nimmt man, ähnlich den Gröfsen y und z, noch eine dritte an:

$$44. \quad \omega = \sqrt{[(\gamma-x_1)(\gamma-x_2)\ldots(\gamma-x_n)]} = \sqrt{(F\gamma)},$$

wo γ eine beliebige Zahl ist, so hat man die Formel

$$45. \quad \frac{\partial\omega}{\partial t} = -\tfrac{1}{2}\omega\, \Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\gamma-x_h)F'x_h}$$

und die drei Differentialgleichungen

$$46. \quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \dfrac{f\alpha}{2y^3} - \dfrac{A_{2n}}{2} y = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \dfrac{f\beta}{2z^3} - \dfrac{A_{2n}}{2} z = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \dfrac{f\gamma}{2\omega^3} - \dfrac{A_{2n}}{2} \omega = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus (1.) und (3.) und (2.) und (3.) die Gröfse A_{2n}, so erhält man die Gleichungen

$$47. \quad 2\left(\omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\right) - \frac{y f\gamma}{2\omega^3} + \frac{\omega f\alpha}{2y^3} = 0,$$

$$48. \quad 2\left(\omega \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\right) - \frac{z f\gamma}{2\omega^3} + \frac{\omega f\beta}{2z^3} = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$Y = \left\{2\left(\omega \frac{\partial y}{\partial t} - y \frac{\partial \omega}{\partial t}\right) \pm \frac{y}{\omega} \sqrt{(f\gamma)}\right\}^2 - \frac{\omega^2}{y^2} f\alpha,$$

so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 2\left\{2\left(\omega\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial \omega}{\partial t}\right) \pm \frac{y}{\omega}\sqrt{(f\gamma)}\right\}\left\{2\left(\omega\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\right) \pm \frac{\omega\partial y - y\partial\omega}{\omega^2 \partial t}\sqrt{(f\gamma)}\right\}$$
$$+ 2\frac{(\omega\partial y - y\partial\omega)\,\omega f\alpha}{y^3 \partial t}.$$

Substituirt man hierin den aus der Gleichung (47.) folgenden Werth von $2\left(\frac{\omega\partial^2 y - y\partial^2\omega}{\partial t^2}\right)$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \pm 4\left(\frac{\omega\partial y - y\partial\omega}{\partial t}\right)^2 \sqrt{(f\gamma)} + 2\left(\frac{\omega\partial y - y\partial\omega}{\partial t}\right)\left\{\frac{y f\gamma}{\omega^3} - \frac{\omega f\alpha}{y^3}\right\}$$
$$\pm \frac{y}{\omega}\left(\frac{y f\gamma}{\omega^3} - \frac{\omega f\alpha}{y^3}\right)\sqrt{(f\gamma)} + 2\left(\frac{\omega\partial y - y\partial\omega}{\partial t}\right)\frac{\omega f\alpha}{y^3},$$

welche die einfache Relation

$$\frac{\partial Y}{Y} = \pm \frac{\sqrt{(f\gamma)}}{\omega^2}\partial t$$

hervorruft. Setzt man nun ebenso

$$Z = \left(2\frac{\omega\partial z - z\partial\omega}{\partial t} \pm \frac{z}{\omega}\sqrt{(f\gamma)}\right)^2 - \frac{\omega^2}{z^2} f\beta,$$

so erhält man auf dieselbe Weise

$$\frac{\partial Z}{Z} = \pm \frac{\sqrt{(f\gamma)}}{\omega^2}\partial t$$

und daher die Gleichung

$$\frac{\partial Y}{Y} - \frac{\partial Z}{Z} = 0,$$

deren Integration die Differentialgleichung erster Ordnung

$$49.\quad \frac{Z}{Y} = \frac{\left(2\,\frac{\omega\partial z - z\partial\omega}{\partial t} \pm \frac{z}{\omega}\sqrt{(f\gamma)}\right)^2 - \frac{\omega^2}{z^2}f\beta}{\left(2\,\frac{\omega\partial y - y\partial\omega}{\partial t} \pm \frac{y}{\omega}\sqrt{(f\gamma)}\right)^2 - \frac{\omega^2}{y^2}f\alpha} = \text{Const.}$$

liefert. Andrerseits hat man aus (38.) und (45.) die Formeln

$$2\left(\frac{\omega\partial y - y\partial\omega}{\partial t}\right) = \sqrt{(F\alpha\,F\gamma)}\,\Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}\,(\alpha-\gamma)}{(\alpha-x_h)(\gamma-x_h)F'x_h},$$

$$2\left(\frac{\omega\partial z - z\partial\omega}{\partial t}\right) = \sqrt{(F\beta\,F\gamma)}\,\Sigma_1^n \frac{\sqrt{(fx_h)}\,(\beta-\gamma)}{(\beta-x_h)(\gamma-x_h)F'x_h},$$

und deren Substitution in der Formel (49.) giebt folgendes

Theorem 5.

„Wenn α, β, γ drei beliebige Zahlen sind, so ist die algebraische „Gleichung

$$„50.\quad \left(\frac{F\alpha}{F\beta}\right)\frac{\left\{F\beta\,\Sigma_1^n\left(\frac{(\beta-\gamma)\sqrt{(fx_h)}}{(\beta-x_h)(\gamma-x_h)F'x_h}\right) \pm \frac{\sqrt{(f\gamma)}}{F\gamma}\right\}^2 - f\beta}{\left\{F\alpha\,\Sigma_1^n\left(\frac{(\alpha-\gamma)\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(\gamma-x_h)F'x_h}\right) \pm \frac{\sqrt{(f\gamma)}}{F\gamma}\right\}^2 - f\alpha} = \text{Const.}$$

„eine Integralgleichung des Systems (1.), oder ihre Seite links eine Lö- „sung der Gleichung (2.)."

Drückt man die Constante durch die Anfangswerthe

$$x_1^0 = \gamma, \quad x_2^0, \quad x_3^0, \ldots\ldots x_n^0$$

aus, und nimmt noch dazu an, dafs die Wurzelzeichen $\sqrt{(fx_1)}$ und $\sqrt{(f\gamma)}$ beide zugleich positiv oder beide negativ seien und die oberen Zeichen gelten, so wird die Constante folgende Form annehmen:

$$\text{Const.} = \frac{(\beta-x_1^0)(\beta-x_2^0)\ldots\ldots(\beta-x_n^0)}{(\alpha-x_1^0)(\alpha-x_2^0)\ldots\ldots(\alpha-x_n^0)}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Gleichung (50.), so lehrt dieselbe, dafs das Verhältnifs

$$\frac{(\alpha-x_1^0)^2(F\alpha)^2\left(\Sigma_1^n\left(\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(x_1^0-x_h)F'x_h}\right) + \frac{\sqrt{(fx_1^0)}}{(\alpha-x_1^0)Fx_1^0}\right)^2 - f\alpha}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots\ldots(\alpha-x_n)(\alpha-x_1^0)(\alpha-x_2^0)\ldots\ldots(\alpha-x_n^0)}$$

von der Gröfse α unabhängig ist und, da der erste Theil des Zählers ein vollständiges Quadrat einer ganzen Function vom $n$ten Grade in Bezug auf α bildet, dafs die Gröfsen

$$x_1,\; x_2,\; x_3,\; \ldots\ldots x_n,$$
$$x_1^0,\; x_2^0,\; x_3^0,\; \ldots\ldots x_n^0,$$

von denen die n ersten dem System Differentialgleichungen genügen und die n letzten ihre Anfangswerthe sind, die $2n$ Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$(a_0 + a_1 \alpha + \ldots + a_n \alpha^n)^2 - f\alpha = 0$$

werden. Dieses ist aber der Hauptfall des *Abel*schen Theorems. Man kann auch durch passende Bestimmung der Constanten für das andere Zeichen in der Formel (50.) das *Abel*sche Theorem herleiten; dann bedeutet jedoch γ nicht mehr einen Anfangswerth von x.

Ich will diese Abhandlung mit der Bemerkung schliefsen, dafs man aus der Integralgleichung (50.), indem α, β und γ beliebig sind, unzählige andere ableiten kann. Ich will einige davon anführen. Setzt man $\alpha = \infty$, so erhält man die Integralgleichung

$$\frac{F\beta\left\{\Sigma_1^n\left(\frac{(\beta-\gamma)\sqrt{(fx_h)}}{(\beta-x_h)(\gamma-x_h)F'x_h}\right) \pm \frac{\sqrt{(f\gamma)}}{F\gamma}\right\}^2 - \frac{f\beta}{F\beta}}{\left\{\Sigma_1^n\left(\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\gamma-x_h)F'x_h}\right) \pm \frac{\sqrt{(f\gamma)}}{F\gamma}\right\}^2 - A_n} = \text{Const.}$$

welche, wenn β und γ Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ sind, in die in §. 4. angeführte Gleichung übergeht.

Differentiirt man (50.) nach β und setzt $\beta = \gamma$, so erhält man die Integralgleichung

$$(F\gamma)^2 \frac{F\alpha\left\{\Sigma_1^n\left(\frac{(\alpha-\gamma)\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(\gamma-x_h)F'x_h}\right) \pm \frac{\sqrt{(f\gamma)}}{F\gamma}\right\}^2 - \frac{f\alpha}{F\alpha}}{2F'\gamma f\gamma - F\gamma f'\gamma \mp 2\sqrt{(f\gamma)}(F\gamma)^2 \Sigma_1^n\left(\frac{\sqrt{(fx_h)}}{(\gamma-x_h)F'x_h}\right)} = \text{Const.},$$

und setzt man hierin wieder $f\gamma = 0$, so erhält man folgende Gleichung:

$$F\alpha \,.\, F\gamma\left(\Sigma_1^n \frac{(\alpha-\gamma)\sqrt{(fx_h)}}{(\alpha-x_h)(\gamma-x_h)F'x_h}\right)^2 - \frac{f\alpha \,.\, F\gamma}{F\alpha} = \text{Const.},$$

welche in der Gleichung (40.) enthalten ist und für $f\alpha = 0$ auf die Lösung des Theorems 1. führt.

Königsberg, den 18ten Nov. 1848.

De curvis aequidistantibus sphaericis disquisitiones generales.

(Auct. Dr. C. Gudermann, prof. math. ord. Monast. Guestph.)

1.

Sit $M = (x, y)$ punctum curvae sphaericae s, cuius aequatio sit quaecunque $\varphi(x, y) = 0$ adhibitis iisdem lineis coordinatis sphaericis arc tang (x) et arc tang (y), quibus plerumque usi sumus in libro, cui titulus: „Grundrifs der analytischen Sphärik," et cuius singulos paragraphos saepius allegabimus signum §. paragraphi numero praefigentes.

Per punctum M ducatur circulus maximus sive linea sphaerico-recta curvae primitivae normalis, qua in linea punctum $N = (a, b)$ determinemus tale, ut distantia $MN = R$ sit data constans. Puncti huius N locus erit curva sphaerica σ aequidistans a primitiva s.

Quia punctum N in linea normali positum est, valet aequatio e §. 26 sive §. 22 nota haec

$$a[\partial x + y^2 \partial x - xy\,\partial y] + b[\partial y + x^2 \partial y - yx\,\partial x] = x\,\partial x + y\,\partial y, \text{ sive}$$

$$\frac{a\,\partial x + b\,\partial y}{1 + ax + by} = \frac{x\,\partial x + y\,\partial y}{1 + x^2 + y^2},$$

quae, si $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ ponitur, abit in

$$a[1 + y^2 - pxy] + b[p + px^2 - xy] = x + py, \text{ sive}$$

$$\frac{a + pb}{1 + ax + by} = \frac{x + py}{1 + x^2 + y^2}.$$

Eadem aequatio et ita disponi potest:

$$b - y = \frac{1 + y^2 - pxy}{xy - px^2 - p}(a - x) = \frac{1 + x^2 + y^2 - x(x + py)}{y(x + py) - p(1 + x^2 + y^2)}(a - x),$$

quare, quia $ay - bx = y(a - x) - x(b - y)$ est, et invenies

$$ay - bx = \frac{-(a - x)(x + py)}{xy - px^2 - p}.$$

Distantiam $MN = R$ esse exprimunt formulae notissimae

$$\cos R = \frac{1+ax+by}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}.\sqrt{(1+x^2+y^2)}},$$

$$\sin R = \frac{\sqrt{[(x-a)^2+(ay-bx)^2+(y-b)^2]}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}.\sqrt{(1+x^2+y^2)}}.$$

$$\operatorname{tang} R = \frac{\sqrt{[(x-a)^2+(ay-bx)^2+(y-b)^2]}}{1+ax+by},$$

quarum ultimam adhibeamus ad inveniendos valores quantitatum a et b incognitarum. Brevitatis causa iisdem utimur signis, quibus in §. 26, scilicet $w=\sqrt{(1+x^2+y^2)}$, et

$$v=\frac{\sqrt{(\partial x^2+(y\partial x-x\partial y)^2+\partial y^2)}}{\partial x}=\sqrt{(1+p^2+(y-px)^2)};$$ sit insuper

$$c=\operatorname{tang} R.$$

Est primo

$$1+ax+by=1+x(a-x)+y(b-y)+x^2+y^2=w^2+x(a-x)+y(b-y);$$

quare invenis

$$1+ax+by=w^2.\left(1+\frac{(a-x)(y-px)}{xy-px^2-p}\right),$$

et

$$\sqrt{[(x-a)^2+(ay-bx)^2+(y-b)^2]}$$

$$=\frac{\pm(a-x)\sqrt{[(xy-px^2-p)^2+(1+y^2-pxy)^2+(x+py)^2]}}{xy-px^2-p}=\frac{\pm(a-x).v.w}{xy-px^2-p},$$

quapropter

$$\pm c=\frac{\frac{v}{w}(a-x)}{xy-px^2-p+(y-px)(a-x)}.$$

Si quantitati c signum praefixum eligis inferius, hinc derivabis formulas

$$a-x=\frac{-\frac{wc}{v}(xy-px^2-p)}{1+\frac{wc}{v}(y-px)},\qquad b-y=\frac{-\frac{wc}{v}(1+y^2-pxy)}{1+\frac{wc}{v}(y-px)}$$

quare

$$a=\frac{x+\frac{wcp}{v}}{1+\frac{wc}{v}(y-px)},\qquad b=\frac{y-\frac{cw}{v}}{1+\frac{cw}{v}(y-px)}\quad\text{et}$$

$$ay-bx=\frac{\frac{cw}{v}(x+py)}{1+\frac{cw}{v}(y-px)}.$$

Formulis his satis simplicibus determinatur situs puncti $N=(a,b)$ in curva aequidistante σ, cujus aequidistantia a curva data s est $=+R$.

Si vero in iisdem formulis $-R$ loco $+R$, vel quod idem $-c$ loco $+c$ ponitur, aliud determinatur punctum $N_1 = (a_1 b_1)$, quod est in curva aequidistante σ_1 altera collocatum, cujus quidem aequidistantia a curva primitiva est $= -R$. Quare nunc valent formulae

$$a_1 = \frac{x - \frac{cwp}{v}}{1 - \frac{cw}{v}(y - px)}, \qquad b_1 = \frac{y + \frac{cw}{v}}{1 - \frac{cw}{v}(y - px)}.$$

E formulis inventis patet, a et b esse functiones variabilium x et y aequatione $\Phi(x, y) = 0$ conjunctarum, quare has eliminando invenies aequationem inter variabiles a et b ipsas, quae erit ea curvae aequidistantis σ. Pari modo invenitur curvae σ_1 aequatio, quae cum priore congruit, dummodo permutentur a_1 et a, b_1 et b, $+c$ et $-c$.

Nota. Si usum abscissarum et applicatarum praeferis, sit puncti M abscissa $= x$ et applicata $= y$, puncti vero N abscissa $= a$ et applicata $= y$. Invenies formulas

$$\sin b = \cos R \sin y - \sin R . \cos^2 y . \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$\cos b . \sin(a - x) = \sin R . \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\cos R = \sin y \sin b + \cos y \cos b \cos(a - x),$$

$$\cos y . \sin(a - x) = \sin R . \frac{\partial b}{\partial \sigma},$$

$$\frac{\partial \sin b}{\partial \sigma} = \frac{\partial \sin y}{\partial s},$$

$$\pm \frac{\partial \sin b}{\sin(r - R)} = \frac{\partial \sin y}{\sin r}, \text{ si } r \text{ est curvae } s \text{ radius curvaturae etc.,}$$

quibus relationes inter a, b, x, y exprimuntur.

2.

Ad inveniendas curvarum σ et σ_1 proprietates eruendae sunt differentialium rationes binae $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial x}$, quas obtinebis differentiando formulas, quibus a et b in articulo praeced. expressae sunt. At alia eodem perveniendi via patet, quae magis placet. Differentiemus eas aequationes ipsas, e quibus valores quantitatum a et b eruti sunt, sive erui possunt, scilicet

$$\cos R = \frac{1 + ax + by}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)} . \sqrt{(1 + x^2 + y^2)}} \text{ et}$$

$$a(1 + y^2 - pxy) + b(p + px^2 - xy) = x + py,$$

et quidem ita differentiemus, ut quantitates x, y, p, a, b simul sint variabiles, et sola R sit constans. Hoc modo e prima invenitur

$$\frac{x\partial a+y\partial b}{1+ax+by}-\frac{a\partial a+b\partial b}{1+a^2+b^2}+\frac{a\partial x+b\partial y}{1+ax+by}-\frac{x\partial x+y\partial y}{1+x^2+y^2}=0,$$

qua ob aequationem alteram reducitur ad simplicem

$$\frac{x\partial a+y\partial b}{1+ax+by}=\frac{a\partial a+b\partial b}{1+a^2+b^2},$$

ideoque edocet lineam normalem curvae σ per ipsius punctum $N=(a, b)$ ductam etiam per punctum $M=(x, y)$ transire; idem valet de normali curvae σ_1 per ipsius punctum $N_1=(a_1\, b_1)$ ducta; quare eadem linea N_1MN sphaerico-recta tribus curvis σ_1, σ et s est normalis communis; ideoque in genere *tribus curvis aequidistantibus eaedem sunt lineae normales.*

Si aequationem modo inventam conjungimus cum aequatione

$$c=\frac{\sqrt{[(x-a)^2+(ay-bx)^2+(y-b)^2]}}{1+ax+by},$$

eodem modo, quo in articulo (1.), eruuntur formulae inversae

$$x=\frac{a-\frac{cp'w'}{v'}}{1-\frac{cw'}{v'}(b-p'a)},\qquad y=\frac{b+\frac{cw'}{v'}}{1-\frac{cw'}{v'}(b-p'a)},$$

si brevitatis causa nuncupamus signa

$$p'=\frac{\partial b}{\partial a},$$
$$w'=\sqrt{(1+a^2+b^2)},$$
$$v'=\sqrt{((1+p'^2+(b-p'a)^2)}=\frac{\sqrt{(\partial a^2+(b\partial a-a\partial b)^2+\partial b^2)}}{\partial a}.$$

Eaedem valent formulae, si in ipsis permutamus simul a_1 et a, b_1 et b, $-c$ et $+c$. Si valores quantitatum x et y modo erutos substitnis in aequatione data $\Phi(x, y)=0$ curvae s, *oritur aequatio differentialis curvae aequidistantis σ, et pariter ea curvae σ_1.*

Quia eadem linea normalis tribus curvis σ_1, σ et s communis simul est curvae evolutae linea tangens, patet, *tribus curvis σ_1, σ et s esse eandem curvam evolutam sphaericam.*

Centrum sphaericum lineae normalis est punctum curvae, quam dico *curvam normalem,* et quae curvae evolutae est curva reciproca; quare *eadem curva normalis simul pertinet ad tres curvas aequidistantes σ_1,* σ et s.

Si centrum modo dictum vel punctum curvae normalis $= (m, n)$ ponimus, est

$$m = \frac{\partial x + y^2 \partial x - xy\partial y}{x\partial x + y\partial y} = \frac{\partial a + b^2 \partial a - ab\partial b}{a\partial a + b\partial b},$$
$$n = \frac{\partial y + x^2 \partial y - yx\partial x}{x\partial x + y\partial y} = \frac{\partial b + a^2 \partial b - ba\partial a}{a\partial a + b\partial b},$$

quare aequationes differentiales binas inter quatuor variabiles x, y, a, b

$$\frac{\partial a + b^2 \partial a - ab\partial b}{a\partial a + b\partial b} = \frac{\partial x + y^2 \partial x - xy\partial y}{x\partial x + y\partial y},$$
$$\frac{\partial b + a^2 \partial b - ba\partial a}{a\partial a + b\partial b} = \frac{\partial y + x^2 \partial y - yx\partial x}{x\partial x + y\partial y},$$

in quibus y est functio quantitatis x qualiscunque, simul resolvimus et integramus complete, ponendo

$$a = \frac{x + \frac{cpw}{v}}{1 + \frac{cw}{v}(y - px)} \quad \text{et} \quad b = \frac{y - \frac{cw}{v}}{1 + \frac{cw}{v}(y - px)},$$

quibus in formulis c est quantitas constans arbitraria ab integratione originem ducens. Si $c = 0$ ponitur, prodeunt aequationes integrales $a = x$ et $b = y$ particulares. Quam rem notatu digniorem hac occasione geometrice inventam silentio praeterire vix potui.

3.

Aequationem in artic. praeced. inventam differentialem $\frac{x\partial a + y\partial b}{1 + ax + by} = \frac{a\partial a + b\partial b}{1 + a^2 + b^2}$ hoc modo disponimus:

$$\frac{\partial b}{\partial x}[y - b + a(ay - bx)] + \frac{\partial a}{\partial x}[x - a + b(bx - ay)] = 0;$$

quare eliminando quantitatis a et b eruis

$$\frac{\partial a}{\partial x}\Big[(xy - px^2 - p)\Big(1 + \frac{cw}{v}(y - px)\Big) - \Big(y - \frac{cw}{v}\Big)(x + py)\Big]$$
$$+ \frac{\partial b}{\partial x}\Big[(1 + y^2 - pxy)\Big(1 + \frac{cw}{v}(y - px)\Big) + \Big(x + \frac{cpw}{v}\Big)(x + py)\Big] = 0,$$

quae tandem reducitur ad satis simplicem

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{p - \frac{cxv}{w}}{1 + \frac{cyv}{w}} \cdot \frac{\partial a}{\partial x}.$$

Si pariter nunc differentiamus et aequationem alteram

$$a(1+y^2-pxy)+b(p+px^2-xy) = x+py, \quad \text{ponendo} \quad q=\frac{\partial p}{\partial x},$$

oritur

$$\frac{\partial a}{\partial x}(1+y^2-pxy)+\frac{\partial b}{\partial x}(p+px^2-xy) = \lambda,$$

in qua est $\lambda = 1+p^2+qy-a(py-p^2x-qxy)-b(px-y+q+qx^2)$, et substitutis quantitatum a et b valoribus reducitur ad

$$\lambda = \frac{v^2\left(1+cq.\frac{w^3}{v^3}\right)}{1+\frac{cw}{v}(y-px)}.$$

Simul patet esse $\lambda = 0$, si sit $c = \frac{\left(\frac{v}{w}\right)^3}{-q}$, quae conditio ob formulam $\operatorname{tang} r = \frac{\left(\frac{v}{w}\right)^3}{-q}$ in §. 26 inventam, qua curvae s radius curvaturae ad ipsius punctum M pertinens determinatur, ad simplicem reducitur hanc:

$$\lambda = 0, \quad \text{si} \quad R = r$$

Aequationes binae praecedentes praebent formulas

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\left(1+\frac{cyv}{w}\right)\left(1+\frac{cqw^3}{v^3}\right)}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{cyv}{w}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}\right)}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2},$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\left(p-\frac{cxv}{w}\right)\left(1+\frac{cqw^3}{v^3}\right)}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2} = \frac{\left(p-\frac{cxv}{w}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}\right)}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2},$$

e quibus adhuc componimus hanc:

$$\frac{a\partial b-b\partial a}{\partial x} = \frac{\left(1+\frac{cqw^3}{v^3}\right)\left[\left(x+\frac{cpw}{v}\right)\left(p-\frac{cxv}{w}\right)-\left(y-\frac{cw}{v}\right)\left(1+\frac{cyv}{w}\right)\right]}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^3},$$

quae vero satis reducta abit in

$$\frac{a\partial b-b\partial a}{\partial x} = \frac{\left(px-y+\frac{cv}{w}\right)\left(1+\frac{cqw^3}{v^3}\right)}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2} = \frac{\left(px-y+\frac{cv}{w}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}\right)}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2}.$$

Dum ad comparationem trium arcuum σ, σ_1 et s procedimus, adhibeamus formulam in §. 26 propositam $\partial s = \frac{v.\partial x}{w^2}$ et similem $\partial\sigma = \frac{v'.\partial a}{w'^2}$.

Formula $w'^2 = 1+a^2+b^2 = \frac{\left(1+\frac{cw}{v}(y-x)\right)^2+\left(x+\frac{cpw}{v}\right)^2+\left(y-\frac{cw}{v}\right)^2}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2}$

reducitur ad

$$w'^2 = \frac{w^2(1+c^2)}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2},$$

et formulam

$$\pm v'\partial a = \frac{\partial x\left(1-\frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}\right)\sqrt{\left[\left(1+\frac{cyv}{w}\right)^2+\left(p-\frac{cxv}{w}\right)^2+\left(px-y+\frac{cv}{w}\right)^2\right]}}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2}$$

reduces ad

$$v'\partial a = \pm\frac{v\partial x.\left(1-\frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}\right).\sqrt{(1+c^2)}}{\left(1+\frac{cw}{v}(y-px)\right)^2},$$

quare dividendo obtines

$$\partial\sigma = \pm\partial s.\cos R.\left(1-\frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}\right), \text{ et pariter}$$

$$\partial\sigma_1 = \pm\partial s.\cos R.\left(1+\frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}\right),$$

quas formulas et sic disponi posse patet:

$$\partial\sigma = \pm\frac{\sin(R-r)}{\sin r}.\partial s \quad \text{et} \quad \partial\sigma_1 = \pm\frac{\sin(R+r)}{\sin r}.\partial s.$$

Easdem formulas simplices breviore modo derivemus et simul ambiguitatem relevemus. Sint in Fig. 1. Tab. I. $AM = s$, $CN = \sigma$ et $EN_1 = \sigma_1$ partes trium curvarum aequidistantium AB, CD et EF ita terminatarum, ut tum EAC tum FBD sit linea sphaerico-recta normalis. Linea normalis N_1MN situ variabilis a normali immediate consecutiva secetur in O, quacum faciat angulum $= \partial\beta$ determinandum formula in §. 33 inventa. Erit O centrum sphaericum commune tribus circulis, qui curvas tres σ, σ_1 et s osculantur in N, N_1 et M, lineae ON, ON_1 et OM erunt radii osculorum ipsi. Idem O est punctum curvae evolutae tribus curvis aequidistantibus communis. Sit curva AB concava versus CD; ideoque convexa versus EF, vel quod idem est, sit radius curvaturae $OM = r$ quantitate $\frac{1}{2}\pi$ minor. Linea normalis N_1MN cum normali consecutiva intercipit curvarum portiunculas

sive elementa ∂s, $\partial \sigma$ et $\partial \sigma_1$, quae pro circulorum arcubus sunt habenda et inter crura anguli $\partial \beta$ radiis OM, ON et ON_1 descripta; quare est

$$\partial s = \partial \beta . \sin OM, \quad \partial \sigma = \partial \beta . \sin ON, \quad \partial \sigma_1 = \partial \beta . \sin ON_1,$$

quibus e formulis in §. 33 alio modo demonstratis eliminando $\partial \beta$ oriuntur aequationes

$$\partial \sigma = \frac{\sin ON}{\sin OM} \partial s \quad \text{et} \quad \partial \sigma_1 = \frac{\sin ON_1}{\sin OM} . \partial s,$$

in quibus ∂s, $\partial \sigma$ et $\partial \sigma_1$ simul positiva sunt, ut arcus s, σ et σ_1 non solum simul evanescant, sed et simul crescant.

Si punctum N inter puncta M et O in Fig. 1., vel quod idem, inter curvam datam s et curvam evolutam collocatum est, ob $MN = MN_1 = R$ et $OM = r$ est $ON = r - R$ et $ON_1 = r + R$, quare tunc est

$$\partial \sigma = \frac{\sin(r-R)}{\sin r} . \partial s \quad \text{et} \quad \partial \sigma_1 = \frac{\sin(r+R)}{\sin r} . \partial s.$$

Si vero punctum N in Fig. 2. non inter M et O continetur, prolongemus lineam normalem MO, ut $MOM = \frac{1}{2}\pi$ sit. Punctum M' locum habet in curva s', quae cum s reciprocitatis lege coniuncta est; quare punctum M' dicimus ipsius puncti M reciprocum. Punctum igitur N nunc continetur inter curvam reciprocam et ipsius curvam evolutam, et est $ON = R - r$, $ON_1 = R + r$; quare nunc valent formulae

$$\partial \sigma = \frac{\sin(R-r)}{\sin r} . \partial s \quad \text{et} \quad \partial \sigma_1 = \frac{\sin(R+r)}{\sin r} . \partial s.$$

Quodsi igitur arcus s, σ, σ_1 simul evanescunt et simul crescunt, est $\partial \sigma_1 = \frac{\sin(R+r)}{\sin r} . \partial s$, at in formula $\partial \sigma = \pm \frac{\sin(r-R)}{\sin r} . \partial s$ sumendum est signum superius $+$, si arcus σ versus curvam s concavam convexus, et signum inferius $-$, si σ versus curvam s concavam ipsa concava est. Si et arcum s' cum s reciprocitatis lege coniunctam ita terminamus, ut s' et s simul evanescant, et simul crescant, pariter est

$$\partial s' = \partial \beta . \sin OM' = \partial \beta . \cos r, \quad \text{et quia} \quad \partial s = \partial \beta . \sin r,$$

eliminatione anguli $\partial \beta$ oritur formula

$$\partial s = \operatorname{tang} r . \partial s',$$

quae congruit cum inventa in §. 33, dummodo memineris angulum contingentiae $\partial \chi$ aequalem esse ∂s (pariter $\partial \beta$ est angulus contingentiae in curva evoluta, ideoque aequalis est differentiali arcus curvae normalis). Adiumento formulae modo inventae $\partial s' = \frac{\partial s}{\operatorname{tang} r}$ aequationes praecedentes abeunt in

$$\partial\sigma = \pm(\cos R.\partial s - \sin R.\partial s') \quad \text{et} \quad \partial\sigma_1 = \cos R.\partial s + \sin R.\partial s',$$

ideoque integratione obtines relationes satis memorabiles

$$\sigma_1 = \cos R.s + \sin R.s', \qquad \sigma = \pm(\cos R.s - \sin R.s'),$$

in quarum ultima signum praefixum valet superius $+$, si curva σ est inter s et curvam evolutam, et signum valet inferius $-$, i. e. arcus $\sigma = \sin R.s' - \cos R.s$ sumendus est, si arcus σ inter s' et curvam evolutam continetur.

Si aequidistantia R est perexigua, valent formulae

$$\sigma = \cos R.s - \sin R.s' \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \cos R.s + \sin R.s',$$

et si $R = 0$ ponimus, invenitur $\sigma = \sigma_1 = s$, quod iustum, quia tres curvae nunc conciduut.

Si vero aequidistantiae complementum $\frac{1}{2}\pi - R$ est perexiguum, valent formulae $\sigma = \sin R.s' - \cos R.s$ et $\sigma_1 = \sin R.s' + \cos R.s$, et si $R = \frac{1}{2}\pi$ sumitur, formulae praebent $\sigma = \sigma_1 = s'$, quod etiam iustum, quia nunc concidit σ cum s', et σ_1 concidit cum arcu, qui arcui s' oppositus est e diametro. Si valores variabilium σ et σ_1 ita determinas, ut sit $\sigma = CND$, $\sigma_1 = EN_1F$, etiam variabiles s et s' sic statuendi sunt arcus, ut sit $s = AMB$, et $s' = A'M'B'$, dummodo A' et A sunt puncta reciproca, nec non B' et B.

Sit reciprocitatis lege conjuncta curva sive arcus $C'N'D' = \sigma'$ cum $CND = \sigma$, et pariter $E'N_1'F' = \sigma_1'$ cum $EN_1F = \sigma$, erunt et σ', σ_1', s et s' curvae aequidistantes, et pari modo invenies formulas

$$\sigma' = \cos R.s' + \sin R.s,$$

$$\sigma_1' = \pm(\cos R.s' - \sin R.s),$$

quae conjunctae cum duabus prioribus edocent, *aequidistantes sex arcus s, s', σ, σ', σ_1, σ_1' esse tales, ut e binis ipsorum computari queant quatuor reliqui.*

5.

Proponimus nunc problema de quadratura arearum, quae terminantur tum curvis σ, σ_1, s, tum binis lineis normalibus extremis EAC et FBD, quo in resolvendo adhibeamus theorema illud generalissimum de figurarum quadratura, quarum latera partes sunt curvarum quarumcunque sphaericarum; quod theorema primus ni fallor inveni, et in hujus diarii Vol. XII. pag. 85 cum geometris communicavi.

Si aequidistantia R est satis exigua, arcus AB in Fig. 1. versus quadrigoni $ACDB$ aream concavus et CD convexus est, quare area hujus quadrigoni est $= A + B + (\pi - C) + (\pi - D) - 2\pi - s' + \sigma'$, quae formula, quia angulus $A = B = C = D = \frac{1}{2}\pi$ est, reducitur ad simplicem

$ABDC = \sigma' - s'$, et pariter quadrigoni $EABF$ area est $= s' - \sigma_1'$. Quia vero nunc $\sigma' = \cos R . s' + \sin R . s$ et $\sigma_1' = \cos R . s' - \sin R . s$ est, substituendo nanciscimur formulas

$$\text{area } ACDB = \sin R . s - (1 - \cos R) . s',$$
$$\text{area } AEFB = \sin R . s + (1 - \cos R) . s',$$

quare area $CEFD$ addendo invenitur $= 2s . \sin R$ et differentia

$$AEFB - ABDC = 2s'(1 - \cos R).$$

Si vero in Fig. 2. aequidistantiae R complementum $\frac{1}{2}\pi - R$ est satis exiguum, curvaturae radius ON_1 est $> \frac{1}{2}\pi$, quare $EF = \sigma_1$ convexus est versus aream quadrigoni $AEFB$, quemadmodum arcus $AB = s$ ipse. Area quadrigoni $AEFB$ igitur est $= s' + \sigma_1'$ secundum theorema generalissimum, et quia nunc est $\sigma_1' = \sin R . s - \cos R . s'$, invenis

$$\text{aream quadrigoni } AEFB = \sin R . s + (1 - \cos R) . s',$$

quae formula congruit cum ea, quam supra invenimus. At quadrigonum $ACDB$ nunc est spurium, quia ipsius latera opposita AC et BD se insercant in puncto μ, quod tum inter puncta A et C, tum inter puncta B et D continetur. Sub quadrigoni area nunc intelligenda est differentia triangulorum scilicet $C\mu D - A\mu B$. Quia vero angulus $A = B = C = D = \frac{1}{2}\pi$, est triangulum $C\mu D = \mu - \sigma'$, et triangulum $A\mu B = \mu - s'$, ideoque quadrigonum spurium $ACDB = s' - \sigma'$, quae formula, quia $\sigma' = \cos R . s' + \sin R . s$ est, abit in $ACDB = (1 - \cos R) s' - \sin R . s$; quare in genere est

$$\text{area quadrigoni } ACDB = \pm(\sin R . s - (1 - \cos R) . s').$$

Coronidis loco perpauca addamus de curvis aequidistantibus planis s, σ et σ_1, nam curvae s', σ' et σ_1' nunc deficiunt. Facillime nunc invenies formulas

$$\sigma_1 = s + R . \beta \quad \text{et} \quad \sigma = \pm(s - R . \beta),$$

in quibus β est arcus circularis anguli, quem faciunt lineae binae normales extremae, et signum inferius — sumendum est, si arcus σ non in eodem angulo β continetur, qui arcus s et σ_1 intercipit cruribus suis, sed in angulo verticali. Areas invenies

$$\text{quadrigonum } AEFB = R . s + \tfrac{1}{2} R^2 . \beta,$$
$$\text{quadrigonum } ACDB = \pm(R . s - \tfrac{1}{2} R^2 . \beta).$$

Formulae, quae vulgo in scriptis planimetricis derivantur, erroneae sunt, cum ambiguitatem signo $\pm$ indicandam et ita relevandam, ut differentia sit positiva, non contineant.

Scriptum Monasterii Guestph. d. 29 Decembris. 1840.

8.

Ueber die Bestimmung des Inhaltes und des Schwerpunctes einer gewissen Gattung von Körpern, die zwischen zwei parallelen Endflächen enthalten sind.

(Von dem Herrn Fabriken-Commissions-Rath *Brix* zu Berlin.)

Bereits vor mehreren Jahren habe ich mich mit der Untersuchung des in der Ueberschrift genannten Gegenstandes beschäftigt, und ich bin dabei zu Resultaten gelangt, die sowohl wegen ihrer grofsen Allgemeinheit als auch wegen des elementaren Ganges ihrer Herleitung Aufmerksamkeit zu verdienen scheinen. Mehrere von diesen Resultaten sind schon in meinem Lehrbuche der Statik fester Körper, welches 1831 bei Dunker und Humblot hieselbst erschienen ist, enthalten; die übrigen habe ich im Laufe der Zeit nur meinen Zuhörern bei der Allgemeinen Bauschule und beim Königl. Gewerbe-Institut gelegentlich mitgetheilt, ohne sie jedoch auf andere Weise zu veröffentlichen.

Durch die dahin einschlagenden Untersuchungen der Herren *Koppe* und *Steiner* im 18ten und 23sten Bande d. Journals gewann dieser Gegenstand ein erneuertes Interesse für mich, und insofern ich voraussetzen darf, dafs er auch anderweitig Aufmerksamkeit erregt hat, nehme ich keinen Anstand, meine Bearbeitung desselben hiemit der Oeffentlichkeit zu übergeben.

§. 1.

Allgemeine Grundgesetze. Es stelle ABC (Fig. 1.) einen beliebigen Körper vor, und die Gerade AX sei irgend ein Durchmesser desselben. Man denke sich diesen Körper durch beliebig viele parallele Ebenen BC, DE, FG etc. senkrecht auf AX geschnitten, und errichte auf der geraden Linie LM, welche parallel und gleich mit AX angenommen wird, in den jenen Durchschnitten entsprechenden Puncten M, P, R etc. die Perpendikel MN, PQ, RS etc. Trägt man nun auf diese Perpendikel nach dem zum Grunde gelegten Maafsstabe so viele Längen-Einheiten ab, wie die entsprechenden Durchschnitts-Ebenen Flächen-Einheiten enthalten, und betrachtet

dieselben als Ordinaten einer durch sie bestimmten Curve *LQSN*, so gelten folgende Gesetze:

1. Die Zahl, welche den Flächen-Inhalt der von der genannten Curve begrenzten Figur *LMN* bestimmt, ist gleich der Zahl, durch welche der Cubik-Inhalt des Körpers *ABC* ausgedrückt wird, beide Zahlen abstract genommen.

   Dasselbe gilt von je zwei zusammengehörigen Theilen der Fläche und des Körpers, wie z. B. *PQSR* und *DEFG*, *PQNM* und *BCDE* u. s. f.

2. Die Projection des Schwerpunctes der Fläche *LMN* auf deren Grundlinie *LM* hat denselben Abstand vom Puncte *L*, wie die Projection des Schwerpunctes des Körpers *ABC* auf dessen Durchmesser *AX* vom Anfangspuncte *A* desselben.

   Eben so ist auch der normale Abstand des Schwerpunctes der Fläche *PQNM* (oder *PQSR*) von der Ordinate *PQ* gleich dem Schwerpuncts-Abstande des correspondirenden Körperstücks *DECB* (oder *DEGF*) von der Ebene *DE*.

Beide Gesetze lassen sich auf elementarem Wege sehr leicht beweisen, was dem Leser füglich überlassen bleiben kann.

§. 2.

Die Curve *LN*, welche demnach sowohl für den Cubik-Inhalt des Körpers *ABC* und seiner einzelnen Theile, als auch für die Bestimmung seines Schwerpunctes maafsgebend ist, soll in beiden Beziehungen die *Scale* dieses Körpers genannt werden. Ist man nun im Stande, diese Curve elementarisch zu quadriren, und ebenso den Schwerpunct der von ihr begrenzten Fläche zu bestimmen, so ist damit auch der Cubik-Inhalt und der Schwerpunct des zugehörigen Körpers gefunden.

Hier sollen nur diejenigen Körper untersucht werden, deren Scala von der Art ist, dafs jene Bestimmungen auf elementarem Wege geleistet werden können, und dahin gehören zunächst folgende Körper: das parabolische Conoïd, entstanden durch Drehung der apollonischen Parabel um die Achse, welche dieselbe in zwei congruente Theile theilt; ferner das hyperbolische und elliptische Conoïd, welches letztere auch die Kugel, als speciellen Fall, mit begreift; alle pyramidalischen und kegelförmigen Körper, so wie endlich die Gattung Polyëder, die von zwei parallelen Vielecken

als Endflächen (Grundflächen) und von Paralleltrapezen oder Dreiecken als Seitenflächen begrenzt werden, und die man der Kürze wegen unter der Benennung der *Obelisken* zusammen fassen kann.

Für alle diese Körper giebt es, wie im Nachstehenden gezeigt werden soll, eine einzige Regel zur Berechnung ihres cubischen Inhaltes, und eben so läſst sich die Lage ihres Schwerpunctes durch eine und dieselbe Formel bestimmen.

§. 3.

Das *parabolische Conoïd* bietet den einfachsten Fall dar. Stellt nemlich AB (Fig. 1.) eine gewöhnliche Parabel vor, welche AX zur Achse und A zum Scheitel hat, und denkt man sich die Parabelfläche AXB um jene Achse gedreht, wodurch das Conoïd BAC erzeugt wird, so beschreibt jede Ordinate $= y$ einen Kreis, dessen Inhalt sich durch πy^2 ausdrückt. Nach der Gleichung der Parabel hat man aber $y^2 = ax$, wenn x die zu y gehörige Abscisse bezeichnet, und daher ist jene Kreisfläche $\pi y^2 = \pi ax$. Bezeichnet man diesen Inhalt mit Φ, und betrachtet man Φ als die zur Abscisse x gehörige Ordinate für die Scale des Körpers, so ist

$$\Phi = \pi a . x$$

die Gleichung der letzteren, welche daher in dem vorliegenden Falle eine gerade Linie ist, die durch den Coordinaten-Anfang geht.

Es stelle LN' (Fig. 1.) diese geradlinige Scale vor, dann ist der Inhalt des Dreiecks LMN' der Repräsentant für den cubischen Inhalt K des Conoïds BAC, und dieser Inhalt hat bekanntlich zum Ausdruck

$$K = \tfrac{1}{2} . LM . MN'.$$

Nun ist $LM = AX$; $MN' =$ Kreisfläche $BC = \pi . XB^2$; also hat man

$$K = \tfrac{1}{2} . AX . \pi . XB^2;$$

d. h. *der Inhalt des parabolischen Conoïdes BAC ist gleich der Hälfte eines Cylinders, der die Ordinate BX zum Radius und die Abscisse AX zur Höhe hat.*

Der Schwerpuncts-Abstand des Dreiecks $LM'N'$ von der Spitze L ist bekanntlich gleich $\tfrac{2}{3} LM'$, und demnach liegt der Schwerpunct des Conoïdes BAC auf $\tfrac{2}{3}$ der Achse AX vom Scheitel A entfernt.

§. 4.

Bezeichnet man die Längen der Ordinaten MN', PQ', welche die Querschnitte BC, DE des Conoïdes repräsentiren, beziehlich mit f und f',

ihren Abstand PM mit h, so ist der Inhalt des Paralleltrapezes $PQ'N'M$ $= \frac{1}{2}(f+f').h$, und dies ist zugleich der Ausdruck für den Cubik-Inhalt des zwischen den parallelen Ebenen BC, DE enthaltenen Körpers $BCED$. Man hat daher

$$K = \tfrac{1}{2}(f+f')h = \Phi.h,$$

wenn Φ die Länge der in der Mitte von PM errichteten Ordinate RS', also auch den Inhalt von dem mittleren Querschnitt FG jenes Körpers darstellt. Mit Rücksicht darauf, dafs $\Phi = \frac{1}{2}(f+f')$ ist, läfst sich der vorige Ausdruck auch folgendermafsen schreiben:

$$K = \tfrac{1}{3}h\left(2\Phi + \frac{f+f'}{2}\right),$$

welche Darstellung zwar für die numerische Berechnung unbequemer, hier aber doch nöthig ist, um die allgemeine Regel zur Berechnung des körperlichen Inhalts hervortreten zu lassen.

Der Schwerpuncts-Abstand des Trapezes $PQ'N'M$ von der Seite PQ' bestimmt sich nach bekannten Lehren der Statik durch die Formel

$$z = \tfrac{1}{3}h.\frac{2f+f'}{f+f'},$$

und dieselbe Formel giebt daher auch den Schwerpuncts-Abstand des abgekürzten Conoïdes $BCED$ von der Ebene DE. Es ist aber $f+f' = 2\Phi$, also auch $2f+f' = 2\Phi+f$ und $3(f+f') = f+2(f+f')+f' = f+4\Phi+f'$. Mit Rücksicht hierauf kann man die vorige Formel auch schreiben:

$$z = h.\frac{2\varphi+f}{f'+4\varphi+f},$$

welches die Eingangs erwähnte Formel ist, deren allgemeine Gültigkeit hier nachgewiesen werden soll.

§. 5.

Wie nun das parabolische Conoïd eine gerade Linie zur Scale hat, so ist für alle übrigen der Eingangs erwähnten Körper die Scale eine gewöhnliche Parabel, welche Curve bekanntlich mit zu denjenigen gehört, die sich auf elementarem Wege quadriren lassen, und für welche auch die Lage des Schwerpunctes sehr leicht gefunden wird. Wir betrachten zunächst das *hyperbolische* und das *elliptische Conoïd;* welche beide Körper hier zusammengefafst werden können, da die entsprechenden Gleichungen sich nur in einem Vorzeichen unterscheiden.

Es stelle demnach AB (Fig. 2.) einen Bogen der Hyperbel oder der Ellipse vor, A sei der Scheitel dieser Curve und AX die Achse derselben. Sind x und y die zusammengehörigen Coordinaten eines beliebigen Curvenpunctes, auf den Punct A als Anfangspunct und AX als Abscissen-Achse bezogen, so ist die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax \pm x^2),$$

worin a und b die gewöhnliche Bedeutung haben.

Denkt man sich nun das Conoïd BAC durch Drehung der Fläche AXB um die Achse AX entstanden, so hat die Ordinate y bei dieser Bewegung einen Kreis beschrieben, dessen Inhalt Φ sich ausdrückt durch

$$\Phi = \pi y^2 = \frac{\pi b^2}{a^2}(2ax \pm x^2).$$

Dies ist also die Gleichung für die Scale des fraglichen Conoïdes, sofern man Φ als die zur Abscisse x gehörige Ordinate derselben betrachtet.

Die genannte Curve geht zweimal durch ihre Abscissen-Achse, und man findet diese Durchgangspuncte für die Bedingung $\Phi = 0$; wofür man erhält:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \pm 2a.$$

Der erste Durchgangspunct findet demnach im Anfangspuncte der Coordinaten statt, der zweite hingegen ist um die Gröfse $2a$ von diesem Puncte entfernt, und zwar für die Scale des Hyperboloïds auf der negativen, für die des Ellipsoïds auf der positiven Seite der Abscissen-Achse. Beide Fälle sind in den Figuren 3. und 4. getrennt dargestellt, wo L der Coordinaten-Anfang, LM die positive Seite der Abscissen-Achse und $LL' = 2a$ ist, so dafs also L' den zweiten Durchgangspunct darstellt.

Man halbire den Abstand LL' in I, so dafs $LI = L'I = a$, und ziehe durch I senkrecht auf LL' die Gerade VW (oder VI), so findet man die zur Abscisse LI gehörige Ordinate IV, wenn man in der obigen Gleichung $x = \mp a$ setzt, nemlich

$$IV = \mp \pi b^2.$$

Der Punct V liegt daher für die Scale des Hyperboloïds (Fig. 3.) unterhalb, für die des Ellipsoïds (Fig. 4.) aber oberhalb der Abscissen-Achse LM. Nimmt man ihn zum Anfangspunct der Coordinaten, die Gerade VW (oder VI) zur Abscissen-Achse, und bezeichnet die Coordinaten VW, WS des beliebigen Curvenpunctes S bezüglich mit t und u, so ist

$$\Phi = t \mp VI = t \mp \pi b^2,$$
$$x = \pm(u - LI) = \pm(u - a),$$

und wenn dies in die obige Gleichung der Scale gesetzt wird, entsteht

$$u^2 = \frac{a^2}{\pi b^2} \cdot t,$$

welches die Gleichung der gewöhnlichen Parabel ist, deren Scheitel sich in V befindet, und deren Achse die Gerade VW ist.

Die *Kugel* geht aus dem elliptischen Sphäroid hervor, wenn man die beiden Achsen der erzeugenden Ellipse einander gleich setzt. Für $a = b$ verwandelt sich aber die vorige Gleichung in folgende:

$$u^2 = \frac{1}{\pi} \cdot t,$$

und die Parabel zeigt sich daher auch für die Kugel noch als Scale des Inhalts.

§. 6.

Um nun von der körperlichen Zone $BCED$ (Fig. 2.) des hyperbolischen und elliptischen Conoïdes zuvörderst der Inhalt K zu bestimmen, bezeichne man die Flächen-Inhalte der parallelen Durchschnitte BC, DE, welche die Grundflächen jener Zonen darstellen, beziehlich mit f und f', ihren Abstand von einander oder die Höhe der Zone mit h, und denke sich in der Mitte dieser Höhe den Durchschnitt FG genommen, dessen Inhalt $= \Phi$ sein mag. In den Figuren 2. und 4. haben die Ordinaten MN, PQ und RS dieselben Zahlenwerthe, wie die so eben genannten Durchschnitts-Ebenen, und auch denselben Abstand von einander; die Fläche $PQMN$ stellen daher den Inhalt jener Zone dar.

Man ziehe die Sehne QN, welche die Linie RS oder deren Verlängerung in T schneidet, und bezeichne die Länge von ST mit n, so ergiebt sich der Inhalt des Segmentes QNS nach bekannten Lehren der Geometrie $= \frac{2}{3}nh$. Ebenso ist der Inhalt des Paralleltrapezes $PQNM$ $= \frac{1}{2}(f+f')h$, und daher ergiebt sich der Inhalt der von der Scale begrenzten Fläche $PQNM$ gleich

$$\tfrac{1}{2}(f+f')h \mp \tfrac{2}{3}nh = \tfrac{1}{6}h(3(f+f') \mp 4n),$$

wo das obere Zeichen für das Hyperboloïd, das untere aber für das Ellipsoïd gilt. Nun ist aber

$$RT = RS \pm ST = \Phi \pm n$$

und zugleich

$$RT = \tfrac{1}{2}(PQ + MN) = \frac{f+f'}{2};$$

folglich

$$\Phi \pm n = \tfrac{1}{2}(f+f'), \quad \text{und} \quad \pm n = \tfrac{1}{2}(f+f') - \Phi.$$

Substituirt man dies in die obige Formel, und bezeichnet den gesuchten Inhalt mit K, so entsteht

$$1. \quad K = \tfrac{1}{3}h\left(2\Phi + \frac{f+f'}{2}\right);$$

welche Formel den Cubik-Inhalt der körperlichen Zone $BCDE$ ausdrückt.

Den Schwerpuncts-Abstand dieses Körpers von der Ebene DE findet man ferner, wenn man das statische Moment der Fläche $PQNM$ in Bezug auf PQ durch den Inhalt dieser Fläche dividirt. Nach bekannten Lehren der Statik ist aber das Moment des Paralleltrapezes $PQNM$ gleich

$$\tfrac{1}{2}h(f+f') \cdot \tfrac{1}{3}h \cdot \frac{2f+f'}{f+f'} = \tfrac{1}{6}h^2(2f+f'),$$

und ebenso das Moment des Segments QNS, dessen Schwerpunct in ST liegt, gleich

$$\tfrac{2}{3}nh \cdot \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{3}nh^2;$$

folglich ist das Moment der Fläche $PQNM$ gleich

$$\tfrac{1}{6}h^2(2f+f') \mp \tfrac{1}{3}nh^2 = \tfrac{1}{6}h^2(2f+f' \mp 2n).$$

Setzt man hierin statt n den vorhin gefundenen Werth, so verwandelt sich dieser Ausdruck in folgenden:

$$\tfrac{1}{6}h^2(2\Phi + f),$$

und wenn man den letzteren durch den Inhalt K dividirt, ergiebt sich für den gesuchten Schwerpuncts-Abstand z des Körpers $BCED$ von der Ebene DE die Formel

$$2. \quad z = h \cdot \frac{2\varphi + f}{f' + 4\varphi + f}.$$

§. 7.

In Fig. 3. stellt, wie so eben dargethan ist, die Curve LN die Scale des hyperbolischen Conoïdes BAC dar, und der Durchgangspunct L dieser Curve durch die Abscissen-Achse entspricht dem Scheitelpuncte A des genannten Körpers. Auf gleiche Weise ist $L'N'$ die Scale des Conoïdes, welches durch die entgegengesetzte Hyperbel bei der Drehung um die über A hinaus verlängerte Achse AX erzeugt wird. Das Curvenstück LVL', welches unterhalb der Abscissen-Achse liegt, stellt aber, wie leicht erhellet, die Scale des Sphäroïdes vor, welches die, beide Hyperbeln ver-

bindende Ellipse zur erzeugenden Fläche hat, und das Segment $LL'V$ repräsentirt demnach den cubischen Inhalt dieses Sphäroïdes. Dieser letztere Körper ist negativ zu nehmen, während die beiden zuerst erwähnten Körper, die zusammen genommen das sogenannte *zweiastige Hyperboloïd* (hyperboloïde à deux nappes) bilden, sich als positiv darstellen.

Ferner ist in Fig. 4. die Curve LVL' die Scale des elliptischen Sphäroïdes, und der Inhalt der Fläche LVL' ist der Ausdruck für den cubischen Inhalt des ganzen Sphäroïdes. Jener Flächen-Inhalt ist aber gleich $\frac{2}{3} VI.LL'$, und da nach dem Vorhergehenden $VI = \pi b^2$, $LL' = 2a$ ist, so ergiebt sich der Cubik-Inhalt des fraglichen Sphäroïdes $= \frac{4}{3} ab^2\pi$.

§. 8.

In §. 5. wurde eine Drehung der Hyperbel und der Ellipse um die große oder Haupt-Achse $2a$ angenommen. Allein die daraus hervorgegangenen Resultate bleiben dieselben, wenn man die genannten Flächen sich um ihre kleine oder Zwerg-Achse $2b$ drehen läßt, wobei die eine Fläche das sogenannte *einastige Hyperboloïd* (hyperboloïde à une nappe), die andere aber ein *abgeplattetes* Sphäroïd beschreibt. In der Gleichung der Scale dieser letzteren Körper, die noch immer eine gewöhnliche Parabel bleibt, ändert sich weiter nichts, als daß darin b an die Stelle von a, und umgekehrt a an die Stelle von b tritt. Diese Gleichung ist nemlich

$$u^2 = \frac{b^2}{\pi a^2}.t,$$

wie sich durch eine kleine Ueberlegung sofort ergiebt.

Außerdem findet man bald, daß die Scale des Hyperboloïdes jetzt *keinen* Punct mit der zugehörigen Abscissen-Achse gemein hat, sondern, wenn in Fig. 3. VN' jene Scale und im' diese Achse Beispiels halber vorstellt, so ergiebt sich für den Abstand vi des Scheitels der Curve von ihrer Abscissen-Achse der positive Werth πa^2.

Die beiden in §. 6. gefundenen Formeln:

$$K = \frac{2}{3} h\left(2\Phi + \frac{f+f'}{2}\right), \quad z = h.\frac{2\varphi+f}{f'+4\varphi+f},$$

haben daher auch für die obigen Körper volle Gültigkeit, wofern nemlich die parallelen Durchschnittsflächen f, f' und Φ auf der Rotations-Achse senkrecht genommen sind.

§. 9.

Pyramidalische und *kegelförmige* Körper stimmen in der Eigenschaft überein, dafs die mit einander parallelen Durchschnitte bei jedem dieser Körper sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der zugehörigen Spitze verhalten. Nimmt man also diese Abstände zu Abscissen, die Inhalte jener Durchschnitte aber zu den darauf senkrechten Ordinaten, wodurch die Scale der fraglichen Körper construirt wird, so ergiebt sich sofort, dafs die erwähnte Scale ebenfalls eine gewöhnliche Parabel ist, deren Scheitelpunct im Anfangspuncte der Coordinaten liegt, und deren Achse auf der Abscissen-Achse senkrecht steht.

Uebrigens bedürfen diese Körper keiner näheren Betrachtung, da sie sich als eine Specialisation der sogenannten Obelisken ergeben werden, zu deren Behandlung wir im folgenden Paragraphen übergehen.

§. 10.

Wir wenden uns jetzt zu der Betrachtung derjenigen Körper, die von zwei parallelen Vielecken als Endflächen und von Paralleltrapezen oder Dreiecken als Seitenflächen begrenzt werden. Wir haben diese Körper unter der Collectivbenennung *Obelisken* zusammengefafst, und sie gehen für den besonderen Fall in vielkantige Pyramiden über, wenn alle ihre Seitenkanten sich, hinreichend verlängert, in einem und demselben Puncte schneiden.

Um zunächst die Gleichung für die Scale dieser Körper herzuleiten, seien f und f' die Inhalte der beiden mit einander parallelen Endflächen, und h sei die Entfernung zwischen denselben oder die Höhe des Körpers. Wir betrachten jene Endflächen der gröfseren Allgemeinheit wegen als ungleich, und um die Begriffe zu fixiren, nehmen wir f' als die kleinere Fläche an; was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann. Die Seiten des Vielecks f sollen mit a, b, c, d .... etc., die des Vielecks f' mit a', b', c', d' .... etc. bezeichnet werden, wobei die letzteren Seiten nach der Reihe als parallel mit den ersteren zu denken sind, so dafs also die von gleichnamigen Seiten beider Vielecke gebildeten Winkel einander paarweise gleich sind. Nach bekannten Lehren der Polygonometrie hat man nun

$$f = \tfrac{1}{2}[ab \,.\, \sin(ab) + ac \,.\, \sin(ac) + \ldots + bc \,.\, \sin(bc) + \ldots \text{ etc.}],$$
$$f' = \tfrac{1}{2}[a'b' \,.\, \sin(a'b') + a'c' \,.\, \sin(a'c') + \ldots + b'c' \,.\, \sin(b'c') + \ldots \text{ etc.}],$$

oder, wenn man der Kürze wegen die Sinusse der Winkel (ab), (ac), ... (bc) etc., so wie die der gleichen Winkel $(a'b')$, $(a'c')$, ... $(b'c')$ etc. nach der Reihe mit σ, σ', σ'' .... etc. bezeichnet,

$$f = \tfrac{1}{2}.\Sigma(ab\sigma); \qquad f' = \tfrac{1}{2}.\Sigma(a'b'\sigma).$$

Nun sei Φ der Inhalt eines mit den Endflächen f und f' parallelen Querschnittes, der in dem Abstande x von der kleineren Endfläche f' durch den Körper gelegt ist, und α, β, γ, δ .... seien die Seiten dieses Querschnitts, so ergiebt sich, auf gleiche Weise wie vorhin,

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\Sigma(\alpha\beta.\sin(\alpha\beta)) = \tfrac{1}{2}\Sigma(\alpha\beta\sigma),$$

da die Winkel $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\beta\gamma)$ .... den vorigen Winkeln der Reihe nach gleich sind.

Um die Querschnittsfläche Φ als Function ihres Abstandes x von der einen Endfläche darzustellen, hat man, nach einem bekannten Gesetz beim Paralleltrapeze, die Relationen:

$$\alpha h = ax + a'(h-x), \quad \text{daraus} \quad \alpha = \frac{(a-a')x+a'h}{h},$$

$$\beta h = bx + b'(h-x), \quad - \quad \beta = \frac{(b-b')x+b'h}{h},$$

$$\gamma h = cx + c'(h-x), \quad - \quad \gamma = \frac{(c-c')x+c'h}{h} \quad \text{u. s. w.}$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck von Φ, so gestaltet sich derselbe wie folgt:

$$\Phi = \frac{1}{2h^2}.\Sigma[(a-a')(b-b')\sigma x^2 + ((a-a')b' + (b-b')a')\sigma hx + a'b'\sigma h^2],$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left\{\begin{array}{l} [\Sigma ab\sigma + \Sigma a'b'\sigma - \Sigma(ab'+a'b)\sigma].x^2 \\ +h[\Sigma(ab'+a'b)\sigma - 2.\Sigma a'b'\sigma].x + h^2.\Sigma a'b'\sigma \end{array}\right\}.$$

Nun ist $\Sigma ab\sigma = 2f$, $\Sigma a'b'\sigma = 2f'$, und wenn man die Gröfse $\Sigma(ab'+a'b)\sigma$, welche ebenfalls eine gewisse, noch näher zu bestimmende Fläche ausdrückt, gleich $2f''$ setzt, so kommt

$$\Phi = \frac{1}{h^2}[(f+f'-f'')x^2 + h(f''-2f')x + h^2 f'];$$

welches die Gleichung der Scale des in Rede befindlichen Körpers ist.

§. 11.

Es kommt nunmehr noch darauf an, die Lage jener Scale gegen die zugehörige Abscissen-Achse näher zu untersuchen. Setzen wir zu dem Ende in der vorigen Gleichung die zu einem beliebigen Curvenpunct

gehörige Ordinate $\Phi = 0$, so findet man diejenigen Werthe von x, welche die etwanigen Durchschnittspuncte der fraglichen Curve mit der Abscissen-Achse oder deren Verlängerung bestimmen. Dadurch ergeben sich die beiden Werthe

$$x' = -\frac{\frac{1}{2}h}{f+f'-f''}[f''-2f'-\surd(f''^2-4ff')]$$

und $$x'' = -\frac{\frac{1}{2}h}{f+f'-f''}[f''-2f'+\surd(f''^2-4ff')].$$

Hiernach finden zwei Durchschnittspuncte oder gar keiner statt, je nachdem diese beiden Ausdrücke reell oder imaginär sind; und für den besondern Fall, daſs die Radicalgröſse in der Klammer gleich Null wird, hat die Scale nur einen Punct mit der Abscissen-Achse gemein, die dann also eine Tangente für sie ist.

Damit beide Werthe von x reell ausfallen, muſs $f''^2 > 4ff'$ sein, und da zugleich nach der gemachten Voraussetzung $f > f'$ ist, so wird um so mehr $f''^2 > 4f'^2$, mithin $f'' > 2f'$ sein, so daſs also die Gröſse $f''-2f'$ jedenfalls positiv ist. Uebrigens können jene Werthe von x sowohl positiv als negativ ausfallen; was einzig und allein von dem Verhältniſs zwischen den Gröſsen $f''-2f'$ und $\surd(f''^2-4ff')$ abhängt. Eine einfache Betrachtung zeigt nemlich, daſs die beiden Klammergröſsen in den Ausdrücken von x' und x'' mit der als Nenner darin vorkommenden Gröſse $f+f'-f''$ entweder einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, jenachdem $f''-2f' >$ oder $< \surd(f''^2-4ff')$ ist, und in dem einen Falle würden sich dann jene Ausdrücke beide negativ, in dem andern aber beide positiv ergeben. Bei den nachfolgenden Untersuchungen kommt es indessen hierauf nicht weiter an, und da es also gleichgültig ist, welche Annahme man machen will, so setzen wir zur Fixirung der Begriffe den ersten Fall voraus, der sich in der Ausübung am häufigsten ereignet. Demgemäſs liegen die beiden Durchschnittspuncte auf der negativen Seite der Abscissen-Achse, wie es in Fig. 5. dargestellt ist, wo P den Coordinaten-Anfang, PM die positive Seite der Abscissen-Achse repräsentirt, während L und L' die fraglichen Durchschnittspuncte sind. Man hat dann $PL = x'$, $PL' = x''$, und wenn man den Abstand LL' in I halbirt, so ist

$$PI = \tfrac{1}{2}(x'+x'') = -\tfrac{1}{2}h \cdot \frac{f''-2f'}{f+f'-f''}$$

die Abscisse des Curvenpunctes V, zu welchem IV als Ordinate gehört. Um letztere zu finden, muſs man den vorstehenden Ausdruck anstatt x in

die allgemeine Gleichung des vorigen Paragraphen setzen. Dadurch ergiebt sich

$$IV = -\frac{f''^2-4ff'}{4(f+f'-f'')},$$

und der Punct V liegt daher, wie natürlich, unterhalb der Abscissen-Achse.

§. 12.

Die vorhin gefundenen Ausdrücke x' und x'' werden beide imaginär, wenn $f''^2 < 4ff'$ ist, und in diesem Falle hat die Scale keinen Punct mit ihrer Abscissen-Achse gemein, wohingegen sich jetzt für die zugehörigen Ordinaten ein Minimum nachweisen läfst. Derjenige Werth von x, der einem Maximum oder Minimum entspricht, wird aus der allgemeinen Gleichung §. 10. gefunden, wenn man $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ setzt. Dadurch ergiebt sich

$$x = -\tfrac{1}{2}h\frac{f''-2f'}{f+f'-f''},$$

und das Vorzeichen von $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = f+f'-f''$ entscheidet demnächst, ob ein Maximum oder ein Minimum statt findet. Nach der Voraussetzung ist aber $f''^2 < 4ff'$, und da bekanntlich $4ff' = (f+f')^2-(f-f')^2$, also $(f+f')^2 > 4ff'$, so ist um so mehr $f''^2 < (f+f')^2$, mithin $f'' < f+f'$. Demnach kann $f+f'-f''$ nur positiv sein, und der obige Werth von x entspricht daher einem Minimum. Setzt man denselben in die allgemeine Gleichung, so findet man die kleinste Ordinate $= \frac{4ff'-f''^2}{4(f+f'-f'')}$, die daher jedenfalls positiv ist und somit einem Puncte entspricht, der oberhalb der Abscissen-Achse liegt.

Stellt in Fig. 5. die Gerade pm für den jetzt in Rede befindlichen Fall die Abscissen-Achse, p den Aufangspunct der Coordinaten vor, und hat man auf der linken Seite dieses Punctes das Stück

$$pi = \tfrac{1}{2}h\frac{f''-2f'}{f+f'-f''}$$

abgetragen, so repräsentirt die darauf Senkrechte

$$iV = \frac{4ff'-f''^2}{4(f+f'-f'')}$$

die kleinste Ordinate, oder die Entfernung des tiefsten Curvenpunctes V von der Abscissen-Achse.

Für die Bedingung $f''^2 = 4ff'$ wird die kleinste Ordinate gleich

Null, und der Ausdruck für die zugehörige Abscisse reducirt sich auf

$$x = -h \cdot \frac{\sqrt{f'}}{\sqrt{f}-\sqrt{f'}}.$$

Diesen Resultaten gemäfs geht die Abscissen-Achse, welche in Fig. 5. von der Linie $\pi\mu$ dargestellt wird, durch den tiefsten Curvenpunct V, und der obige Werth von x bestimmt den Abstand πV.

§. 13.

Man nehme nun V zum Anfangspunct der Coordinaten, die auf LL' normale Linie VW zur Abscissen-Achse, und bezeichne die Coordinaten VW und WS des beliebigen Curvenpunctes S bezüglich mit t und u. Sofern nun x und Φ die früheren Coordinaten dieses Punctes sind, hat man mit Bezugnahme auf Fig. 5.

$$\left.\begin{array}{r} x = u - Pl \\ \text{oder } x = u - pi \end{array}\right\} = u - \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{f''-2f'}{f+f'-f''},$$

$$\left.\begin{array}{r} \Phi = t + IV \\ \text{oder } \Phi = t - iv \end{array}\right\} = t - \frac{f''^2-4ff'}{4(f+f'-f'')}.$$

Setzt man diese Werthe anstatt x und Φ in die allgemeine Gleichung der Scale (§. 10.), so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$u^2 = \frac{h^2}{f+f'-f''} \cdot t;$$

welches wieder die Gleichung der gewöhnlichen Parabel ist, die also nun auch für die unter der Collectivbenennung der Obelisken zusammengefafsten Körper die Scale ihres Inhaltes darstellt.

Demnach bestimmt sich der Cubik-Inhalt des zwischen den parallelen Vielecken f und f' enthaltenen Körperstückes, mag dieses nun von der Fläche $PQNM$, $pQNm$, oder von der Fläche $\pi QN\mu$ (Fig. 5.) dargestellt werden, ganz auf dieselbe Weise, wie es in §. 6. für das hyperbolische Conoïd gezeigt wurde, durch die Formel

$$K = \tfrac{1}{3}h\left(2\varphi + \frac{f+f'}{2}\right),$$

und für den Schwerpuncts-Abstand dieses Körpers von der Fläche f' gilt ebenso die bereits früher gefundene Formel

$$z = h \cdot \frac{2\varphi+f}{f'+4\varphi+f},$$

wo φ, wie früher, den mittleren Durchschnitt und h den Abstand der Endflächen f und f' von einander bezeichnet.

§. 14.

In den vorhergehenden Paragraphen hat sich ergeben, dafs die Scale der Obelisken sich mit der zugehörigen Abscissen-Achse entweder in zwei Puncten oder gar nicht schneidet, je nachdem die Gröfse f''^2 gröfser oder kleiner als $4ff'$ ist, und dafs für den besonderen Fall, wo diese beiden Gröfsen einander gleich sind, zwischen jenen beiden Linien eine blofse Berührung stattfindet.

Im ersteren Falle werden die Ordinaten der Scale QN (Fig. 5.) in den beiden Puncten L und L' zu Null, zwischen denselben aber negativ und jenseits L' wieder positiv, was folglich ganz eben so für die durch diese Ordinaten dargestellten Querschnitte des Körpers gilt. Dies ist jedoch nicht so zu verstehen, als wenn beim Verlängern des Körpers, über die kleinere Endfläche f' hinaus, sich die den Puncten L und L' entsprechenden Querschnitte jedesmal auf einen Punct oder auf eine gerade Linie reducirten, wodurch sie absolut zu Null würden. Dieser Fall kann, wie leicht erhellet, nur unter sehr besonderen Umständen eintreten. Im Allgemeinen hat man jenes Nullwerden der Querschnitte im algebraischen Sinne zu nehmen, so nemlich, dafs ein Theil des Querschnittes durch das Schneiden der Längenkanten negativ geworden, während ein anderer gleich grofser Theil noch positiv geblieben ist, und umgekehrt.

Die den Puncten L und L' entsprechenden Stellen des Körpers, wo die Querschnitte desselben, indem sie aus dem positiven in den negativen Zustand und von diesem wieder in jenen übergehen, algebraisch zu Null werden, kann man füglich die *Knoten* des Körpers nennen; und es folgt aus der obigen Darstellung, dafs jeder Körper der hier in Betracht gezogenen Art nur zwei solcher Knoten, und nicht mehr, haben kann. Sie finden jedesmal statt, wenn alle Längenkanten nach derselben Seite hin convergiren, und dann zerfällt der Körper in drei Theile, von welchen die beiden äufsern positiv, der mittlere, zwischen den Knoten liegende Theil aber negativ zu nehmen ist. Jene werden in Fig. 5. durch die Flächen LMN und $L'M'N'$, dieser dagegen durch die Fläche LVL' dargestellt.

Tritt hierbei der besondere Fall ein, dafs alle Längenkanten, wenn man sie hinreichend verlängert, sich in einem und demselben Puncte schneiden, dafs also der Körper eine Pyramide ist, so fallen auch die Knoten in diesem Puncte zusammen, und der zwischen ihnen liegende negative Körper verschwindet alsdann. Für diese Voraussetzung stellt in Fig. 5. die

Fläche $NV\mu$ den Inhalt der Pyramide, und die Fläche $N'V\mu'$ den Inhalt der, durch die Verlängerung ihrer Kanten entstehenden, entgegengesetzten Pyramide dar.

Endlich kann es sich auch ereignen, dafs beim Verlängern der Kanten gar keine Knoten entstehen, wenn nemlich mehrere Kanten parallel mit einander, die durch sie begrenzten Seitenflächen des Körpers also Parallelogramme sind. Wenn dann zwei nicht parallele Kanten sich schneiden, wodurch sich die zwischenliegende Seitenfläche in ein sogenanntes *übergeschlagenes* Trapez verwandelt, so wird zwar der angrenzende Theil des Querschnittes in Bezug auf den übrigen Theil negativ, allein der positive Theil bleibt immer überwiegend. Ueberdies wird durch das successive Schneiden der übrigen, nicht parallelen Kanten der bereits negativ gewordene Theil der Fläche allmälig wieder in das Positive hinüber gezogen und die Fläche erlangt ihren früheren Werth wieder. In diesem Fall, der in Fig. 5. durch $pQNm$ dargestellt ist, nimmt der Querschnitt bis zu einem gewissen, durch die Ordinate iV dargestellten Minimum ab, und wächst dann nach demselben Gesetze wieder; der Körper erleidet also nur eine partielle Einziehung, eine *Contraction* seines Querschnittes.

§. 15.

Die im vorigen Paragraphen betrachteten Erscheinungen sind im Wesentlichen durch die Gröfse f'' bedingt, und hängen namentlich von der Beziehung zwischen dieser Gröfse und den beiden Endflächen f und f' ab. Nach §. 10. war

$$f'' = \tfrac{1}{2}.\Sigma(ab'+a'b)\sigma,$$

und nun läfst sich der auf der rechten Seite stehende Ausdruck mit Hülfe des mittleren Querschnittes Φ auf folgende Weise bestimmen.

Sind, wie früher angenommen, $a, b, c \ldots.$ die Seiten von f; $a', b', c' \ldots.$ die homologen Seiten von f' und $\sigma, \sigma', \sigma'' \ldots.$ die Sinusse der zwischen je zwei homologen Seiten enthaltenen Winkel, so werden die Seiten des mittleren Querschnitts Φ bezüglich gleich $\frac{1}{2}(a+a')$, $\frac{1}{2}(b+b')$, $\frac{1}{2}(c+c') \ldots.$ etc. sein, und es ergiebt sich der Inhalt

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\Sigma\left(\frac{a+a'}{2}.\frac{b+b'}{2}.\sigma\right) = \tfrac{1}{8}.\Sigma((a+a')(b+b')\sigma).$$

Diese Gleichung läfst sich durch das Auflösen der Klammern in folgende verwandeln:

$$8\Phi = \Sigma(ab\sigma)+\Sigma(a'b'\sigma)+\Sigma(ab'+a'b)\sigma,$$

und da $\Sigma(ab\sigma) = 2f$, $\Sigma(a'b'\sigma) = 2f'$ und $\Sigma(ab'+a'b)\sigma = 2f''$ ist, so hat man die Gleichung

$$4\Phi = f+f'+f'',$$

woraus $$f'' = 4\Phi-(f+f') \text{ folgt.}$$

Nun waren die Bedingungen für das Eintreten der im vorigen Paragraphen betrachteten Erscheinungen, zufolge §. 11. u. f.,

$$f''^2 \gtreqless 4ff', \quad \text{oder} \quad f'' \gtreqless 2\sqrt{(ff')};$$

und wenn für f'' der obige Werth gesetzt wird:

$$4\Phi-(f+f') \gtreqless 2\sqrt{(ff')}.$$

Hieraus ergiebt sich ferner sehr leicht die Bedingungsgleichung

$$4\Phi \gtreqless (\sqrt{f}+\sqrt{f'})^2,$$

$$\text{oder} \quad 2\sqrt{\Phi} \gtreqless \sqrt{f}+\sqrt{f'}.$$

Wenn man also den Obelisken in der Mitte zwischen seinen Endflächen und parallel mit denselben schneidet, und es findet sich: dafs die doppelte Quadratwurzel aus dem mittleren Durchschnitt Φ *gröfser* ist, als die Summe der Wurzeln aus den Endflächen, so bildet der Körper, beim Verlängern desselben, jenseits der kleineren Endfläche allemal zwei Knoten. Ist aber die doppelte Wurzel aus dem mittleren Querschnitt *kleiner* als die Summe der Wurzeln aus den Endflächen, so entstehen keine Knoten, sondern der Körper erleidet nur eine partielle Contraction seines Querschnittes; und wenn endlich die doppelte Wurzel aus dem mittleren Querschnitt der Summe der Wurzeln aus den Endflächen *gleich* ist, so schneiden sich alle Seitenkanten in einem und demselben Puncte und der Körper ist eine abgekürzte vielseitige Pyramide.

§. 16.

Fassen wir zum Schlusse die Haupt-Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung zusammen, so zeigt sich, sie bestehen darin, dafs es für alle im Eingange dieser Abhandlung genannten Körper eine einzige Formel zur Bestimmung ihres Inhalts giebt, und dafs eben so der Schwerpunct dieser Körper nach einer und derselben Formel bestimmt wird. Es war nemlich

$$\text{die Inhaltsformel} = \tfrac{1}{3}h\left(2\Phi+\frac{f+f'}{2}\right),$$

$$\text{die Schwerpunctsformel} = h\,\frac{2\varphi+f}{f'+4\varphi+f}.$$

Nach der ersten Formel ergiebt sich der Inhalt eines jeden der fraglichen Körper:

„Wenn man den doppelten mittleren Durchschnitt zu dem arithmeti-„schen Mittel der beiden Endflächen addirt und die Summe mit dem „dritten Theil der Höhe des Körpers multiplicirt."

Die obigen Formeln sind zunächst nur für solche Körper als allgemein gültig nachgewiesen, deren Scale die apollonische Parabel ist; allein dies sind so ziemlich alle Körper, die in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Geometrie, mit Ausnahme der regelmäfsigen Polyëder, betrachtet zu werden pflegen, und welche die meiste Anwendung in der Praxis finden. — In wiefern auch noch andere Körper zu der Gattung der Eingangs erwähnten (die eine parabolische Scale haben) gehören, und in wiefern namentlich diejenigen Körper, die von Oberflächen des zweiten Grades umschlossen werden, sich auf eine ähnliche Weise durch Betrachtung der zugehörigen Scale behandeln lassen, bleibt einer spätern Mittheilung vorbehalten.

Uebrigens mufs erwähnt werden, dafs die bei dieser Untersuchung zum Grunde gelegten Fundamentalgesetze schon früher in Anwendung gekommen sind. Der schwedische Vice-Admiral *Chapman* in seinem Werke über Schiffbaukunst *) wendete sie zuerst an, um mit Hülfe der von *Thomas Simpson* angegebenen Näherungsformel zur Bestimmung des Flächen-Inhaltes unregelmäfsiger Figuren die Stabilität der Schiffsgefäfse näherungsweise zu berechnen.

Berlin im December 1842.

---

*) Traité de la construction des vaisseaux, traduit du Suédois par *Vial du Clairbois.* Paris 1781.

9.

Angenäherte Bestimmung der Factorenfolge

$$1.2.3.4.5\ldots n = \Gamma(1+n) = \int x^n e^{-x}\,dx,$$

wenn n eine sehr grosse Zahl ist.

(Vom Herrn Professor *Raabe* in Zürich.)

In der *Théorie analytique des probabilités* theilt *Laplace* ein Verfahren mit, die in der Ueberschrift angegebene Factorenfolge, für den Fall, wenn n eine sehr große Zahl vorstellt, dergestalt umzuformen, daß der neugewonnene Ausdruck, dem Zwecke der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechend, nur angenähert den Werth des erstern repräsentire, dafür aber den Vortheil, äußerst schnell zur numerischen Bestimmung desselben zu führen, gewähre. Ganz denselben Gang, *Laplace's* Resultat zu erhalten, befolgt auch *Poisson* in seinem classischen Werke über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Warum aber *Poisson*, der in mehreren Theilen dieses Werkes, namentlich bei den Principien, die wissenschaftliche Strenge, insoweit solche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich ist, genau beobachtete, und darin gerade seinem großen Vorarbeiter auf diesem Gebiete den Vorrang abgewann: warum *Poisson* gerade dort, wo er sich auf rein-mathematischem Boden befand, unverändert seinem großen Meister folgte, und nicht, wie an anderen Stellen selbstständig auftrat, bleibt mir unerklärlich; es müßte mir denn die Hypothese zu machen verstattet sein, daß man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch mit bloß wahrscheinlichen Resultaten sich begnügen dürfe.

In den vorliegenden Blättern wird der in der Ueberschrift angedeutete Gegenstand mit jener wissenschaftlichen Strenge erörtert werden, welche Untersuchungen über rein-mathematische Größen vor andern zukommt um auf gut beleuchtetem Wege einem in allen Beziehungen kenntlichen Resultate zuzusteuern, bei welchem die Grenzen des Statthabens auf unzweideutige Weise festgestellt sind.

1.

Bezeichnet man mit *Legendre* das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

durch $\Gamma(a)$, so findet, wie bekannt, die Gleichung

$$\text{I.} \quad \Gamma(a) = \frac{1.2.3.4\ldots\ldots k.k^{a-1}}{a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots\ldots(a+k-1)}$$

Statt, wo a eine beliebige positive reelle Zahl und k eine unendlich-grofs werdende positive ganze Zahl vorstellt.

Aus dieser Gleichung folgt

$$1. \quad \Gamma(1) = 1,$$

und, mit Beachtung der Bedeutung von k, auch folgende Relation:

$$\text{II.} \quad \Gamma(1+a) = a\Gamma(a),$$

die, wenn für a nach und nach die ganzen Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, ... n gesetzt werden, auf folgende Gleichung führt:

$$2. \quad \Gamma(1+n) = 1.2.3.4.5\ldots\ldots n.$$

Die Umformung dieses Factoren-Ausdruckes macht den Inhalt der gegenwärtigen Abhandlung aus.

Ferner hat man die allgemeine Relation

$$\text{III.} \quad \Gamma(na) = \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)n^{na-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}},$$

welche für alle positive reelle Werthe von n besteht und fast alle Eigenthümlichkeiten der Function $\Gamma(a)$ umfafst.

Die Wichtigkeit dieser allgemeinen Relation, oder des durch dieselbe ausgesprochenen Theorems, die Function $\Gamma(a)$ betreffend, ist bis jetzt nur vom theoretischen Gesichtspuncte genügend erkannt worden. Folgerungen aus diesem Theorem sind meines Wissens nur wenige gemacht worden. Die meisten Schriftsteller, die diesen Gegenstand behandelten, *Legendre* mitbegriffen, setzten sich als Ziel ihrer Untersuchungen das Theorem selbst vor; hier aber angelangt, nimmt man fast keine Spur wahr, dafs es, in seiner Allgemeinheit, auch Einflufs auf die übrige Analysis ausgeübt habe. Mehrere nicht uninteressante Folgerungen aus dem Theorem habe ich bereits gewonnen. Da ich aber dieselben als noch nicht geschlossen betrachte, und auch befürchte, durch Mittheilung aller von mir bereits gewonnenen Ergebnissen den vorliegenden Gegenstand zu sehr in den Hintergrund zu stellen, habe ich es vorgezogen, nur diejenigen Fol-

gerungen aus dem Theoreme in der folgenden Nummer mitzutheilen, die zur Erreichung meines hier vorgesteckten Zieles unerläfslich sind. Erst nach Mittheilung dieser Folgerungen werde ich zum eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Abhandlung übergehen.

2.

Bezeichnet man durch $\log A$ den natürlichen Logarithmen von A, so bietet das Theorem in (III.) auch folgende Gleichung dar:

$$\log\Gamma(na) = \log\Gamma(a) + \log\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right) + \log\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \log\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$+ (na - \tfrac{1}{2})\log n - \frac{(n-1)}{2}\log 2\pi.$$

Läfst man hier n eine unendlich-grofs werdende Zahl bedeuten und setzt

$$\omega = \frac{1}{n},$$

wo dann ω eine ohne Ende abnehmende Zahlengröfse vorstellt, so geht diese Gleichung, nach geschehener Multiplication mit ω, in folgende über:

$$\int_a^{a+1}\log\Gamma(x)\partial x = \omega\log\Gamma\left(\frac{a}{\omega}\right) + (a - \tfrac{1}{2}\omega)\log\omega + \frac{1-\omega}{2}\log 2\pi.$$

Wird ferner a als unendlich-klein werdende positive Gröfse behandelt und gleich $m\omega$ gesetzt, wo m irgend eine endliche positive Zahl bedeutet, so erhält man die Gleichung

$$3.\quad \int_0^1 \log\Gamma(x)dx = \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Aus der allgemeinen Gleichung (II.) zieht man ferner die folgende bekannte Relation:

$$\Gamma(x-p) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+p-1)\Gamma(x).$$

Löset man dieselbe logarithmisch auf, multiplicirt nachher auf beiden Seiten vom Gleichheitszeichen mit dx und integrirt hierauf sämmtliche Glieder von $x=0$ bis $x=1$, so erhält man, mit Zuziehung der eben gewonnenen Gleichung (3.), die folgende:

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+p)dx = \sum_{r=0}^{r=p-1}\int_0^1 \log(x+r)dx + \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Es ist aber

$$\int \log(x+r)dx = (x+r)\{\log(x+r)-1\} + \text{Const.},$$

folglich auch

$$\int_0^1 \log(x+r)\,dx = (1+r)\{\log(1+r)-1\} - r\{\log r - 1\},$$

wodurch die vorige Gleichung in folgende übergeht:

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+p)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{r=0}^{r=p-1}\{(1+r)\log(1+r)-(1+r)\} - \sum_{r=0}^{r=p-1}\{r\log r - r\}.$$

Erwägt man, dafs der Ausdruck $r\log r - r$ für $r=0$ in Null übergeht, so kann der letzteren Gleichung auch folgende Form gegeben werden:

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+p)\,dx = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{r=1}^{r=p}\{r\log r - r\} - \sum_{r=1}^{r=p-1}\{r\log r - r\},$$

aus welcher endlich folgende neue Integralbestimmung gefolgert wird:

$$4.\quad \int_0^1 \log\Gamma(x+p)\,dx = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + p\log p - p;$$

welche Gleichung, wie alle vorhergehenden, für ganze und positive Werthe von p besteht.

3.

Wir schicken uns nunmehr an, die Erörterung des Gegenstandes vorliegender Abhandlung vorzunehmen und gehen dabei gleichfalls von dem Theoreme in der Gleichung (III.) aus.

Wird in dieser Gleichung $a=1$ angenommen, so hat man

$$\Gamma(n) = \Gamma\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(1+\tfrac{2}{n}\right)\Gamma\left(1+\tfrac{3}{n}\right)\;\ldots\;\Gamma\left(1+\tfrac{n-1}{n}\right)n^{n-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit n und berücksichtiget die Gleichung (II.), so hat man auch

$$\Gamma(1+n) = n^n\sqrt{(2n\pi)}\,\Gamma\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(1+\tfrac{2}{n}\right)\;\ldots\;\Gamma\left(1+\tfrac{n-1}{n}\right)(2\pi)^{-\frac{1}{2}n},$$

welches, logarithmisch aufgelöset und hernach auf beiden Seiten durch n didividirt, auf folgende Gleichung führt:

$$\frac{1}{n}\log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\log\Gamma\left(1+\tfrac{1}{n}\right)+\log\Gamma\left(1+\tfrac{2}{n}\right)+\log\Gamma\left(1+\tfrac{3}{n}\right)+\ldots+\log\Gamma\left(1+\tfrac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Die Gleichungen (1.) und (2.) führen auf

$$\log\Gamma(1) = 0 \quad\text{und}\quad \log\Gamma(2) = 0.$$

Berücksichtiget man diese Ergebnisse und ersetzt in der so eben gewonnenen

Gleichung, rechts vom Gleichheitszeichen, $\frac{1}{n}$ durch v, so hat man

$$\frac{1}{n}\log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}} =$$
$$v\{\tfrac{1}{2}\log\Gamma(1)+\log\Gamma(1+v)+\log\Gamma(1+2v)+\ldots+\log\Gamma(2-v)+\tfrac{1}{2}\log\Gamma(2)\} - \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Bevor wir zu dem allgemeinen Fall, wo n eine *beliebige* ganze Zahl bedeutet, übergehen, heben wir den besonderen Fall heraus, wenn n eine unendlich-grofs werdende positive Zahl vorstellt.

Da in diesem Falle, wegen $v=\frac{1}{n}$, die Gröfse v unendlich-klein werdend ist, so hat man, wenn die unendlich-grofs werdende Zahl n durch k vorgestellt wird, die Gleichung

$$\frac{1}{k}\log\frac{\Gamma(1+k)}{k^k\sqrt{(2k\pi)}} = \int_0^1 \log\Gamma(1+x)\,dx - \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Wird in der Gleichung (4.) voriger Nummer $p=1$ angenommen, so hat man

$$\int_0^1 \log\Gamma(1+x)\,dx = -1+\tfrac{1}{2}\log 2\pi,$$

wodurch die vorhergehende Gleichung auf

$$\log\frac{\Gamma(1+k)}{k^k\sqrt{(2k\pi)}} = -k$$

führt, aus welcher

$$\frac{\Gamma(1+k)}{k^k\sqrt{(2k\pi)}} = e^{-k}$$

folgt, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen vorstellt.

Nimmt man nun die Gleichung (2.) zu Hülfe, so hat man

$$1.2.3.4.5\ \ldots.\ k = k^k\sqrt{(2k\pi)}\,e^{-k};$$

welche Gleichheit für unendlich-grofs werdende und für ganze Werthe von k Bestand hat. Stellt aber k eine endliche Zahl vor, so giebt die Gleichheit nur angenähert den Werth der Factorenfolge zur Linken; wie solches aus dem Verfolge dieser Untersuchungen hervorgehen wird.

4.

Zur Umformung des allgemeinen Falles in der vorigen Nummer nehme ich einen Satz zu Hülfe, den ich in meiner Differential- und Integralrechnung Nr. 233. begründet habe, und der folgendermaafsen lautet. Wenn $\varphi(x)$ eine von $x=a$ bis $x=b$ continuirliche Function von x vorstellt,

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... $\varphi_{2m-1}(x)$, $\varphi_{2m}(x)$ die successiven Differentialquotienten dieser Function $\varphi(x)$ nach x bedeuten und der $2m$te Differentialquotient dieser Function, nämlich $\varphi_{2m}(x)$, für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ Werthe mit demselben Zeichen hat, so besteht die Gleichung

$$(A.)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}= v\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\dots+\varphi(a+(n-1)v)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\}\\ -Y_2[\varphi_1(b)-\varphi_1(a)]v^2+Y_4[\varphi_3(b)-\varphi_3(a)]v^4\\ -Y_6[\varphi_5(b)-\varphi_5(a)]v^6+\dots\\ \dots+(-1)^m Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)]v^{2m}\end{aligned}$$

mit einer Genauigkeit, dafs der mögliche Fehler, wenn man den Ausdruck zur Rechten statt des zur Linken, und umgekehrt, setzt, numerisch kleiner als das letzte Glied dieser Gleichung ist.

Hier stellt v eine Zahl vor, die der Gleichung

$$b-a=nv$$

entspricht, wo n eine ganze und positive Zahl ist. Alsdann hat man

$$Y_{2r}=\frac{2}{(2\pi)^{2r}}\left\{1+\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+\dots\right\},$$

oder auch folgende Recursionsgleichungen zur Bestimmung von Y_2, Y_4, Y_6 ....

$$2^2 Y_2=\frac{2}{1.2.3},$$

$$2^4 Y_4-\frac{2^2}{1.2.3}Y_2=\frac{-4}{1.2.3.4.5},$$

$$2^6 Y_6-\frac{2^4}{1.2.3}Y_4+\frac{2^2}{1.2.3.4.5}Y_2=\frac{6}{1.2.3.4.5.6.7},$$

u. s. w.

Um nun diesen Satz auf den vorliegenden allgemeinen Fall anzuwenden, haben wir zuerst zu untersuchen, ob die Function von x

$$\log\Gamma(1+x)$$

für alle Werthe von $x=0$ bis $x=1$ continuirlich sei und ob der $2m$te Differentialquotient derselben Function für dieselben Werthe von x keine Aenderung des Zeichenzustandes erleide. Was das Erste betrifft, weise ich blofs auf die Schriften hin, die von der Function $\Gamma(a)$ handeln; unter andern citire ich meine Differential- und Integralrechnung No. 215, wo die Convergenz der Function $\Gamma(a)$ für alle positiven Werthe von a

dargethan ist, woraus sofort hervorgeht, dafs die Function $\log\Gamma(1+x)$ nicht nur von $x=0$ bis $x=1$, sondern auch von $x=0$ bis $x=a$ beständig einen endlichen Werth hat, wo a jeden endlichen und positiven Werth vorstellen kann. Betreffend das Zweite, so stellen wir zur Begründung desselben die aufeinander folgenden Differentialquotienten der Function $\log\Gamma(1+x)$ her.

Zu diesem Ende sei der Kürze wegen

$$\varphi(x) = \log\Gamma(1+x),$$

so hat man, mit Zuziehung der Gleichung (I.),

$$\varphi(x) = x\log k + \log 1.2.3.4.5 \ldots\ldots k$$
$$- \{\log(1+x) + \log(2+x) + \log(3+x) + \ldots\ldots + \log(k+x)\}.$$

Differentiirt man diese Gleichheit nach einander in Bezug auf x, so ergeben sich folgende Gleichheiten:

$$\varphi_1(x) = \log k - \left\{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \ldots\ldots + \frac{1}{k+x}\right\},$$

$$\varphi_2(x) = \left\{\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \frac{1}{(3+x)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(k+x)^2}\right\},$$

$$\varphi_3(x) = -1.2\left\{\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} + \frac{1}{(3+x)^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{(k+x)^3}\right\},$$

. . . .

$$\varphi_{2m-1}(x) = 1.2.3\ldots\ldots(2m-2)\left\{\frac{1}{(1+x)^{2m-1}} + \frac{1}{(2+x)^{2m-1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(k+x)^{2m-1}}\right\},$$

$$\varphi_{2m}(x) = 1.2.3\ldots\ldots(2m-1)\left\{\frac{1}{(1+x)^{2m}} + \frac{1}{(2+x)^{2m}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(k+x)^{2m}}\right\},$$

in welchen k eine unendlich-grofs werdende, ganze positive Zahl vorstellt.

Die letzte dieser Gleichheiten zeigt ganz deutlich, dafs die Function $\varphi_{2m}(x)$ für alle Werthe von $x=0$ bis $x=a$, wo a irgend eine positive Zahl ist, beständig positiv bleibt.

Dieses vorausgesetzt, sind wir den hier aufgeführten Satz auch auf das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \log\Gamma(1+x)\,dx$$

anzuwenden berechtigt. Da man, wenn die eben aufgestellten Werthe von $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_{2m-1}(x)$ berücksichtiget werden, folgende Gleichungen erhält:

$$\varphi_1(1)-\varphi_1(0) = 1,$$
$$\varphi_3(1)-\varphi_3(0) = 1.2,$$
$$\varphi_5(1)-\varphi_5(0) = 1.2.3.4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_{2m-1}(1)-\varphi_{2m-1}(0) = 1.2.3.4.5.6\;\dots.\;(2m-2),$$

so giebt die vorhin aufgeführte allgemeine Gleichung (*A.*) folgende andere:

$$\int_0^1 \log\Gamma(1+x)\,dx =$$
$$v\{\tfrac{1}{2}\log\Gamma(1)+\log\Gamma(1+v)+\log\Gamma(1+2v)+\dots.+\log\Gamma(1+(n-1)v+\tfrac{1}{2}\log\Gamma(2)\}$$
$$-Y_2v^2+1.2Y_4v^4-1.2.3.4Y_6v^6\dots.+(-1)^m 1.2.3\dots.(2m-2)\,Y_{2m}v^{2m},$$

für welche

$$vn = 1 \quad\text{oder}\quad v = \frac{1}{n}$$

gesetzt wurde, mit einer Genauigkeit, dafs die Gröfse des Fehlers, mit welchem sie bestehet, numerisch kleiner als das letzte Glied dieser Gleichung ist.

Nimmt man die Gleichung (4.) zu Hülfe, so hat man

$$\int_0^1 \log\Gamma(1+x)\,dx = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - 1:$$

daher besteht folgende Gleichheit:

$$v\{\tfrac{1}{2}\log\Gamma(1)+\log\Gamma(1+v)+\log\Gamma(2+v)+\dots.+\log\Gamma(2-v)+\tfrac{1}{2}\log\Gamma(2)\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\log 2\pi-1+Y_2v^2-1.2Y_4v^4+1.2.3.4Y_6v^6-\dots$$
$$\dots+(-1)^{m-1}1.2.3\dots.(2m-2)Y_{2m}v^{2m},$$

mit derselben Genauigkeit.

Wird dieses Ergebnifs mit der Gleichung in Nr. 3, die den Werth von

$$\frac{1}{n}\log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}}$$

darstellt, verglichen, so erhält man, wenn v durch $\frac{1}{n}$ ersetzt wird, die Endgleichung

$$5.\quad \log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}} = -n+\frac{1}{n}Y_2-\frac{1.2}{n^3}Y_4+\frac{1.2.3.4}{n^5}Y_6-\frac{1.2.3.4.5.6}{n^7}Y_8$$
$$+\dots.+(-1)^{m-1}.\frac{1.2.3.4\dots.(2m-2)}{n^{2m-1}}Y_{2m}.$$

Obwohl die Gliederreihe zur Rechten in dieser Gleichung, wenn sie in's Unendliche fortgesetzt würde, wie in der folgenden Nummer gezeigt werden soll, zu den divergenten, oder mindestens zu den sogenannten schwankenden gezählt werden müfste, eignet sich dennoch, den

Ausdruck zur Linken angenähert zu bestimmen; und zwar aus dem Grunde, daſs man bei jedem Gliede, mit dem man die Rechnung abbricht, über die Beschaffenheit des möglichen Fehlers klare Einsicht bekommt. *Dieser Fehler ist nach dem Vorangeschickten jedesmal numerisch kleiner, als das letzte Glied, mit welchem die Rechnung schlieſst.*

Diese Reihe, oder die mit derselben verwandte, welche gewonnen wird, wenn man die Gröſsen Y_2, Y_4, Y_6, Y_8, ... durch die Bernoullischen Zahlen ausdrückt, ist schon vor *Laplace*, von *Euler* und *Legendre* zu demselben Zwecke mitgetheilt worden; allein, soweit ich diese Schriftsteller verstehe, unterlieſsen sie sämmtlich, über die Beschaffenheit des jedesmal möglichen Fehlers etwas streng Begründetes mitzutheilen. Jetzt erst, nachdem die Grenzen der Brauchbarkeit der Reihe festgestellt sind, kann dieselbe der Analysis zur gelegentlichen Benutzung einverleibt werden.

5.

Wie aus dem so eben Mitgetheilten hervorgeht, wird man sich der Gleichung (5.) in voriger Nummer am vortheilhaftesten bedienen, wenn man mit demjenigen Gliede abbricht, welches für ein gegebenes n den numerisch-kleinsten Werth hat. Zur Auffindung dieses numerisch-kleinsten Gliedes sowohl, als auch um darzuthun, daſs die Reihe in (5.), in's Unendliche fortgesetzt, zu den schwankenden gehört, wollen wir den Quotienten zweier aufeinander folgenden Glieder der Reihe suchen, aus welchem wir genügenden Aufschluſs über die fraglichen zwei Puncte ziehen werden.

Stellt man zur Vereinfachung durch u_m das allgemeine Glied der Reihe vor, d. h. das Glied, welches Y_{2m} hat, so findet man

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = -\frac{(2m-1)2m}{n^2} \cdot \frac{Y_{2m+2}}{Y_{2m}},$$

oder auch, wenn die in der vorign Nummer für Y_{2r} festgestellte Gleichung berücksichtiget wird,

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = -\frac{(2m-1)2m}{(2n\pi)^2} \cdot \frac{S_{2m+2}}{S_{2m}},$$

wo

$$S_{2m} = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \dots$$

ist. Nun ist $S_{2m} > S_{2m+2}$: also hat man, wenn nur die numerischen Werthe beachtet werden, die Ungleichheit

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{(2m-1)2m}{(2n\pi)^2}$$

und um so mehr die folgende:

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \left(\frac{m}{n\pi}\right)^2,$$

aus welcher folgt, dafs *die Gliederreihe in der Gleichung* (5.), *von der Linken zur Rechten gezählt, so lange abnimmt, als*

$$m \leqq n\pi$$

ist. Wird z. B. $n = 100$ angenommen, so wird die fragliche Reihe wenigstens bis zum 314ten Gliede immerfort abnehmende Glieder haben, so, dafs man sich ihrer am vortheilhaftesten bedienen wird, wenn man mit dem Gliede $Y_{2,314}$ die Rechnung abbricht. Dafs aber dieselbe Reihe, nachdem m den Werth $n\pi$ überschritten, zuletzt wachsende, ja sogar ohne Ende zunehmende Glieder haben wird, folgt gleichfalls aus dem oben für $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ angegebenen Werth. Denn zuerst sieht man, dafs der Quotient $\frac{S_{2m+2}}{S_{2m}}$ um so mehr gegen die Einheit convergirt, je gröfser m wird; der zweite Factor $\frac{(2m-1)2m}{(2n\pi)^2}$ übertrifft wenigstens um eine endliche Gröfse die Einheit, sobald m um irgend eine namhafte Gröfse, z. B. nur um $\frac{1}{2}$, den Werth von $n\pi$ übersteigt, und wird immer gröfser, je gröfser m wird. Als Folge hiervon ergiebt sich sofort die Richtigkeit unserer vorigen Behauptung, dafs im vorliegenden Falle die Glieder der Reihe ohne Ende wachsend und zuletzt unendlich-grofs werdend sich herausstellen. Nun gehören Reihen mit unendlich-grofs werdenden Gliedern sicherlich zu den divergenten, wenn diese unendlich-grofs werdenden Glieder sämmtlich mit denselben Zeichen behaftet sind. Gehen diese Glieder aber Abwechslungen der Zeichen ein, so werden die betreffenden Reihen so lange für schwankende zu erklären sein, bis man auf untrüglichem Wege über ihre Grenzwerthe sich Aufklärung verschafft hat. Die Analysis bietet nämlich mehr als einen Fall dar, wo dergleichen Reihen auch als Repräsentanten von endlichen, ja sogar von unendlich-klein werdenden Gröfsen auftreten. Es dürfte sonach die vorliegende Reihe, wenn dieselbe in's Unendliche fortgesetzt gedacht wird, vor der Hand noch zu den schwankenden oder unbestimmten gezählt werden.

6.

Zufolge des in der vorigen Nummer Mitgetheilten wird die Gleichung (5.) bei numerischen Bestimmungen als brauchbar sich herausstellen, wenn man $m < n\pi$ annimmt, und am allertauglichsten, wenn man für m diejenige ganze Zahl wählt, die unmittelbar an $n\pi$ grenzt. Da man jedoch nie, oder doch nur höchst selten, die Gliederzahl sehr grofs annimmt, so erachten wir es für einen wesentlichen Beitrag zur Theorie der in Rede stehenden Reihe, wenn wir aufser dem in Nr. 4. bereits Erwiesenen noch etwas Näheres über den Genauigkeitsgrad, mit welchem die Gleichung (5.) besteht, hier folgen lassen.

I. Wir betrachten die Gleichung (5.), wenn zur Rechten vom Gleichheitszeichen nur zwei Glieder beibehalten werden.

Man hat alsdann

$$\log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}} = -n+\frac{1}{n}Y_2.$$

Der Fehler, den man hier zu befahren hat, ist vorläufig dem Zeichen nach unbekannt: der Gröfse nach aber ist er, nach Nr. 4, kleiner als $\frac{1}{n}Y_2$. Stellt man unter α einen Bogen vom Radius 1 vor, der folgenden Ungleichheiten genügt:

$$0<\alpha<\pi,$$

so kann dieser Fehler durch $\frac{1}{n}Y_2\cos\alpha$ dargestellt werden und es besteht die fehlerfreie Gleichung

$$\log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}} = -n+\frac{1}{n}Y_2+\frac{1}{n}Y_2\cos\alpha,$$

oder auch

$$\log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}} = -n+\frac{2}{n}Y_2(\cos\tfrac{1}{2}\alpha)^2,$$

oder endlich

$$\log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}e^{-n}} = \frac{2}{n}Y_2(\cos\tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Der Ausdruck zur Rechten stellt für jeden Werth von α eine positive Gröfse vor: daher besteht die Ungleichheit

$$\log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}e^{-n}}>0,$$

oder

$$(\alpha.)\quad \log\frac{\Gamma(1+n)}{n^n\sqrt{(2n\pi)}}>-n.$$

II. Werden in der Gleichung (5.) die drei ersten Glieder rechts vom Gleichheitszeichen beibehalten, so gelangt man durch ähnliche Betrachtungen, wie im vorhergehenden Falle, auf die vollkommen richtige Gleichung

$$\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} = -n + \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} . 2 Y_4 (\cos \tfrac{1}{2} \alpha)^2;$$

wo α dieselbe Bedeutung wie im vorhergehenden Falle hat.

Aus dieser Gleichung erhält man auch folgende:

$$\log \frac{n^n \sqrt{(2n\pi)}}{\Gamma(1+n)} = n - \frac{1}{n} Y_2 + \frac{1.2}{n^3} . 2 Y_4 (\cos \tfrac{1}{2} \alpha)^2,$$

aus welcher, beachtend den Umstand, dafs

$$n - \frac{1}{n} Y_2$$

eine positive Zahl vorstellt, sofort folgende Ungleichheit gezogen wird:

$$\log \frac{n^n \sqrt{(2n\pi)}}{\Gamma(1+n)} > n - \frac{1}{n} Y_2,$$

oder auch

$$(\beta.) \quad \log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} < -n + \frac{1}{n} Y_2;$$

wobei, wie vorhin, $n \geqq 1$ vorausgesetzt wurde.

III. Die Gleichung (5.) bietet ferner auch folgende völlig richtige Gleichung dar:

$$\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} = -n + \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{n^5} . 2 Y_6 (\cos \tfrac{1}{2} \alpha)^2,$$

wo α dieselbe Bedeutung wie in den beiden vorangeschickten Fällen hat.

Stellt man diese Gleichung wie folgt:

$$\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)} e^{-n}} = \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{n^5} . Y_6 (\cos \tfrac{1}{2} \alpha)^2,$$

so ergiebt sich, unter der Annahme, welche am Eingange dieser Nummer über die Gröfse m aus Gleichung (5.) gemacht wurde, da nämlich alsdann der Ausdruck

$$\frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4$$

einen positiven Werth hat, die Ungleichheit

$$\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)} e^{-n}} > \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4,$$

aus welcher

$$(\gamma.) \quad \log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} > -n + \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4$$

gezogen wird.

IV. Läfst man α dieselbe Bedeutung wie bisher, so bietet die Gleichung (5.) auch folgende dar:

$$\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} =$$

$$-n + \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{n^5} Y_6 - \frac{1.2.3.4.5.6}{n^7} . 2 Y_8 (\cos \tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Aendert man hier überall die Zeichen, so hat man auch

$$\log \frac{n^n \sqrt{(2n\pi)}}{\Gamma(1+n)} =$$

$$n - \frac{1}{n} Y_2 + \frac{1.2}{n^3} Y_4 - \frac{1.2.3.4}{n^5} Y_6 + \frac{1.2.3.4.5.6}{n^7} . 2 Y_8 (\cos \tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Unter der Annahme, welche über m aus Gleichung (5.) im Eingange dieser Nummer gemacht wurde, stellen die Gliederpaare

$$n - \frac{1}{n} Y_2 \quad \text{und} \quad \frac{1.2}{n^3} Y_4 - \frac{1.2.3.4}{n^5} Y_6$$

positive Gröfsen vor: also hat man die Ungleichheit

$$\log \frac{n^n \sqrt{(2n\pi)}}{\Gamma(1+n)} > n - \frac{1}{n} Y_2 + \frac{1.2}{n^3} Y_4 - \frac{1.2.3.4}{n^5} Y_6$$

oder auch

$$(\delta.) \quad \log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} < -n + \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{n^5} Y_6.$$

In ähnlicher Weise, wie die Ungleichheiten (α.) und (γ.), beweiset man auch die folgende:

$$\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} > -n + \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{n^5} Y_6 - \frac{1.2.3.4.5.6}{n^7} Y_8;$$

und derselbe Weg, der uns auf die Ungleichheiten (β.) und (δ.) führte, giebt auch noch folgende Ungleichheit:

$$\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} < -n + \frac{1}{n} Y_2 - \frac{1.2}{n^3} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{n^5} Y_6 - \frac{1.2 \ldots 6}{n^7} Y_6 + \frac{1.2 \ldots 8}{n^9} Y_8.$$

Fährt man in dieser Weise fort, so läfst sich folgender Satz, betreffend die Gleichung (5.) aufstellen: *Bricht man in der Reihe zur Rechten der Gleichung* (5.) *mit irgend einem Gliede, das den Factor Y_{2m} hat, ab (wobei jedoch nothwendig $m > n\pi$ sein mufs): so erhält man ein zu grofses oder ein zu kleines Resultat (verglichen mit dem Ausdrucke zur Linken), je nachdem m eine ungerade oder eine gerade Zahl vorstellt.*

Mit Hülfe dieses Satzes kann man jedesmal klar und deutlich den Genauigkeitsgrad in Bezug auf Gröfse und Zeichen ermessen, mit dem die Gleichung (5.) den numerischen Werth des Ausdrucks zur Linken darstellt, wenn man mit dem ersten, zweiten, dritten oder irgend einem Gliede die Rech-

nung abbricht. So zeigen uns z. B. die Ungleichheiten (α.) und (β.), dafs der Werth von $\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}}$ gröfser als $-n$ und kleiner als $-n+\frac{1}{n}Y_2$ sei; setzt man also n unendlich-grofs werdend voraus, so erhellet sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$\log \frac{\Gamma(1+n)}{n^n \sqrt{(2n\pi)}} = -n,$$

woraus

$$\Gamma(1+n) = n^n \sqrt{(2n\pi)}\, e^{-n}$$

folgt; welches Ergebnifs mit dem in Nr. 3. übereinstimmt.

7.

Aus der Gleichung (5.) zieht man

$$\Gamma(1+n) = n^n \sqrt{(2n\pi)}\, e^{-n} . e^{\frac{1}{n}Y_2} . e^{-\frac{1.2}{n^3}Y_4} . e^{\frac{1.2.3.4}{n^5}Y_6} \ldots . e^{(-1)^{m-1}\frac{1.2.3\ldots(2m-2)}{n^{2m-1}}Y_{2m}}.$$

Diese Gleichung wird das möglich-genaueste Resultat darbieten, wenn m diejenige ganze Zahl vorstellt, die kleiner als $n\pi$ ist, aber zunächst an $n\pi$ liegt.

Berücksichtigt man ferner das in der vorhergehenden Nummer begründete Theorem, oder die dort gewonnenen Ungleichheiten (α.), (β.), (γ.), ..., so kann man dem Zahlenwerthe von $\Gamma(1+n)$ oder der Factorenfolge

$$1.2.3.4.5 \ldots . n$$

die durch folgende Ungleichheiten bezeichneten Grenzen anweisen:

$$\Gamma(1+n) > n^n \sqrt{(2n\pi)}\, e^{-n},$$

$$\Gamma(1+n) < n^n \sqrt{(2n\pi)}\, e^{-n}\, e^{\frac{1}{n}Y_2},$$

$$\Gamma(1+n) > n^n \sqrt{(2n\pi)}\, e^{-n}\, e^{\frac{1}{n}Y_2}\, e^{-\frac{1.2}{n^3}Y_4},$$

$$\Gamma(1+n) < n^n \sqrt{(2n\pi)}\, e^{-n}\, e^{\frac{1}{n}Y_2}\, e^{-\frac{1.2}{n^3}Y_4}\, e^{\frac{1.2.3.4}{n^5}Y_6},$$

$$\Gamma(1+n) > n^n \sqrt{(2n\pi)}\, e^{-n}\, e^{\frac{1}{n}Y_2}\, e^{-\frac{1.2}{n^3}Y_4}\, e^{\frac{1.2.3.4}{n^5}Y_6}\, e^{-\frac{1.2\ldots6}{n^7}Y_8}$$

u. s. w.

Alle diese Ergebnisse sind nur für ganze positive Werthe von n abgeleitet und daher nur für solche Werthe als begründet anzusehen. Höchst wahrscheinlich bestehen dieselben aber auch für gebrochene und demnach auch für incommensurable Werthe von n. Solches mit mathematischer Strenge zu begründen, ist mir jedoch bis jetzt nicht gelungen.

Zürich im April 1840.

10.

Ueber die Summation der ohne Ende fortlaufenden harmonisch-periodischen Reihen und über die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x}$.

(Vom Herrn Professor *Raabe* in Zürich.)

(Fortsetzung der Abhandlung Nr. 2. im 23sten Bande Heft 2.)

11.

Wie in Nr. 7. dieser Abhandlung bemerkt worden ist, sind zwei Wege offen, den mit dem doppelten Summenzeichen versehenen Ausdruck in der Gleichung (5.) daselbst umzuformen. Eine dieser Umformungen ist in derselben Nummer vorgenommen und das Ergebnifs in den darauf folgenden Nummern zur Anwendung gebracht worden; mit der zweiten Umformung besagter Gleichung werden wir in den vorliegenden Blättern diesen Gegenstand für einstweilen beschliefsen.

Heben wir in der citirten Gleichung den auf k bezüglichen Summentheil hervor, so haben wir zunächst den Summen-Ausdruck

$$\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos\frac{2kn\pi}{p}\log\sin\frac{k\pi}{2p},$$

nach der in Nr. 6. festgestellten Annahme

$$p\omega = 2r\pi$$

in ein bestimmtes Integral zu verwandeln. Ersetzt man also p durch $\frac{2r\pi}{\omega}$, so hat man

$$\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos\frac{2kn\pi}{p}\log\sin\frac{k\pi}{2p} = \frac{\omega}{r\pi}\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos\frac{kn\omega}{r}\log\sin\frac{k\omega}{4r},$$

und da hier ω eine unendlich-klein werdende Gröfse repräsentirt, so hat man

$$\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos\frac{2kn\pi}{p}\log\sin\frac{k\pi}{2p} = \frac{1}{r\pi}\int_0^{2r\pi}\cos\frac{nx}{r}\log\sin\frac{x}{4r}\,dx,$$

oder auch

$$\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos\frac{2kn\pi}{p}\log\sin\frac{k\pi}{2p} = \int_0^{2\pi}\cos nx\log\sin\tfrac{1}{4}x\,dx.$$

Es ist aber ferner, da n eine ganze Zahl vorstellt,

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\log\sin\frac{x}{4}\,dx = \int_0^{\pi}\cos nx\log\sin\tfrac{1}{4}x\,dx + \int_0^{\pi}\cos nx\log\cos\tfrac{1}{4}x\,dx$$

und
$$\int_0^\pi \cos n x \, dx = 0;$$
daher hat man auch
$$\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos\frac{2kn\pi}{p} \log \sin\frac{k\pi}{2p} = \int_0^\pi \cos n x \log \sin \tfrac{1}{2} x \, dx.$$
Wird dieses Ergebniſs in die allgemeine Gleichung (5.) Nr. 7. gesetzt, so hat man die Umformungsgleichung

$$7.\quad \int_0^\infty \varphi(\sin a x, \cos b x)\frac{dx}{x} = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} \varphi(\sin a r x, \cos b r x) \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\omega \, d\omega$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=p}\left\{\int_0^\pi \cos n x \log \sin \tfrac{1}{2} x \, dx\right\}\varphi(\sin n a \omega, \cos n b \omega),$$

welche unter den gleichen Beschränkungen wie die Gleichung (6.) Bestand hat.

Das bestimmte Integral im zweiten Gliede zur Rechten in dieser Gleichung, nämlich
$$\int_0^\pi \cos n x \log \sin \tfrac{1}{2} x \, dx,$$
bietet den Werth $-\frac{\pi}{2n}$ dar, wenn n eine endliche Gröſse bleibt. Da jedoch im vorliegenden Falle, wegen der Summation von $n = 1$ bis $n = p$, diese Gröſse n auch unendlich-groſs werdende Werthe vorstellt, und in diesem Zustande über das besagte bestimmte Integral, wegen des allgemeinen Factors $\varphi(\sin n a \omega, \cos n b \omega)$ desselben, der dieselbe Zahl n umfaſst, nicht entschieden werden kann, so lassen wir für jetzt diese Gleichung (7.) fallen, ohne jedoch auf die im Eingange und in Nr. 7. angedeutete Transformation zu verzichten; wie solches aus dem folgenden Paragraphen wird entnommen werden.

§. III.

Nochmalige Summation der harmonisch-periodischen Reihe (1.) an der äuſsersten Grenze ihrer Convergenz, und Reduction des bestimmten Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin a x, \cos b x)\frac{dx}{x}$ auf ein anderes, welches den gleichen untern und einen endlichen obern Grenzwerth hat.

12.

In Nr. 3., Gleichung (2.) haben wir
$$y_1 = \int_0^1 \frac{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 + \ldots + a_p z^{p-1}}{1 - z^p} dz,$$
als Summenwerth der harmonisch-periodischen Reihe an der äuſsersten

Grenze ihrer Convergenz gefunden, und, wie daselbst festgestellt wird, wird dieser Summenwerth für y nur dann ein endliches Resultat geben, wenn die Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \dots a_p$ der in 1. aufgestellten Bedingungsgleichung derselben Nummer entsprechen, aus welcher folgende Gleichung gezogen wird:

$$a_p = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \dots - a_{p-1}.$$

Vermöge dieser Gleichung geht die y_1 darstellende Gleichung nunmehr in folgende über:

$$y_1 = a_1 \int_0^1 \frac{1-z^{p-1}}{1-z^p} dz + a_2 \int_0^1 \frac{z-z^{p-1}}{1-z^p} dz \dots a_{p-1} \int_0^1 \frac{z^{p-2}-z^{p-1}}{1-z^p} dz,$$

oder auch in folgende:

$$y_1 = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \int_0^1 \frac{z^{n-1}-z^{p-1}}{1-z^p} dz.$$

Es ist aber

$$\int_0^1 \frac{z^{n-1}-z^{p-1}}{1-z^p} dz = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{z^{\frac{n}{p}-1}-z^{1-1}}{1-z} dz,$$

daher hat man (Ir. IV. Gleichung (46.) Nr. 219.):

$$\int_0^1 \frac{z^{n-1}-z^{p-1}}{1-z^p} dz = \frac{1}{p} \left\{ \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \right\},$$

wodurch die obige Gleichung in folgende:

$$y_1 = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \left\{ \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \right\},$$

oder auch in

$$y_1 = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{n=p} a_n \left\{ \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \right\},$$

oder endlich, wegen der Bedingungsgleichung (1.), die

$$\sum_{n=1}^{n=p} a_n = 0$$

giebt, in folgende übergeht:

$$8. \quad y_1 = -\frac{1}{p} \sum_{n=1}^{n=p} a_n \frac{\Gamma_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}.$$

Diese Gleichung, die, wie die Gleichung (3.) in Nr. 4., die harmonisch-periodische Reihe an der äufsersten Grenze ihrer Convergenz summirt, führt, durch Vergleichung mit dieser, einerseits auf einige schon von *Gaufs* mitgetheilten Summationen und andrerseits auf jene Umformung der Gleichung (5.), welcher in der vorigen Nummer Erwähnung geschah.

13.

Vergleicht man die in Gleichung (3.) Nr. 4. aufgestellte Bestimmungsgleichung für y_1 mit der Ausgangs voriger Nummer aufgestellten und zieht dann die Gleichung (4.) derselben Nummer gleichfalls in Betracht, so stellen sich folgende zwei Gleichungen heraus:

$$\sum_{n=1}^{n=p} a_n \frac{\Gamma_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} = 2p\,a_p \log 2 - \tfrac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \operatorname{cotang}\frac{n\pi}{p} + 2\sum_{n=1}^{n=p}\sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \cos\frac{2kn\pi}{p} \log\sin\frac{k\pi}{2p} \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=1}^{n=p} a_n \frac{\Gamma_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} = 2p\,a_p \log 2 - \tfrac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \operatorname{cotang}\frac{n\pi}{p} + 2\sum_{n=1}^{n=p}\sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \cos\frac{2kn\pi}{p} \log\cos\frac{k\pi}{2p},$$

in welchen die nicht unendlich-grofs werdenden Gröfsen a_1, a_2, a_3, ... a_p, aufser dafs sie der Bedingungsgleichung

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p = 0$$

ein Genüge thun müssen, gänzlich willkürlich sind. Werden diesem nach die auf n bezüglichen Summationen dieser Gleichungen aufgelöset und wird a_p durch

$$-a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - \ldots - a_{p-1}$$

ersetzt, so werden vermöge der nunmehrigen Willkürlichkeit der Gröfsen a_1, a_2, a_3, ... a_{p-1} die zu demselben Zeiger von a gehörenden Theile in jeder der besagten zwei Gleichungen einander gleich zu setzen sein; und wenn diese Gleichsetzung mit den zu a_m (wo $m \geq 1$ und $\leq p-1$ ist) gehörenden Theilen vorgenommen wird, so ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} = -2p\log 2 - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotang}\frac{m\pi}{p} - 2\sum_{k=1}^{k=p-1}\left(1 - \cos\frac{2mk\pi}{p}\right)\log\sin\frac{k\pi}{2p} \quad \text{und}$$

$$\frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} = -2p\log 2 - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotang}\frac{m\pi}{p} - 2\sum_{k=1}^{k=p-1}\left(1 - \cos\frac{2mk\pi}{p}\right)\log\cos\frac{k\pi}{2p}.$$

Es ist aber (Ir. Nr. 224, Gl. (a.))

$$(\alpha.)\quad \sum_{k=1}^{k=p-1} \log \sin \frac{k\pi}{2p} = \log \frac{\sqrt{p}}{2^{p-1}} \text{ und } \sum_{k=1}^{k=p-1} \log \cos \frac{k\pi}{2p} = \log \frac{\sqrt{p}}{2^{p-1}};$$

daher gehen diese Gleichungen auch in folgende über:

$$\frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} = -\log 4p - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotang} \frac{m\pi}{p} + 2\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos \frac{2mk\pi}{p} \log \sin \frac{k\pi}{2p} \text{ und}$$

$$\frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} = -\log 4p - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotang} \frac{m\pi}{p} + 2\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos \frac{2mk\pi}{p} \log \cos \frac{k\pi}{2p}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man ferner

$$\frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} = -\log 4p - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotang} \frac{m\pi}{p} + \sum_{k=1}^{k=p-1} \cos \frac{2mk\pi}{p} \log \sin \frac{k\pi}{2p} \cos \frac{k\pi}{2p},$$

oder auch, da man wegen der oben festgestellten Beschaffenheit von m die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos \frac{2mk\pi}{p} = -1$$

hat, folgende Gleichung:

$$\frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} = -\log 2p - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotang} \frac{m\pi}{p} + \sum_{k=1}^{k=p-1} \cos \frac{2mk\pi}{p} \log \sin \frac{k\pi}{p}.$$

Führen wir die in unserer Integralrechnung öfters angewendete Zahl

$$c = -0{,}5772156649\ldots$$

ein, so ist (Ir. N. 228.)

$$\frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} = c,$$

und die Ausgangs voriger Nummer angedeuteten Summationen werden durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$(9.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos \frac{2mk\pi}{p} \log \sin \frac{k\pi}{2p} = \tfrac{1}{2}\log 4p + \tfrac{1}{4}\pi \operatorname{cotang} \frac{m\pi}{p} + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - c\right\}, \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos \frac{2mk\pi}{p} \log \cos \frac{k\pi}{2p} = \tfrac{1}{2}\log 4p + \tfrac{1}{4}\pi \operatorname{cotang} \frac{m\pi}{p} + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - c\right\}, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos\frac{2mk\pi}{p}\log\sin\frac{k\pi}{p} = \log 2p + \tfrac{1}{2}\pi\,\text{cotang}\,\frac{m\pi}{p} + \frac{\Gamma_1\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} - c,$$

die, wie aus deren Deduction erhellet, für alle diejenigen ganzen und positiven Werthe von m und p Bestand haben, welche den Bedingungen

$$m \geqq 1 \quad \text{und} \quad m \leqq p-1$$

genugthun. Von diesen Gleichungen, namentlich von den ersteren, werden wir in der folgenden Nummer Gebrauch machen, um die Ausgangs voriger Nummer angedeutete Umformung zu bewerkstelligen.

14.

Die Gleichung (5.) kann auch wie folgt gestellt werden:

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi(\sin arx, \cos brx)\,\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}x\,dx$$
$$-\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{n=p-1}\left\{\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos\frac{2kn\pi}{p}\log\sin\frac{k\pi}{2p}\right\}a_n - \frac{2}{p}a_p\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos 2k\pi\log\sin\frac{k\pi}{2p}.$$

Werden nun die erste der Gleichungen in $(\alpha.)$ und die erste der Gleichungen in (9.) voriger Nummer berücksichtiget, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x}$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(\sin arx, \cos brx)\,\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}x\,dx - \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{n=p-1}\left\{\tfrac{1}{2}\pi\,\text{cotang}\,\frac{n\pi}{p} + \frac{\Gamma_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}\right\}a_n$$
$$-\frac{1}{p}(\log 4p - c)\sum_{n=1}^{n=p-1}a_n - \frac{2}{p}a_p\log\frac{\sqrt{p}}{2^{p-1}},$$

und wegen $\sum_{n=1}^{n=p-1} a_n = -a_p$ auch in folgende:

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x}$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(\sin arx, \cos brx)\,\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}x\,dx - \frac{\pi}{2p}\sum_{n=1}^{n=p-1}a_n\,\text{cotang}\,\frac{n\pi}{p}$$
$$-\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{n=p-1}a_n\frac{\Gamma_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} + a_p\left(\log 4 - \frac{c}{p}\right).$$

Ersetzt man nun, wie in Nr. 6. festgestellt ward,

a_n durch $\varphi(\sin na\omega, \cos nb\omega)$ und $p\omega$ durch $2r\pi$,

und bedenkt, dafs die obige Gleichung nur in so fern Bestand hat, als sämmtliche in Nr. 7. festgestellte Bedingungen eintreffen, unter denen auch eine (die in c)) folgende ist:

$$a_p = \Phi(\sin ap\omega, \cos bp\omega) = \Phi(\sin 2ar\pi, \cos 2br\pi) = 0,$$

so geht die zuletzt aufgestellte Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty \Phi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x} =$$

$$\tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} \Phi(\sin arx, \cos brx)\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}x\,dx - \frac{\omega}{4r}\sum_{n=1}^{n=p-1} \Phi(\sin na\omega, \cos nb\omega)\operatorname{cotang}\frac{n\omega}{2r}$$

$$- \frac{\omega}{2r\pi}\sum_{n=1}^{n=p-1} \Phi(\sin na\omega, \cos nb\omega)\frac{\Gamma_1\left(\frac{n\omega}{2r\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{n\omega}{2r\pi}\right)},$$

welche mit folgender gleichbedeutend ist:

$$\int_0^\infty \Phi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x} =$$

$$\tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} \Phi(\sin arx, \cos brx)\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}x\,dx - \frac{1}{4r}\int_0^{2r\pi} \Phi(\sin ax, \cos bx)\operatorname{cotang}\frac{x}{2r}\,dx$$

$$- \frac{1}{2r\pi}\int_0^{2r\pi} \Phi(\sin ax, \cos bx)\frac{\Gamma_1\left(\frac{x}{2r\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2r\pi}\right)}dx,$$

oder endlich mit folgender:

$$10.\quad \int_0^\infty \Phi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\sin arx, \cos brx)\frac{\Gamma_1\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2\pi}\right)}dx,$$

die, wie die Gleichung (6) Nr. 7., unter den daselbst aufgestellten vier Bedingungen a), b), c) und d) Bestand hat, und die wir, wenn uns nicht darum zu thun gewesen wäre, auch die Summengleichung in (9.) voriger Nummer abzuleiten, auch unmittelbar aus der Gleichung (8.) Nr. 12. hätten folgern können.

Wird ferner das bestimmte Integral im Ausdrucke zur Rechten dieser Gleichung in eine Summe zweier, das eine von 0 bis π, das andere von π bis 2π aufgelöset und dann in letzteres x statt $2\pi - x$ gesetzt, so stellt sich folgende Gleichung heraus:

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(\sin arx, \cos brx)\frac{\Gamma_1\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2\pi}\right)}dx$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(-\sin arx, \cos brx)\frac{\Gamma_1\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)}dx,$$

die, beachtend die Gleichheit (Ir. IV. Nr. 221. Gl. (ε.)), nemlich

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

welche für alle zwischen 0 und 1 fallende Werthe von a Bestand hat, und aus welcher

$$\frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma_1(1-a)}{\Gamma(1-a)} = -\pi \operatorname{cotang} a\pi$$

folgt, in folgende übergeht:

$$(10'.)\quad \int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x} = -\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(-\sin arx, \cos brx)\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}x\,dx$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{\varphi(\sin arx, \cos brx)+\varphi(-\sin arx, \cos brx)\}\frac{\Gamma_1\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2\pi}\right)}dx,$$

die unter denselben Beschränkungen und Bedingungen, wie die obige Gleichung (10.), Bestand hat.

15.

Um auch von den Gleichungen der vorigen Nummer einige Anwendungen mitzutheilen, legen wir uns das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \sin x^{2q+1}\frac{dx}{x},$$

welches wir bereits in Nr. 8. mit Hülfe der allgemeinen Umformungsgleichung (6.) bestimmt haben, noch einmal vor.

Da nach der eben citirten Nummer sämmtliche in Nr. 13. zusammengestellten Bedingungen in dem vorliegenden Falle realisirt werden, so haben wir nach Gleichung (10'.), da gegenwärtig

$$\varphi(\sin arx, \cos brx) + \varphi(-\sin arx, \cos brx) = \sin x^{2q+1} + (-\sin x)^{2q+1} = 0$$

ist, folgende Bestimmungsgleichung:

$$\int_0^\infty \sin x^{2q+1}\frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \sin x^{2q+1}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}x\,dx,$$

aus der man, wenn das bestimmte Integral zur Rechten wie in Nr. 8. behandelt wird, auf die daselbst aufgestellte Bestimmungsgleichung

$$\int_0^\infty \sin x^{2q+1} \frac{dx}{x} = (-1)^q \binom{-\frac{1}{2}}{q} \tfrac{1}{2}\pi$$

geführt wird.

16.

Auch folgendes bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} \cdot \frac{dx}{x}$$

entspricht sämmtlichen in Nr. 8. zusammengestellten Anforderungen: daher hat man, wenn dasselbe nach der allgemeinen Gleichung (10'.) umgeformt wird, folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} \cdot \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}x\, dx,$$

oder auch

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^\pi \frac{(\cos\frac{1}{2}x)^2}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} dx,$$

oder endlich

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} \cdot \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} + \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} dx.$$

Nun ist

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} dx = 0 \text{ und } \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}},$$

daher hat man auch

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}},$$

die auch mit folgender Gleichung gleichbedeutend ist:

$$(a.)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2\sin x^2)}}.$$

Ganz in gleicher Weise wird man auf folgende zwei Umformungsgleichungen geführt:

$$(b.)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{(1-c^2\sin x^2)}} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2\sin x^2)}},$$

$$(c.)\quad \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{\sqrt{(1-c^2\cos x^2)}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2}{c^2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2\sin x^2)}} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(1-c^2\sin x^2)}\,dx\right\},$$

in welchen, wie auch in der vorausgehenden (a), die Constante c numerisch kleiner als die Einheit ist.

Zürich, im Februar 1842.

11.

Ableitung der Reihe für arc sin x, mit Zuziehung der Grenzgleichungen lim. sin $x = 0$ und lim. cos $x = 0$, wo die Grenzzeichen auf das unbestimmte unendliche Wachsen von x Bezug haben.

(Vom Herrn Professor *Raabe* in Zürich.)

Im zweiten Bande meiner Differential- und Integralrechnung befindet sich in Nr. 421 (die erste der Gleichungen (11.)) folgende Integralgleichung:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x} = \pi \arcsin a,$$

die für alle reellen Werthe von a, welche die Einheit nicht übertreffen, identisch besteht. Mittelst dieser Gleichheit gelangt man leicht auf folgende:

$$\int_0^{\frac{1}{2}(n\pi)} \log\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x} = n\pi \arcsin a,$$

und aus dieser endlich durch Umsetzung von x in nx auf folgende:

$$(1.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1+a\cos nx}{1-a\cos nx}\right)\frac{dx}{\cos nx} = \pi \arcsin a,$$

die, wie die vorhergehende, für alle ganzen Zahlenwerthe von n besteht.

Da der Ausdruck $a\cos nx$ die Einheit nicht übertrifft, so hat man

$$\log\frac{1+a\cos nx}{1-a\cos nx} = 2\{a\cos nx + \tfrac{1}{3}a^3(\cos nx)^3 + \tfrac{1}{5}a^5(\cos nx)^5 + \text{in inf.}\},$$

wodurch die Gleichheit (1.) in folgende übergeht:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\{a + \tfrac{1}{3}a^3(\cos nx)^2 + \tfrac{1}{5}a^5(\cos nx)^4 + \ldots\}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \arcsin a,$$

oder auch in folgende:

$$(2.)\quad \arcsin a = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a^{2p+1}}{2p+1}(\cos nx)^{2p}\right\}dx;$$

wo das Summenzeichen für alle ganzen und positiven Werthe von p gilt.

Versetzt man nun n in den Zustand des unendlichen Wachsens, so hat man, nach der ersten der Gleichungen (III.), Ausgangs der Nr. 151. des ersten Theiles meiner Differential- und Integralrechnung,

$$\lim.(\cos nx)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\cdot\frac{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots 2p}{1.2.3\ldots p},$$

welches mit Folgendem gleichbedeutend ist:

$$\lim.(\cos n x)^{2p} = \frac{1.2.3.4....p(p+1)(p+2)....2p}{2.4.6.8....2p.2.4.6.8....2p},$$

oder endlich mit Folgendem:

$$\lim.(\cos n x)^{2p} = \frac{1.3.5.7....(2p-1)}{2.4.6.8....2p}.$$

Wird dieses Ergebniß in die Gleichheit (2.) eingeführt, so ergiebt sich:

$$\arcsin a = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1.3.5....(2p-1)}{2.4.6....2p}.\frac{a^{2p+1}}{2p+1}\right)dx,$$

oder auch

$$\arcsin a = \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1.3.5....(2p-1)}{2.4.6....2p}.\frac{a^{2p+1}}{2p+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dx,$$

oder endlich

$$\arcsin a = \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1.3.5....(2p-1)}{2.4.6....2p}.\frac{a^{2p+1}}{2p+1}.$$

Löset man das Summenzeichen auf, und bedenkt, daſs der Ausdruck nach dem Summenzeichen für $p=0$ in a übergeht, so ergiebt sich die allgemein bekannte Gleichheit:

$$\arcsin a = a + \frac{1}{2}.\frac{a^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{a^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{a^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{a^9}{9} + ...,$$

wo die ohne Ende fortlaufende Reihe rechterhand für alle Werthe von a, die die Einheit nicht übertreffen, zu den convergenten gehört.

Zürich im October 1842.

12.

De integratione aequationis differentialis partialis

$$A_1 - A_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - A_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \dots - A_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}}$$
$$+ A_n\left\{x_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \dots + x_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} - x_1\right\} = 0,$$

designantibus A_1, A_2, ... A_n functiones quaslibet variabilium x_1, x_2, ... x_{n-1} lineares.

(Auctore Dr. *O. Hesse* Regiom.)

1.

Commentatione duce, de integratione aequationis differentialis

$$(A_1'x_1 + A_1''x_2 + A_1''') - (A_2'x_1 + A_2''x_2 + A_2''')\frac{dx_1}{dx_2}$$
$$+ (A_3'x_1 + A_3''x_2 + A_3''')\left(x_2\frac{dx_1}{dx_2} - x_1\right) = 0,$$

inscripta, et hoc in diario Tom. 24. ab ill. *Jacobi* edita, contigit mihi, ut aequationis differentialis partialis

$$1.\quad A_1 - A_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - A_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \dots - A_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}}$$
$$+ A_n\left\{x_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \dots + x_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} - x_1\right\} = 0$$

designantibus A_1, A_2 .... A_p .... A_n functiones variabilium x_1, x_2, ... x_{n-1} lineares hujusmodi:

$$A_p = A_p'x_1 + A_p''x_2 + \dots + A_p^{(n-1)}x_{n-1} + A_p^{(n)}$$

integrandae duas methodos invenirem, alteram cum ea, qua usus est ill. *Jacobi*, fere congruam, alteram aliquanto diversam nec a regulis aequationum differentialium partialium tractandarum traditis alienam. Utrasque methodos sequentibus breviter exponere mihi proposui.

2.

Aequationem differentialem (1.) propositam, cum inter variabiles x_1, x_2, ... x_{n-1}, quas continet, symmetria careat, in formam elegantiorem redigere convenit. Hac de causa statuamus $u = f(x_1, x_2, \dots x_{n-1}) = 0$ esse

integrale aliquod aequationis differentialis (1.) propositae. Qua aequatione integrali variabilis x_1, ut functio reliquarum variabilium $x_2 \dots x_{n-1}$ independentium data est, secundum quas differentiando prodeunt aequationes

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_3} = 0$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

quarum ope aequatio (1.) proposita abit in hanc symmetricam:

$$2. \quad A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + A_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} - A_n \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} \right) = 0.$$

Integrata igitur erit aequatio differentialis (1.) simulac solutionem $u = f(x_1 x_2 \dots x_{n-1})$ maxime generalem aequationi (2.) satisfacientem invenerimus. Solutionem enim u inventam aequando zero integrale aequationis differentialis (1.) obtinemus.

3.

Ad aequationem (2.) homogeneam reddendam ponamus:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_n}, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_n}, \quad \dots \quad \frac{y_{n-1}}{y_n},$$

quo facto, cum sit $u = f(x_1 x_2 \dots x_{n-1}) = f\left(\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \dots \frac{y_{n-1}}{y_n}\right)$, habemus aequationes

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = y_n \frac{\partial u}{\partial y_1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = y_n \frac{\partial u}{\partial y_2},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} = y_n \frac{\partial u}{\partial y_{n-1}},$$
$$-\left\{ x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} \right\} = y_n \frac{\partial u}{\partial y_n},$$

quibus adjuvantibus aequatio (2.) mutatur in

$$3. \quad B_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \dots + B_n \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0,$$

designantibus $B_1 \dots, B_p \dots B_n$ functiones has lineares et homogeneas:

$$B_p = A_p' y_1 + A_p'' y_2 + \dots + A_p^{(n-1)} y_{n-1} + A_p^{(n)} y_n.$$

Quaestio igitur proposita eo redit, ut functiones u variabilium $y_1, y_2, \dots y_n$ generales reperiantur, quae aequationi (3.) satisfaciant, e quibus hujus formae $f\left(\frac{y_1}{y_n} \dots \frac{y_{n-1}}{y_n}\right)$ functio eligatur, in qua substitutionibus

$$4. \quad y_1 = x_1 y_n, \quad y_2 = x_2 y_n, \quad \dots \quad y_{n-1} = x_{n-1} y_n$$

factis evanescat variabilis y_n nec restet variabilium $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ functio. Quam enim functionem si aequamus zero aequationis propositae integrale habemus.

4.

Sed licet transformare aequationem (3.) in simpliciorem hanc:

$$5. \quad \lambda_1 Y_1 \frac{\partial u}{\partial Y_1} + \lambda_2 Y_2 \frac{\partial u}{\partial Y_2} + \dots + \lambda_n Y_n \frac{\partial u}{\partial Y_n} = 0,$$

vel hanc in illam, adhibitis substitutionibus hujusmodi:

$$6. \quad \begin{cases} Y_1 = a_1' y_1 + a_2' y_2 + \dots + a_n' y_n \\ Y_2 = a_1'' y_1 + a_2'' y_2 + \dots + a_n'' y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_n = a_1^{(n)} y_1 + a_2^{(n)} y_2 + \dots + a_n^{(n)} y_n, \end{cases}$$

unde aequationes nascuntur

$$7. \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y_1} = a_1' \frac{\partial u}{\partial Y_1} + a_1'' \frac{\partial u}{\partial Y_2} + \dots + a_1^{(n)} \frac{\partial u}{\partial Y_n}, \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} = a_2' \frac{\partial u}{\partial Y_1} + a_2'' \frac{\partial u}{\partial Y_2} + \dots + a_2^{(n)} \frac{\partial u}{\partial Y_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial u}{\partial y_n} = a_n' \frac{\partial u}{\partial Y_1} + a_n'' \frac{\partial u}{\partial Y_2} + \dots + a_n^{(n)} \frac{\partial u}{\partial Y_n}. \end{cases}$$

Substituendo enim valores $\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots \frac{\partial u}{\partial y_n}$ in aequatione (3.) et valores $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ in aequatione (5.) et comparando coëfficientes ipsius $\frac{\partial u}{\partial Y_p}$ in utraque aequatione, nanciscimur:

$$B_1 a_1^{(p)} + B_2 a_2^{(p)} + \dots + B_n a_n^{(p)} = \lambda_p \{a_1^{(p)} y_1 + a_2^{(p)} y_2 + \dots + a_n^{(p)} y_n\},$$

e qua aequationum systema eruitur hoc:

$$8. \quad \begin{cases} (A_1' - \lambda_p) a_1^{(p)} + A_2' a_2^{(p)} + \dots + A_n' a_n^{(p)} = 0, \\ A_1'' a_1^{(p)} + (A_2'' - \lambda_p) a_2^{(p)} + \dots + A_n'' a_n^{(p)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1^{(n)} a_1^{(p)} + A_2^{(n)} a_2^{(p)} + \dots + (A_n^{(n)} - \lambda_p) a_n^{(p)} = 0, \end{cases}$$

et eliminando quantitatis $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots a_n^{(p)}$ aequatio algebraica quaedam

$$9. \quad U = 0$$

$n$ti gradus componitur, quae radices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ diversas suppeditat. Quibus determinatis ex aequationibus (8.) numeros $1, 2, \ldots n$ loco p ponendo n systemata aequationum sequuntur, e quarum solutione rationes tantum ipsarum $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots a_n^{(p)}$ reperiuntur. Unde elucet n quantitates, exempli gratia $a_1', a_1'', \ldots a_1^{(n)}$, ex arbitrio sumi posse; quo facto reliquae substitutionum (6.) coëfficientes plane determinantur.

5.

Hac ratione et aequatione (5.) et substitutionibus (6.), quibus illa transformetur in (3.), determinatis, observo, si per $\Pi(c_1, c_2, \ldots c_{n-1})$ functionem quantitatum $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ arbitrariam designamus posito

$$10. \quad c_1 = \frac{\frac{1}{Y_1^{\lambda_1}}}{\frac{1}{Y_n^{\lambda_n}}}, \quad c_2 = \frac{\frac{1}{Y_2^{\lambda_2}}}{\frac{1}{Y_n^{\lambda_n}}}, \quad \ldots \quad c_{n-1} = \frac{\frac{1}{Y_{n-1}^{\lambda_{n-1}}}}{\frac{1}{Y_n^{\lambda_n}}},$$

solutiones aequationis (5.) omnes formula contineri hac

$$u = \Pi(c_1 c_2 \ldots c_{n-1}),$$

e qua substituendo valores pro $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ e (6.) integrale fluit aequationis (3.). Sed, ut adhibitis ad Π substitutionibus (6.) et (4.) $\Pi = u$ fiat integrale aequationis (2.), necesse est, ut eligatur e diversis functionibus Π maxime generalis formae $\Phi\left\{\frac{Y_1}{Y_n}, \frac{Y_2}{Y_n}, \ldots \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right\}$. Talis functio est:

$$F\{d_1 d_2 \ldots d_{n-2}\},$$

designante F functionem quamlibet quantitatum $d_1, d_2, \ldots d_{n-2}$, quibus tribuendi sunt valores:

$$11. \quad d_q = \frac{c_q^{\lambda_q \lambda_{n-1}} \cdot c_{n-1}^{\lambda_n \lambda_{n-1}}}{c_q^{\lambda_q \lambda_n} \cdot c_{n-1}^{\lambda_q \lambda_{n-1}}} = \left\{\frac{Y_q}{Y_n}\right\}^{\lambda_{n-1}-\lambda_n} \left\{\frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right\}^{\lambda_n-\lambda_q}.$$

Unde denique concludendum est,

„Aequationem:

$$F(d_1 d_2 \ldots d_{n-2}) = 0$$

„substitutionibus (11. 6. 4.) deinceps factis in integrale aequationis „differentialis (1.) propositae completum transire nihil variabilium con- „tinens nisi $x_1, x_2, \ldots x_n$ ....

Inter functiones $u = \Pi(c_1, c_2, \ldots c_{n-1})$, quae substitutionibus (10.) factis formam $\Phi\left\{\frac{Y_1}{Y_n}, \frac{Y_2}{Y_n}, \ldots \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right\}$ induunt, notatu dignae sunt hae particulares:

$$u_p = c_1^{\frac{\lambda_1^p}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}} \cdot c_2^{\frac{\lambda_2^p}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots(\lambda_2-\lambda_n)}} \ldots c_{n-1}^{\frac{\lambda_{n-1}^p}{(\lambda_{n-1}-\lambda_1)(\lambda_{n-1}-\lambda_2)\ldots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}}$$

designante p, numeros 1, 2, ... $(n-2)$.

Transeunt enim commemoratis substitutionibus in has symmetricas:

$$12. \quad u_p = Y_1^{\frac{\lambda_1^{p-1}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}} \cdot Y_2^{\frac{\lambda_2^{p-1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots(\lambda_2-\lambda_n)}} \ldots Y_n^{\frac{\lambda_n^{p-1}}{(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}},$$

e quibus hanc solutionem $u = F(u_1\, u_2 \ldots u_{n-2})$ ejusdem proprietatis generalem conflare licet.

„Si igitur symmetricum aequationis (1.) propositae integrale generale „desideratur, tale ex aequatione $F(u_1\, u_2 \ldots u_{n-2}) = 0$ substitutio-„nibus (12. 6. 4.) deinceps factis nasci videmus."

6.

Addo alteram methodum aequationis (3.) integrandae:

$$\text{I.} \quad B_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \ldots + B_n \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0,$$

cujus integrale nota ratione ab integratione aequationum vulgarium pendet:

$$\text{II.} \quad dy_1 : dy_2 : \ldots : dy_n = B_1 : B_2 : \ldots : B_n.$$

Determinare licet dt ita ut habeamus:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} y_1' = B_1 \\ y_2' = B_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n' = B_n, \end{cases}$$

ubi brevitatis causa signa $y_1', y_2' \ldots$ pro $\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt} \ldots$ scripta sunt.

Talibus aequationibus differentialibus satisfieri potest valorum particularium systemate hoc:

$$y_1 = b_1 e^{\lambda t}, \quad y_2 = b_2 e^{\lambda t}, \quad \ldots \quad y_n = b_n e^{\lambda t},$$

quos enim si substituimus in aequationibus antecedentibus aequationes nanciscimur conditionales:

$$\text{IV.}\quad\begin{cases}(A_1'-\lambda)b_1+A_1''b_2+\dots\dots+A_1^{(n)}b_n=0,\\ A_2'b_1+(A_2''-\lambda)b_2+\dots\dots+A_2^{(n)}b_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_n'b_1+A_n''b_2+\dots\dots+A_n^{(n)}b_n=0,\end{cases}$$

quibus satisfieri potest. Quantitates $b_1, b_2, \dots\dots b_n$ eliminando eadem aequatio obtinetur, quam antea designavimus per $U=0$, cujus radices sunt $\lambda_1\dots\dots\lambda_n$. Jam patet hujus aequationis cuique radici λ_p systema quoddam coëfficientium $b_1^{(p)}, b_2^{(p)}, \dots\dots b_n^{(p)}$ respondere, e quibus unum ex. gr. $b_1^{(p)}$ ex arbitrio sumere licet, quo reliqui determinantur. Habemus igitur tot systemata valorum particularium ipsarum $y_1, y_2, \dots\dots y_n$ quot radices aequationis $U=0$ diversas.

Ex his valoribus aequationes integrales completas hoc modo componere licet:

$$\text{V.}\quad\begin{cases}y_1=\gamma_1 b_1'e^{\lambda_1 t}+\gamma_2 b_1''e^{\lambda_2 t}+\dots\dots+\gamma_n b_1^{(n)}e^{\lambda_n t},\\ y_2=\gamma_1 b_2'e^{\lambda_1 t}+\gamma_2 b_2''e^{\lambda_2 t}+\dots\dots+\gamma_n b_2^{(n)}e^{\lambda_n t},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n=\gamma_1 b_n'e^{\lambda_1 t}+\gamma_2 b_n''e^{\lambda_2 t}+\dots\dots+\gamma_n b_n^{(n)}e^{\lambda_n t},\end{cases}$$

n constantes $\gamma_1, \gamma_2, \dots\dots \gamma_n$ arbitrarias continentes. Sed has aequationes secundum constantes arbitrarias solvere convenit, quo facto nanciscimur aequationes hujusmodi:

$$\text{VI.}\quad\begin{cases}y_1\alpha_1'+y_2\alpha_2'+\dots\dots+y_n\alpha_n'=\gamma_1 e^{\lambda_1 t},\\ y_1\alpha_1''+y_2\alpha_2''+\dots\dots+y_n\alpha_n''=\gamma_2 e^{\lambda_2 t},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_1\alpha_1^{(n)}+y_2\alpha_2^{(n)}+\dots\dots+y_n\alpha_n^{(n)}=\gamma_n e^{\lambda_n t},\end{cases}$$

quae aeque ac antecedentibus aequationes sunt integrales aequationum (III.). Ad coëfficientes α_p^q determinandos, aequationes (III.) per $\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}, \dots\dots \alpha_n^{(p)}$ multiplicemus, unde facta additione obtinemus:

$$\alpha_1^{(p)}y_1'+\alpha_2^{(p)}y_2'+\dots\dots+\alpha_n^{(p)}y_n'=\alpha_1^{(p)}B_1+\alpha_2^{(p)}B_2+\dots\dots+\alpha_n^{(p)}B_n,$$

vel aequationum antecedentium ope:

$$\gamma_p\lambda_p e^{\lambda_p t}=\alpha_1^{(p)}B_1+\alpha_2^{(p)}B_2+\dots\dots+\alpha_n^{(p)}B_n,$$

vel

$$\lambda_p\{y_1\alpha_1^{(p)}+y_2\alpha_2^{(p)}+\dots\dots+y_n\alpha_n^{(p)}\}=\alpha_1^{(p)}B_1+\alpha_2^{(p)}B_2+\dots\dots+\alpha_n^{(p)}B_n,$$

unde coëfficientes aequalium variabilium comparando hoc fluit aequationum systema:

$$\begin{aligned}(A_1'-\lambda_p)\alpha_1^{(p)}+A_2'\alpha_2^{(p)}+\dots\dots+A_n'\alpha_n^{(p)}&=0,\\ A_1''\alpha_1^{(p)}+(A_2''-\lambda_p)\alpha_2^{(p)}+\dots\dots+A_n''\alpha_n^{(p)}&=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ A_1^{(n)}\alpha_1^{(p)}+A_2^{(n)}\alpha_2^{(p)}+\dots\dots+(A_n^{(n)}-\lambda_p)\alpha_n^{(p)}&=0,\end{aligned}$$

quod easdem praebet rationes ipsarum $\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots \alpha_n^{(p)}$ ac aequationes (8.) ipsarum $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots a_n^{(p)}$. Quam ob rem pro α_q^p etiam a_q^p scribere licet. Denique eliminata e^t ex aequationibus (VI.) vulgarium aequationum (II.) differentialium, integrales aequationes obtinentur hae:

$$\frac{(\gamma_1 \alpha_1' + \gamma_2 \alpha_2' + \ldots\ldots\ldots\ldots + \gamma_n' \alpha_n')^{\frac{1}{\lambda_1}}}{(\gamma_1 \alpha_1^{(n)} + \gamma_2 \alpha_2^{(n)} + \ldots + \gamma_n \alpha_n^{(n)})^{\frac{1}{\lambda_n}}} = \frac{\gamma_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{\gamma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}} = c_1,$$

$$\frac{(\gamma_1 \alpha_1'' + \gamma_2 \alpha_2'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + \gamma_n'' \alpha_n'')^{\frac{1}{\lambda_2}}}{(\gamma_1 \alpha_1^{(n)} + \gamma_2 \alpha_2^{(n)} + \ldots + \gamma_n \alpha_n^{(n)})^{\frac{1}{\lambda_n}}} = \frac{\gamma_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{\gamma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}} = c_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(\gamma_1 \alpha_1^{(n-1)} + \gamma_2 \alpha_2^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n \alpha_n^{(n-1)})^{\frac{1}{\lambda_{n-1}}}}{(\gamma_1 \alpha_1^{(n)} + \gamma_2 \alpha_2^{(n)} + \ldots + \gamma_n \alpha_n^{(n)})^{\frac{1}{\lambda_n}}} = \frac{\gamma_{n-1}^{\frac{1}{\lambda_{n-1}}}}{\gamma_n^{\frac{1}{\lambda_n}}} = c_{n-1},$$

unde secundum regulam notam integrale aequationis (I.) propositae componitur hoc:

$$\Pi(c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}) = 0$$

quod jam antea reperimus.

Nota. Si proponuntur integrandae aequationes

$$\frac{dx_1}{dt} - A_1 + x_1 A_n = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} - A_2 + x_2 A_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} - A_{n-1} + x_{n-1} A_n = 0,$$

earum integralia completa inveniuntur haec:

$$x_1 = \frac{\gamma_1 b_1' e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b_1'' e^{\lambda_2 t} + \ldots + \gamma_n b_1^{(n)} e^{\lambda_n t}}{\gamma_1 b_n' e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b_n'' e^{\lambda_2 t} + \ldots + \gamma_n b_n^{(n)} e^{\lambda_n t}},$$

$$x_2 = \frac{\gamma_1 b_2' e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b_2'' e^{\lambda_2 t} + \ldots + \gamma_n b_2^{(n)} e^{\lambda_n t}}{\gamma_1 b_n' e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b_n'' e^{\lambda_2 t} + \ldots + \gamma_n b_n^{(n)} e^{\lambda_n t}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} = \frac{\gamma_1 b_{n-1}' e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b_{n-1}'' e^{\lambda_2 t} + \ldots + \gamma_n b_{n-1}^{(n)} e^{\lambda_n t}}{\gamma_1 b_n' e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 b_n'' e^{\lambda_2 t} + \ldots + \gamma_n b_n^{(n)} e^{\lambda_n t}}.$$

Regiomonti d. 18. Octobr. 1842.

13.

Ueber Abelsche Integrale.

(Vom Hrn. Dr. *Haedenkamp* zu Hamm.)

Im 24sten Bande dieses Journals hat Hr. Professor *Jacobi* gezeigt, wie man zu den vollständigen Integralen des Systems linearer Differentialgleichungen zwischen n Variabeln

$$\frac{\partial y_1}{\sqrt{(\varDelta y_1)}}+\frac{\partial y_2}{\sqrt{(\varDelta y_2)}}+\dots+\frac{\partial y_n}{\sqrt{(\varDelta y_n)}}=0,$$

$$\frac{y_1\partial y_1}{\sqrt{(\varDelta y_1)}}+\frac{y_2\partial y_2}{\sqrt{(\varDelta y_2)}}+\dots+\frac{y_n\partial y_n}{\sqrt{(\varDelta y_n)}}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{y_1^{n-2}\partial y_1}{\sqrt{(\varDelta y_1)}}+\frac{y_2^{n-2}\partial y_2}{\sqrt{(\varDelta y_2)}}+\dots+\frac{y_n^{n-2}\partial y_n}{\sqrt{(\varDelta y_n)}}=0$$

auf einfache Weise gelangen kann, sowohl wenn $\varDelta y$ vom $2n$ten, als wenn es vom $2n-1$ten Grade ist. Ich will hier zeigen, wie man für einen speciellen Fall, nemlich für 3 Variabeln und $\varDelta y$ vom 5ten Grade, aus den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial y_1}{\sqrt{(\varDelta y_1)}}+\frac{\partial y_2}{\sqrt{(\varDelta y_2)}}+\frac{\partial y_3}{\sqrt{(\varDelta y_3)}}=0,$$

$$\frac{y_1\partial y_1}{\sqrt{(\varDelta y_1)}}+\frac{y_2\partial y_2}{\sqrt{(\varDelta y_2)}}+\frac{y_3\partial y_3}{\sqrt{(\varDelta y_3)}}=0,$$

die beiden algebraischen vollständigen Integrale auch mit Hülfe geometrischer Betrachtungen erhält. Es wird dann leicht sein, diesen besonderen Fall auf n Variabeln und $\varDelta y$ vom $2n-1$ten Grade auszudehnen.

Wenn a_1, a_2, a_3 die Quadrate der halben Axen eines 3axigen Ellipsoïds bedeuten, so kann man bekanntlich durch jeden Punct (x_1, x_2, x_3) im Raume 3 Oberflächen zweiter Ordnung legen, die mit dem gegebenen Ellipsoïd convocal sind und deren Axen durch die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$1.\quad \frac{x_1^2}{a_1-y}+\frac{x_2^2}{a_2-y}+\frac{x_3^2}{a_3-y}=1$$

bestimmt werden. Die eine dieser Wurzeln liegt zwischen $-\infty$ und a_1, die zweite zwischen a_1 und a_2, die dritte zwischen a_2 und a_3. Bezeichnet man dieselben durch y_1, y_2, y_3, so erhält man aus der Gleichung (1.)

$$2. \quad \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{(a_1-y_1)(a_1-y_2)(a_1-y_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}, \\ x_2^2 = \dfrac{(a_2-y_1)(a_2-y_2)(a_2-y_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}, \\ x_3^2 = \dfrac{(a_3-y_1)(a_3-y_2)(a_3-y_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}; \end{cases}$$

ferner

$$3. \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{(a_1-y_1)^2}+\dfrac{x_2^2}{(a_2-y_1)^2}+\dfrac{x_3^2}{(a_3-y_1)^2} = \dfrac{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}{(a_1-y_1)(a_2-y_1)(a_3-y_1)} = \Theta_1, \\ \dfrac{x_1^2}{(a_1-y_2)^2}+\dfrac{x_2^2}{(a_2-y_2)^2}+\dfrac{x_3^2}{(a_3-y_2)^2} = \dfrac{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}{(a_1-y_2)(a_2-y_2)(a_3-y_2)} = \Theta_2, \\ \dfrac{x_1^2}{(a_1-y_3)^2}+\dfrac{x_2^2}{(a_2-y_3)^2}+\dfrac{x_3^2}{(a_3-y_3)^2} = \dfrac{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(a_1-y_3)(a_2-y_3)(a_3-y_3)}. \end{cases}$$

Die drei ersten Gleichungen sagen, dafs die Coordinaten eines beliebigen Punctes im Raume sich durch die Axen der drei durch denselben Punct gehenden convocalen Oberflächen zweiter Ordnung ausdrücken lassen. Ich will nun die aus den Elementen der Geometrie bekannte Wahrheit: dafs die gerade Linie zwischen zwei Puncten im Raume der kürzeste Weg sei, durch Bedingungsgleichungen, die die Variationsrechnung dafür aufstellt, ausdrücken. Aus den Gleichungen (2.) erhält man

$$4. \quad \begin{cases} -\dfrac{2\partial x_1}{x_1} = \dfrac{\partial y_1}{a_1-y_1}+\dfrac{\partial y_2}{a_1-y_2}+\dfrac{\partial y_3}{a_1-y_3}, \\ -\dfrac{2\partial x_2}{x_2} = \dfrac{\partial y_1}{a_2-y_1}+\dfrac{\partial y_2}{a_2-y_2}+\dfrac{\partial y_3}{a_2-y_3}, \\ -\dfrac{2\partial x_3}{x_3} = \dfrac{\partial y_1}{a_3-y_1}+\dfrac{\partial y_2}{a_3-y_2}+\dfrac{\partial y_3}{a_3-y_3}. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich für das Element ∂s einer Linie:

$$4\partial s^2 = 4(\partial x_1^2+\partial x_2^2+\partial x_3^2) = \Theta_1\partial y_1^2+\Theta_2\partial y_2^2+\Theta_3\partial y_3^2.$$

Für die Bedingung, dafs der Weg zwischen zwei Puncten im Raume ein Minimum sei, mufs

$$\delta\int\sqrt{(\Theta_1\partial y_1^2+\Theta_2\partial y_2^2+\Theta_3\partial y_3^2)} = 0$$

sein. Entwickelt man diesen Ausdruck und setzt der Kürze wegen

$$\frac{\Theta_1\partial y_1^2}{\partial s^2} = v_1^2, \quad \frac{\Theta_2\partial y_2^2}{\partial s^2} = v_2^2, \quad \frac{\Theta_3\partial y_3^2}{\partial s^2} = v_3^2,$$

so gelangt man zu folgenden drei Relationen zwischen y_1, y_2, y_3 und ihren ersten und zweiten Differentialen:

$$\frac{v_1^2\partial y_2+v_2^2\partial y_1}{y_1-y_2}+\frac{v_1^2\partial y_3+v_3^2\partial y_1}{y_1-y_3}=\partial v_1^2,$$
$$\frac{v_2^2\partial y_1+v_1^2\partial y_2}{y_2-y_1}+\frac{v_2^2\partial y_3+v_3^2\partial y_2}{y_2-y_3}=\partial v_2^2,$$
$$\frac{v_3^2\partial y_1+v_1^2\partial y_3}{y_3-y_1}+\frac{v_3^2\partial y_2+v_2^2\partial y_3}{y_3-y_2}=\partial v_3^2,$$

wovon die dritte in den beiden ersten enthalten ist, da

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2=1.$$

Dividirt man die erste durch a_1-y_1, die zweite durch a_1-y_2 und die dritte durch a_1-y_3, addirt und integrirt, so erhält man

$$\frac{c_1^2}{x_1^2}=\frac{v_1^2}{a_1-y_1}+\frac{v_2^2}{a_1-y_2}+\frac{v_3^2}{a_1-y_3}.$$

Auf gleiche Weise ist auch

$$\frac{c_2^2}{x_2^2}=\frac{v_1^2}{a_2-y_1}+\frac{v_2^2}{a_2-y_2}+\frac{v_3^2}{a_2-y_3},$$
$$\frac{c_3^2}{x_3^2}=\frac{v_1^2}{a_3-y_1}+\frac{v_2^2}{a_3-y_2}+\frac{v_3^2}{a_3-y_3},$$

wo c_1, c_2, c_3 Constanten sind, die der Bedingung $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$ genügen müssen. Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn die erste mit $\frac{x_1^2}{a_1-y_1}$, die zweite mit $\frac{x_2^2}{a_2-y_1}$, die dritte mit $\frac{x_3^2}{a_3-y_1}$ multiplicirt und addirt wird u. s. w., folgende 3 Gleichungen:

$$5.\quad\begin{cases} v_1^2\Theta_1=\dfrac{c_1^2}{a_1-y_1}+\dfrac{c_2^2}{a_2-y_1}+\dfrac{c_3^2}{a_3-y_1},\\[2mm] v_2^2\Theta_2=\dfrac{c_1^2}{a_1-y_2}+\dfrac{c_2^2}{a_2-y_2}+\dfrac{c_3^2}{a_3-y_2},\\[2mm] v_3^2\Theta_3=\dfrac{c_1^2}{a_1-y_3}+\dfrac{c_2^2}{a_2-y_3}+\dfrac{c_3^2}{a_3-y_3}.\end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$N_1=(y_1-y_2)(y_1-y_3),\qquad X_1=(a_1-y_1)(a_2-y_1)(a_3-y_1),$$
$$\frac{Y_1}{X_1}=\frac{c_1^2}{a_1-y_1}+\frac{c_2^2}{a_2-y_1}+\frac{c_3^2}{a_3-y_1},\qquad \Delta y_1=Y_1X_1\text{ u. s. w.,}$$

so kann man aus den vorhergehenden Gleichungen folgende lineäre Differentialgleichungen erster Ordnung bilden:

$$6.\quad\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\sqrt{(\Delta y_1)}}+\dfrac{\partial y_2}{\sqrt{(\Delta y_2)}}+\dfrac{\partial y_3}{\sqrt{(\Delta y_3)}}=0,\\[2mm] \dfrac{y_1\partial y_1}{\sqrt{(\Delta y_1)}}+\dfrac{y_2\partial y_2}{\sqrt{(\Delta y_2)}}+\dfrac{y_3\partial y_3}{\sqrt{(\Delta y_3)}}=0,\\[2mm] \dfrac{y_1^2\partial y_1}{\sqrt{(\Delta y_1)}}+\dfrac{y_2^2\partial y_2}{\sqrt{(\Delta y_2)}}+\dfrac{y_3^2\partial y_3}{\sqrt{(\Delta y_3)}}=\partial s.\end{cases}$$

Um nun die vollständigen Integrale dieser Gleichungen zu finden, bemerke ich, dafs die Gleichungen (3.), in Verbindung mit (5.), in folgende übergehen:

$$7.\quad\begin{cases} -\dfrac{\frac{2\partial x_1}{\partial s}}{x_1} = \dfrac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_1-y_1)N_1} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_2)}}{(a_1-y_2)N_2} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_3)}}{(a_1-y_3)N_3}, \\[2ex] -\dfrac{\frac{2\partial x_2}{\partial s}}{x_2} = \dfrac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_2-y_1)N_1} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_2)}}{(a_2-y_2)N_2} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_3)}}{(a_2-y_3)N_3}, \\[2ex] -\dfrac{\frac{2\partial x_3}{\partial s}}{x_3} = \dfrac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_3-y_1)N_1} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_2)}}{(a_3-y_2)N_2} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_3)}}{(a_3-y_3)N_3}. \end{cases}$$

Nun sind $\frac{\partial x_1}{\partial s}$, $\frac{\partial x_2}{\partial s}$, $\frac{\partial x_3}{\partial s}$ nichts anderes als die Determinanten der Geraden, die die Puncte verbindet, zwischen welchen die kürzeste Linie gefunden werden sollte; dieselben sind daher constant. Bezeichnen wir sie durch C_1, C_2, C_3, so sind die Gleichungen

$$8.\quad\begin{cases} -2C_1 = x_1\left(\dfrac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_1-y_1)N_1} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_2)}}{(a_1-y_2)N_2} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_3)}}{(a_1-y_3)N_3}\right), \\[2ex] -2C_2 = x_2\left(\dfrac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_2-y_1)N_1} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_2)}}{(a_2-y_2)N_2} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_3)}}{(a_2-y_3)N_3}\right), \\[2ex] -2C_3 = x_3\left(\dfrac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_3-y_1)N_1} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_2)}}{(a_3-y_2)N_2} + \dfrac{\sqrt{(\Delta y_3)}}{(a_3-y_3)N_3}\right) \end{cases}$$

die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen (6.), die sich auf zwei reduciren, da

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 1.$$

Ich habe die vorhergehenden Sätze in extenso mitgetheilt und ihnen eine gewisse Symmetrie gegeben, um sie unmittelbar auf eine beliebige Zahl von Variabeln ausdehnen zu können. Man ersieht durch dieselben Betrachtungen, dafs allgemein die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen, wie sie sich aus (5.) ergeben, wenn darin n statt 3 Variabeln gesetzt werden, nemlich der Gleichungen:

$$\frac{\partial y_1}{\sqrt{(\Delta y_1)}} + \frac{\partial y_2}{\sqrt{(\Delta y_2)}} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\sqrt{(\Delta y_n)}} = 0,$$

$$\frac{y_1\partial y_1}{\sqrt{(\Delta y_1)}} + \frac{y_2\partial y_2}{\sqrt{(\Delta y_2)}} + \ldots + \frac{y_n\partial y_n}{\sqrt{(\Delta y_n)}} = 0,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{y_1^{n-1}\partial y_1}{\sqrt{(\Delta y_1)}} + \frac{y_2^{n-2}\partial y_2}{\sqrt{(\Delta y_2)}} + \ldots + \frac{y_n^{n-2}\partial y_n}{\sqrt{(\Delta y_n)}} = 0,$$

$$\frac{y_1^{n-1}\partial y_1}{\sqrt{(\Delta y_1)}} + \frac{y_2^{n-1}\partial y_2}{\sqrt{(\Delta y_2)}} + \ldots + \frac{y_n^{n-1}\partial y_2}{\sqrt{(\Delta y_n)}} = \partial s,$$

in welchen Δy vom $2n-1$ten Grade ist, folgende sind:

$$9. \begin{cases} -2C_1 = x_1\left(\frac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_1-y_1)N_1}+\frac{\sqrt{(\Delta y_2)}}{(a_1-y_2)N_2}+\dots+\frac{\sqrt{(\Delta y_n)}}{(a_1-y_n)N_n}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -2C_n = x_n\left(\frac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_n-y_1)N_1}+\frac{\sqrt{(\Delta y_2)}}{(a_n-y_2)N_2}+\dots+\frac{\sqrt{(\Delta y_n)}}{(a_n-y_n)N_n}\right), \end{cases}$$

in welchen nach (2.)

$$x_1^2 = \frac{(a_1-y_1)(a_1-y_2)\dots(a_1-y_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n^2 = \frac{(a_n-y_1)(a_n-y_2)\dots(a_n-y_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}.$$

Man kann noch auf einem anderen Wege zu den vollständigen Integralen gelangen, der nach *Jacobi* kurz folgender ist.

Differentiirt man die erste der Gleichungen (7.), wenn man darin s statt 3 Variabeln annimmt, so wird

$$-\frac{4\frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2}}{x_1} =$$

$$-\left(\frac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_1-y_1)N_1}+\dots\frac{\sqrt{(\Delta y_n)}}{(a_1-y_n)N_n}\right)^2+\frac{2\partial\left(\frac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_1-y_1)N_1}+\dots+\frac{\sqrt{(\Delta y_n)}}{(a_1-y_n)N_n}\right)}{\partial s},$$

und da

$$\frac{\partial\left(\frac{(\Delta y_1)}{(a_1-y_1)N_1}\right)}{\partial s} =$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta y_1}{(a_1-y_1)N_1^2}\right)}{\partial y}+\frac{\Delta y_1}{(a_1-y_1)^2N_1^2}+\frac{2\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_1-y_1)N_1}\left(\frac{\frac{\partial y_2}{\partial s}}{a_1-y_2}+\frac{\frac{\partial y_3}{\partial s}}{a_1-y_3}\dots\frac{\frac{\partial y_n}{\partial s}}{a_1-y_n}\right)$$

u. s. w. ist, so wird

$$\frac{2\partial\left(\frac{\sqrt{(\Delta y_1}}{(a_1-y_1)N_1}+\dots\frac{\sqrt{(\Delta y_n}}{(a_1-y_n)N_n}\right)}{\partial s} = \left(\frac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(a_1-y_1)N_1}+\dots+\frac{\sqrt{(\Delta y_n)}}{(a_1-y_n)N_n}\right)^2$$

$$+\frac{\partial\left(\frac{\Delta y_1}{(a_1-y_1)N_1^2}\right)}{\partial y_1}+\frac{\partial\left(\frac{\Delta y_2}{(a_1-y_2)N_2^2}\right)}{\partial y_2}\dots+\frac{\partial\left(\frac{\Delta y_n}{(a_1-y_n)N_n}\right)}{\partial y_n}.$$

Demnach wird

$$-\frac{4\frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2}}{x_1} = \frac{\partial\left(\frac{\Delta y_1}{(a_1-y_1)N_1^2}\right)}{\partial y_1}+\frac{\partial\left(\frac{\Delta y_2}{(a_1-y_2)N_2^2}\right)}{\partial y_2}\dots+\frac{\partial\left(\frac{\Delta y_n}{(a_1-y_n)N_n^2}\right)}{\partial y_n}.$$

Von diesem Ausdrucke zeigt *Jacobi* in der angeführten Abhandlung, dafs

er für diesen Fall, wo Δy vom $2n-1$ Grade ist, verschwinden mufs. Es ist also

$$-4\frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} = 0,$$

und hieraus

$$-\frac{\partial x_1}{\partial s} = \text{Const.}$$

Dieser Werth für $\frac{\partial x_1}{\partial s}$ und die ähnlichen für $\frac{\partial x_2}{\partial s} \dots \frac{\partial x_n}{\partial s}$ in die Gleichungen (7.) substituirt, nachdem darin n statt 3 Variabeln gesetzt sind, geben die Gleichungen (9.).

Hamm, den 7. Novbr. 1842.

14.

Beweis, dafs ein Vieleck mit gegebenen Seiten am gröfsten ist, wenn seine Ecken in einem Kreise liegen.

(Vom Herrn Professor *Umpfenbach* zu Giefsen.)

Lehrsatz. Unter allen Vielecken, welche mit den Seiten a, b, c, d, e in der angegebenen Reihenfolge construirt werden können, ist der Inhalt desjenigen ein Maximum, welches in einen Kreis eingeschrieben werden kann.

Beweis. Es sei das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 3. Taf. II.). Zerfällen wir dasselbe durch eine Diagonale AC in ein Dreieck und ein Viereck, und stellen seinen Inhalt, gleich dem des Dreiecks und des Vierecks, durch Z vor, so ist bekanntlich

$$2Z = ab\sin x + cd\sin z + de\sin y - ce\sin(z+y),$$

daher, für das Maximum,

$$2dZ = ab\cos x\,dx + cd\sin z\,dz + de\sin y\,dy - ce\sin(z+y)(dz+dy),$$

welches $= 0$ sein mufs und woraus folgt:

$$-ab\cos x\,dx = cd\cos z\,dz + de\cos y\,dy - ce\cos(z+y)(dz+dy).$$

Es besteht jedoch noch eine Gleichung, welche die Werthe von x, y, z mit einander verbindet und welche sich ergiebt, wenn wir die aus dem Dreiecke und dem Vierecke gezogenen Werthe von AC^2 gleich setzen, nämlich:

$$a^2+b^2-2ab\cos x = c^2+d^2+e^2-2cd\cos z-2de\cos y+2ce\cos(y+z),$$

woraus durch Differentiation folgt:

$$ab\sin x\,dx = cd\sin z\,dz + de\sin y\,dy - ce\sin(y+z)(dy+dz).$$

Dividiren wir die vorige Gleichung durch diese, so kommt

$$-\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{cd\cos y\,dz + de\cos y\,dy - ce\cos(y+z)(dy+dz)}{cd\sin z\,dz + de\sin y\,dy - ce\sin(y+z)(dy+dz)}.$$

Schaffen wir die Nenner weg und vereinigen alle Theilsätze in dem ersten Gliede, so ergiebt sich

$$cd\sin(z+x)dz + de\sin(x+y)dy - ce\sin(y+z+x)(dy+dz) = 0.$$

Setzen wir jetzt die Multiplicatoren der Differentiale der unabhängigen Variabeln $= 0$, so kommt

$$cd\sin(z+x) = ce\sin(y+z+x),$$
$$de\sin(x+y) = ce\sin(y+z+x),$$

oder, was das nämliche ist,

$$\frac{d}{\sin(y+z+x)} = \frac{c}{\sin(y+x)}, \quad \frac{d}{\sin(y+z+x)} = \frac{c}{\sin(x+y)}.$$

Es sei nun *ABCDE* dasjenige dieser Fünfecke, errichtet auf den Seiten *a, b, c, d, e,* welches in einen Kreis eingeschrieben werden kann, so ist $x = 180^0 - \frac{1}{2}\,\text{Bog.}\,ABC$, $z = 180^0 - \frac{1}{2}\,\text{Bog.}\,EDC$, folglich $x+z = 360^0 - \frac{1}{2}\,\text{Bog.}\,ACE = 360^0 - 180^0 + \text{Bog.}\,AE$, folglich $\sin(x+z) = -\sin ACE$. Es ist aber der Halbmesser r des Kreises, welcher durch die drei Puncte *A, C* und *E* geht, $= \frac{\frac{1}{2}e}{\sin ACE}$, also $= \frac{-\frac{1}{2}e}{\sin(x+z)}$. Dieser Halbmesser findet sich ebenso $= \frac{-\frac{1}{2}d}{\sin(EAB+DCB)} = \frac{-\frac{1}{2}d}{\sin(x+y+z)}$ und $= \frac{-\frac{1}{2}c}{\sin(x+y)}$. Es ist mithin $\frac{e}{\sin(x+z)} = \frac{c}{\sin(x+y)} = \frac{d}{\sin(x+y+z)}$. Das Vieleck, dessen Inhalt ein Maximum ist, stimmt also überein mit dem Vielecke, um welches ein Kreis beschrieben werden kann; w. z. b. w.

Dafs die Aufgabe, den Halbmesser eines Kreises zu finden, umschrieben einem Vielecke, dessen Seiten in einer vorgeschriebenen Ordnung gegeben sind, eine *bestimmte* Aufgabe sei, kann wie folgt nachgewiesen werden.

Zuerst ist bekannt, dafs der Halbmesser eines einem Dreiecke umschriebenen Kreises vermittelst der drei Seiten desselben ausgedrückt wird. Es seien nun *a, b, c, d* die vier Seiten eines Vierecks, welchem ein Kreis umschrieben werden soll, *u* eine Diagonale desselben, so ist $r = f(a, b, u) = f(c, d, u)$, woraus sich durch Elimination von u, $r = F(a, b, c, d)$ ergiebt. Es seien *a, b, c, d, e,* die Seiten eines Fünfecks, welchem ein Kreis umschrieben werden soll, *u* eine Diagonale desselben, so ist $r = f(a, b, u) = F(c, d, e, u)$, woraus sich wieder durch Elimination von u, $r = \Phi(a, b, c, d, e)$ ergiebt. Auf die nämliche Weise wird der Beweis auf ein Vieleck von einer beliebigen Anzahl von Seiten ausgedehnt.

Die Ausführung der Rechnung für das Fünfeck führt jedoch schon zu einer Gleichung vom 7ten Grade.

15.

Beweis eines vom Hrn. Professor Steiner aufgestellten Lehrsatzes, Bd. 15. Heft 4. No. 26, 1.

(Von dem Herrn Corrector *Fasbender* zu Iserlohn.)

Eine Ebene P soll sich, indem sie stets durch einen festen Punct K geht, so bewegen, dafs, wenn man die Cosinus der n Winkel, die sie mit n gegebenen Ebenen einschliefst, jeden mit einer gegebenen Gröfse multiplicirt, die Summe dieser Producte stets einen bestimmten Werth S hat.

Die genannten Winkel bleiben dieselben, wenn man jeder der gegebenen n Ebenen eine ihr parallele substituirt. Diese substituirten Ebenen sollen sämmtlich durch den Punct K gelegt werden, durch welchen die bewegliche Ebene P geht; zugleich soll dieser Punct der Anfangspunct eines rechtwinkligen Coordinatensystems sein. Die Gleichungen der gegebenen n Ebenen seien nun

$$A_1x+B_1y+C_1z=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$A_nx+B_ny+C_nz=0.$$

Die Gröfsen A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2, etc. etc. A_n, B_n und C_n sind also sämmtlich gegeben.

Die Gleichung der beweglichen Ebene sei

$$Ax+By+Cz=0.$$

Ferner mögen die Winkel, welche diese bewegliche Ebene mit jeder der gegebenen n Ebenen einschliefst, der Reihe nach durch mit φ_1, φ_2, etc. φ_n, und die Gröfsen, mit denen die Cosinus dieser Winkel multiplicirt werden sollen, der Reihe nach durch f_1, f_2, etc. f_n bezeichnet werden. Man hat alsdann

$$\cos\varphi_1=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}.\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}},\text{ also}$$

$$f_1\cos\varphi_1=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_1A_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}+\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_1B_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}$$
$$+\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_1C_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}},$$

und ähnlicherweise

$$f_2\cos\varphi_2 = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_2A_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}} + \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_2B_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}$$
$$+ \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_2C_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}$$

. . . .

$$f_n\cos\varphi_n = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_nA_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}} + \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_nB_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}}$$
$$+ \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot\frac{f_nC_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}}.$$

Hieraus folgt

$$f_1\cos\varphi_1 + f_2\cos\varphi_2 + \dots f_n\cos\varphi_n =$$
$$\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\left\{\frac{f_1A_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}} + \frac{f_2A_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}} + \dots \frac{f_nA_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}}\right\}$$
$$+ \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\left\{\frac{f_1B_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}} + \frac{f_2B_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}} + \dots \frac{f_nB_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}}\right\}$$
$$+ \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\left\{\frac{f_1C_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}} + \frac{f_2C_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}} + \dots \frac{f_nC_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}}\right\}.$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Summe hat den Werth S. Setzt man nun der Kürze wegen

$$\frac{f_1A_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}} + \frac{f_2A_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}} + \dots \frac{f_nA_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}} = A_0,$$
$$\frac{f_1B_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}} + \frac{f_2B_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}} + \dots \frac{f_nB_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}} = B_0,$$
$$\frac{f_1C_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}} + \frac{f_2C_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}} + \dots \frac{f_nC_n}{\sqrt{(A_n^2+B_n^2+C_n^2)}} = C_0,$$

so sind A_0, B_0 und C_0 bekannte Gröfsen, und man hat

$$S = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot A_0 + \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\cdot B_0 + \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}C_0;$$

also ist

$$\frac{AA_0+BB_0+CC_0}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}.\sqrt{(A_0^2+B_0^2+C_0^2)}} = \frac{S}{\sqrt{(A_0^2+B_0^2+C_0^2)}}.$$

Da die Gröfsen A_0, B_0 und C_0 bekannt sind, so ist auch die Ebene bekannt, welche dargestellt wird durch die Gleichung

$$(\Theta.)\quad A_0x + B_0y + C_0z = 0.$$

Ist φ_0 der Winkel, den diese Ebene mit der beweglichen Ebene bildet, so hat man

$$\cos\varphi_0 = \frac{AA_0+BB_0+CC_0}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}.\sqrt{(A_0^2+B_0^2+C_0^2)}}.$$

Hieraus folgt

$$\cos\varphi_0 = \frac{S}{\sqrt{(A_0^2+B_0^2+C_0^2)}}.$$

Demnach ist der Winkel φ_0 constant. Die bewegliche Ebene bildet also mit der festen Ebene (Θ.) stets denselben Winkel φ_0. Diese Eigenschaft kommt aber, wie sich leicht zeigen läfst, den Tangential-Ebenen eines geraden Kegels mit kreisförmiger Basis in Beziehung auf eine Ebene, die auf der Axe des Kegels senkrecht steht, und auch nur ihnen zu. Die bewegliche Ebene ist also stets Tangential-Ebene eines Kegels. Die Axe des Kegels steht auf der Ebene (Θ.) senkrecht. Da seine Tangential-Ebenen sämmtlich durch den Punct K gehen, so ist dieser die Spitze des Kegels. Der Erzeugungswinkel desselben ist $\frac{1}{2}\pi - \varphi_0$ und hängt also von dem gegebenen Werthe von S ab. Die Bestimmung der Axe und der Spitze des Kegels dagegen, die keinen bestimmten Werth von S voraussetzt, gilt für alle Kegel, die den verschiedenen Werthen von S entsprechen. Diese haben also sämmtlich dieselbe Axe und dieselbe Spitze.

Aus dem Werthe von $\cos\varphi_0$ ergiebt sich für S, als Maximum, $S^2 = A_0^2 + B_0^2 + C_0^2$. Hiefür ist $\varphi_0 = 0$. Die bewegliche Ebene fällt also dann mit der festen Ebene (Θ.) zusammen; die Kegelfläche hat sich in letztere verwandelt, indem der Erzeugungswinkel $= \frac{1}{2}\pi$ wurde. Werthe von S, die sich nur durch ihre Vorzeichen unterscheiden, bestimmen denselben Kegel. Es entsprechen denselben nämlich Werthe von φ_0, die sich zu π ergänzen. Offenbar aber ist die Gesammtheit der Ebenen, die, durch einen gegebenen Punct gehend, mit einer gegebenen Ebene sämmtlich den Winkel φ_0 bilden, identisch mit der Gesammtheit derer, die in derselben Art den Winkel $\pi - \varphi_0$ bilden. Da demnach nur positive Werthe von S zu betrachten sind, so ist im Minim. $S = 0$. Dem entspricht $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$. Die beweglichen Ebenen stehen also hier sämmtlich auf der festen Ebene (Θ.) senkrecht und schneiden sich mithin alle in dem durch den Punct K auf die Ebene (Θ.) errichteten Perpendikel, d. i. in der gemeinschaftlichen Axe sämmtlicher Kegel. In letztere hat sich alsdann die Kegelfläche verwandelt, indem der Erzeugungswinkel $\frac{1}{2}\pi - \varphi_0$ gleich 0 wurde.

Iserlohn am 1sten Juni 1842.

andis

it refe-
um ex
Newton
m viri
s pro-
, quae
eripiat,
m for-
ativam
s. His
naxime
is mo-
atis [4])
t *Biela*
a vera
natura
ewton,
emovit,
essibus

it ver-
ecimen

zu be-
elskunde

umacher.
chen Ab-
tronomi-

schen Nachrichten a Schumacher sunt contentae.

Demna
mit de
kommt
gerade
auf de
weglic
des K
Ebene
Kegel
von de
Spitze
setzt,
Diese

$A_0^2 +$
mit de
verwa
die si
Kegel.
ergänz
gegeb
Φ_0 bil
Wink
trachte
beweg
senkre
Ebene
sämmt
delt, i

16.

De orbitis cometarum ex observationibus determinandis commentatio.

(Auct. Dr. *A. T. Bergius*, ad Acad. Upsalicns. Docens Astronomiae.)

Ad quaestiones nostrae aetati gravissimas Astronomiae ea sine dubio est referenda, quae in natura et motu cometarum indagandis et in orbitis illorum ex observationibus determinandis versatur, quod problema summus jam *Newton* in principiis Philosophiae naturalis difficillimum nuncupavit. Post *Newton* viri celeberrimi *Euler, Laplace, Lagrange, Olbers, Legendre* varias hujus problematis solvendi vias inierunt. Methodus nunc temporis maxime usitata, quae etiam simplicitate sua brevitateque nescio an omnibus aliis palmam praeripiat, est ea Cel. *Olbers* [1]), quae, formulis a Cel. *Gaufs* [2]) ad simplicissimam formam reductis, viam nobis aperuit brevissimam, qua ad notitiam approximativam orbitae cometae ex tribus observationibus geocentricis pervenire possumus. His methodis elementa parabolica cometae observati invenimus. Quum vero maxime probabile est, cometas, qui nostra aetate observentur, in orbitis ellipticis moveri [3]), et quum ex cometis super centum et quinquaginta jam observatis [4]) elementa elliptica quattuor tantummodo a Cel. *Halley, Olbers, Encke* et *Biela* diversis temporibus computata sunt, summo jure dicere possumus, nos a vera cognitione orbitarum plerorumque cometarum valde esse remotos, ne de natura et indole horum corporum coelestium loquamur; quamvis post summum *Newton,* qui sagacitate sua animi superstitiosum illum horum corporum terrorem removit, etiam haec pars Astronomiae nostris certe temporibus maximis progressibus se gaudere possit.

Post tantos viros, qui in his disquisitionibus summo studio sunt versati, multis haud procul a temeritate remotum videri potest, nos, specimen

1) Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen. Weimar 1797.
2) v. *Zach.* Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde XXVIII. Band pag. 501.
3) *Laplace*, Traité de Mécanique céleste. Tome Ier p. 232.
4) Catalogum optimum orbitarum omnium cometarum adhuc computatarum viri Cell. *Schumacher.* et *Olbers* tradiderunt, in particula prima et tertia in „*Schumacher's* Astronomischen Abhandlungen.“ Orbitae cometarum post 1825 computatae in variis numeris „der Astronomischen Nachrichten“ a *Schumacher* sunt contentae.

Astronomicum edituros, istam materiam potissimum elegisse, nisi in eo excusationem quamdam haberemus, quod novus ab *Laugier* Parisiis his ipsis temporibus cometa inventus, summum in nobis hujus rei pertractandae erexit studium. Indulgentiae igitur Astronomorum has studiorum nostrorum recommendamus primitias.

§. 1.

Ad problema de orbitis cometarum determinandis plane solvendum in genere tres observationes requiruntur, et sane omni rigore solvi posset, nisi aequationes, ad quas hac via ducimur, gradus tam elevati essent et tam complicatae, ut ad methodos approximationis nos confugere necesse sit.

Si corpus coeleste nostri systematis solaris consideremus, cujus distantia a sole r est, cujusque positionem in spatio determinemus coordinatis rectangulis x, y, z, quorum originem in centro solis ponamus, si distantiam mediam solis a tellure unitatem distantiae ponamus, si porro μ summam massarum solis a teriusque corporis coelestis exprimat, et vim attractivam solis ut unicam in hoc agentem consideremus; hae relationes [1]) satis sunt cognitae

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x\mu}{r^3}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{y\mu}{r^3}=0, \quad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z\mu}{r^3}=0 \quad . \quad . \quad (1),$$

E quibus sine ullo negotio tres integrales primos deducimus sequentes

$$\frac{ydz-zdy}{dt}=a, \quad \frac{zdx-xdz}{dt}=b, \quad \frac{xdy-ydx}{dt}=c \quad . \quad . \quad (2),$$

ubi a, b et c constantes arbitrarias integratione inductas exprimunt. Si tres aequationes (2) respective cum x, y et z multiplicemus, additione obtinebimus

$$ax+by+cz=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Quocirca concludimus, orbitam, in qua corpus coeleste movetur, in plano esse sitam, quae per centrum solis transit.

§. 2.

Si aequationes (1) respective cum $2dx$, $2dy$ et $2dz$ multiplicemus additione et integratione, designante h constantem arbitrariam, obtinebimus

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{2\mu}{r}-h$$

[1]) *Laplace*, Méc. cél. Tome Ier pag. 157.

cujus valoris substitutione in aequatione

$$\frac{r^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}-\frac{r^2\,dr^2}{dt^2} = a^2+b^2+c^2 \qquad (3)$$

quae ex aequationibus (2) statim sequitur, si relationem observemus $r^2 = x^2+y^2+z^2$; prodibit hic ipsius dt valor

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{(2\mu r-hr^2-k^2)}} \qquad (4).$$

ubi brevitatis gratia $a^2+b_2+c^2=k^2$ posuimus.

Designet dv angulum infinite parvum inter duos radios vectores consecutivos, erit

$$dx^2+dy^2+dz^2 = dr^2+r^2dv^2$$

quibus in (3) substitutis, relatio haecce inter areas et tempora interque celeritatem angularem $\frac{dv}{dt}$ et radium vectorem satis cognita prodibit

$$dv = \frac{k\,dt}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Si pro dt valorem suum ex (4) substituamus, prodibit

$$dv = \frac{k\,dr}{r\sqrt{(2\mu r-hr^2-k^2)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

ex qua aequationem polarem orbitae integratione obtinebimus. Ex illa aequatione maximus et minimus ipsius r valor determinatur hac relatione $2\mu r-hr^2-k^2=0$. Si igitur maximum ipsius r valorem per $a(1+e)$, minimum vero per $a(1-e)$ exprimamus, erit summa horum valorum $\frac{2\mu}{h}$ et productum $\frac{k^2}{h}$, quo pro constantibus k et h sequentes obtinebimus valores

$$k = \sqrt{\mu}\sqrt{(a(1-e^2))}, \qquad h = \frac{\mu}{a} \qquad (7),$$

quibus substitutis aequatio differentialis hanc induit formam

$$dv = \frac{\sqrt{(a(1-e^2))}\,dr}{r\sqrt{\left(2r-\frac{1}{a}r^2-a(1-e^2)\right)}} \qquad (8).$$

Illa integrata sub positione, v evanescere, quum $r=a(1-e)$, efficit

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \qquad (b),$$

quae est aequatio sectionum conicarum, origine coordinatarum in altero foco posita, in qua e excentricitatem et v angulum, quem radius vector cum axi majori a facit, a Perihelio computatum, exprimunt

§. 3.

Si orbita esset valde excentrica, ut cometarum semper est, formulae motus elliptici in series convergentes facillime evolvuntur. Quum hoc casu e ab unitate parum differat, aequatio (b); distantia minima $a(1-e) = q$ posita, in hanc abit

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v\left(1 + \frac{1-e}{1+e} \tang^2 \frac{1}{2} v\right)}, \text{ et evolutione facta}$$

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}\left\{1 - \frac{1-e}{1+e}\tang^2 \tfrac{1}{2}v + \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \tang^4 \tfrac{1}{2} v - \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^3 \tang^6 \tfrac{1}{2} v + \text{etc.}\right\} \quad (9).$$

Hoc valore pro r in (5) substituto prodibit

$$dt = \frac{2q^2}{\sqrt{(\mu a(1-e^2))}}(1 + \tang^2 \tfrac{1}{2} v)\left\{1 - \frac{1-e}{1+e}\tang^2 \tfrac{1}{2} v + \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \tang^4 \tfrac{1}{2} v - \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^3 \tang^6 \tfrac{1}{2} v + \text{etc.}\right\}^2 . \frac{\frac{1}{2} dv}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$$

et evolutione et integratione sub positione t evanescere, quum $v = 0$,

$$t = \frac{2q^2}{\sqrt{(\mu a(1-e^2))}}\left\{\tang \tfrac{1}{2} v - \frac{2\left(\frac{1-e}{1+e}\right)-1}{3}\tang^3 \tfrac{1}{2} v + \frac{\frac{1-e}{1+e}\left(3\left(\frac{1-e}{1+e}\right)-2\right)}{5}\tang^5 \tfrac{1}{2} v - \text{etc.}\right\} \quad (10).$$

Si orbita in parabolam abiret, erit $e = 1$ et $\sqrt{(\mu a(1-e^2))} = \sqrt{(2\mu q)}$, quo igitur casu formulae pro r et t hanc induunt formam simplicissimam

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v} \\ t &= \frac{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}(\tang \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3}\tang^3 \tfrac{1}{2} v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (c).$$

Designantibus r' et v' radium vectorem et anomaliam veram, quae tempori t' conveniunt, erit $t'-t$ tempus, quo cometa arcum parabolicum, inter duos radios vectores contentum, describit. Posita igitur massa solis $= 1$, quantitate autem materiae cometae respectu solis neglecta [1]) erit $\mu = 1$, et ideo

[1]) Jus hujus suppositionis nobis concedunt infinite parvae massae omnium cometarum observatorum. Vide inter alios *Littrow* „über den gefürchteten Cometen des Jahres 1832 und über die Cometen überhaupt. Wien 1832. pag. 38."

$$\left.\begin{aligned} t'-t &= \sqrt{(2q^3)}(\text{tang}\tfrac{1}{2}v' - \text{tang}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}(\text{tang}^3\tfrac{1}{2}v' - \text{tang}^3\tfrac{1}{2}v)) \\ r &= q(1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}v), \qquad\qquad r' = q(1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}v') \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Si c chordam exprimit arcus hujus, quem radii vectores r et r' subsecant, erit

$$\begin{aligned} c^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v'-v) \\ &= r^2 + r'^2 - 2rr'\frac{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}(v'-v)}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}(v'-v)} \\ &= (r+r')^2 - \frac{4rr'}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}(v'-v)}, \end{aligned}$$

quapropter

$$\frac{rr'}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}(v'-v)} = \tfrac{1}{4}(r+r'+c)(r+r'-c).$$

Quum vero sit

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}v' = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)+\text{tang}\frac{1}{2}v}{1-\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)\,\text{tang}\frac{1}{2}v}, \qquad r = q(1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}v),$$

erit

$$r' = q(1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}v') = \frac{r(1+\text{tang}^2\frac{1}{2}(v'-v))}{(1-\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)\,\text{tang}\frac{1}{2}v)^2},$$

$$\tfrac{1}{4}(r+r'+c)(r+r'-c) = \frac{q^2(1+\text{tang}^2\frac{1}{2}v)^2}{(1-\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)\,\text{tang}\frac{1}{2}v)^2}.$$

Si brevitatis gratia ponamus $\frac{1}{2}(r+r'+c) = m$, $\frac{1}{2}(r+r'-c) = n$, erit

$$\begin{aligned} m+n &= \frac{2q(1+\text{tang}^2\frac{1}{2}v)}{1-\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)\,\text{tang}\frac{1}{2}v} + \frac{q\,\text{tang}^2\frac{1}{2}(v'-v)(1+\text{tang}^2\frac{1}{2}v)^2}{(1-\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)\,\text{tang}\frac{1}{2}v)^2} \\ &= \pm 2\sqrt{(mn)} + \text{tang}^2\tfrac{1}{2}(v'-v)\frac{mn}{q} \end{aligned}$$

ideoque

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(v'-v) = \sqrt{q}\,\frac{\sqrt{m}\mp\sqrt{n}}{\sqrt{(mn)}}.$$

Expressio (11) pro $t'-t$ etiam sequenti modo scribi potest

$$t'-t = \sqrt{(2q^3)}\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)(1+\text{tang}^2\frac{1}{2}v)^2}{(1-\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)\,\text{tang}\frac{1}{2}v)^2}\left\{1+\tfrac{1}{3}\frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}(v'-v)(1+\text{tang}^2\frac{1}{2}v)}{1-\text{tang}\frac{1}{2}(v'-v)\,\text{tang}\frac{1}{2}v}\right\}$$

quae valoribus jam inventos introductis in hanc abit formam

$$t'-t = \frac{\sqrt{2}}{3}(m^{\frac{3}{2}}\mp n^{\frac{3}{2}}) = \tfrac{1}{6}(r+r'+c)^{\frac{3}{2}}\mp\tfrac{1}{6}(r+r'-c)^{\frac{3}{2}}\ . \quad (d).$$

Si tempus $t'-t$ in diebus expressum desideramus, hoc per constantem in theoria motus $k = 0{,}0172021$, cujus logarithmus est $\log k = 8{,}2355814$, multiplicari necesse est. [1])

[1]) *Gaufs*, Theoria motus corporum coelestium pag. 2.

Expressio illa elegans, quae tempus per duos radios vectores et chordam dat, a Cel. *Euler* inventa [1]), primum a Cel. *Lambert* [2]) fuit applicata. Signum superius vel inferius valet, prout $v'-v$ infra vel supra 180° est.

§. 4.

Si xyz, $x'y'z'$, $x''y''z''$ coordinatas trium punctorum in orbita corporis coelestis, quae in plano per centrum solis transeunte est sita, designent, tres sequentes aequationes (§. 1.) habebimus,

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= 0 \\ ax'+by'+cz' &= 0 \\ ax''+by''+cz'' &= 0 \end{aligned}$$

ex quibus eliminatione duarum quantitatum $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ sequentem aequationem obtinemus conditionalem

$$(y''z'-y'z'')x+(yz''-y''z)x'+(y'z-yz')x'' = 0.$$

Quum vero $y''z'-y'z''$ projectionem in planum yz areae duplicis trianguli exprimit, qui per centrum solis et puncta $x'y'z'$, $x''y''z''$ determinatur, si aream hujus trianguli duplicem per $[r'r'']$, sicuti triangulorum, quos radii vectores r et r'', et r et r' formant, per $[rr'']$ et $[rr']$ designemus, aequatio illa conditionalis formas tres induit hasce, prout b et c, a et c, vel a et b eliminantur

$$\left.\begin{aligned} [r'r'']x-[rr'']x'+[rr']x'' &= 0 \\ [r'r'']y-[rr'']y'+[rr']y'' &= 0 \\ [r'r'']z-[rr'']z'+[rr']z'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

quae aequationes sub tribus formis diversis eandem exprimunt conditionem.

Posito:

ϱ, ϱ', ϱ''	tres	distantiae curtatae cometae a tellure;
α, α', α''	-	longitudines geocentricae observatae;
δ, δ', δ''	-	latitudines geocentricae;
$\odot$, $\odot'$, $\odot''$	-	longitudines solis;
R, R', R''	-	distantiae telluris a sole;
t, t', t''	-	tempora observationum,

[1]) *Leonh. Euler*, Theorie der Planeten und Cometen, von *Johann* Freiherrn von *Paccassi* übersetzt und mit einem Anhange und Tafeln vermehrt. Wien 1781. pag. 148.

[2]) *Lambert*, Insigniores orbitae cometarum proprietates Augustae Vindelicorum 1761 pag. 40. Cfr. *Laplace*, Traité de mécanique céleste. Tome Ier pag. 196, et *Gaufs*, Theoria motus corporum coelestium pag. 123.

erit

$$x = \varrho\cos\alpha - R\cos\odot,\quad y = \varrho\sin\alpha - R\sin\odot,\quad z = \varrho\,\mathrm{tang}\,\delta,$$
$$x' = \varrho'\cos\alpha' - R'\cos\odot',\quad y' = \varrho'\sin\alpha' - R'\sin\odot',\quad z' = \varrho'\,\mathrm{tang}\,\delta',$$
$$x'' = \varrho''\cos\alpha'' - R''\cos\odot'',\quad y'' = \varrho''\sin\alpha'' - R''\sin\odot'',\quad z'' = \varrho''\,\mathrm{tang}\,\delta''.$$

His valoribus in aequationibus (12) substitutis obtinemus

$$[r'r''](\varrho\cos\alpha - R\cos\odot) - [rr''](\varrho'\cos\alpha' - R'\cos\odot') + [rr'](\varrho''\cos\alpha'' - R''\cos\odot'') = 0,$$
$$[r'r''](\varrho\sin\alpha - R\sin\odot) - [rr''](\varrho'\sin\alpha' - R'\sin\odot') + [rr'](\varrho''\sin\alpha'' - R''\sin\odot'') = 0,$$
$$[r'r'']\varrho\,\mathrm{tang}\,\delta - [rr'']\varrho'\,\mathrm{tang}\,\delta' + [rr']\varrho''\,\mathrm{tang}\,\delta'' = 0.$$

Ex his tribus aequationibus tres quantitatum quinque incognitarum ϱ, ϱ', ϱ'', $\frac{[r'r'']}{[rr']}$, $\frac{[rr'']}{[rr']}$ eliminatione removere possumus. Ad quem finem si secundam cum $\cos\odot'$ multiplicemus et ex producto primam per $\sin\odot'$ multiplicatam detrahamus, ad hanc aequationem ducimur

$$[r'r''](\varrho\sin(\alpha-\odot') + R\sin(\odot'-\odot)) - [rr'']\varrho'\sin(\alpha'-\odot')$$
$$+ [rr'](\varrho''\sin(\alpha''-\odot') - R''\sin(\odot''-\odot')) = 0.$$

Valore ipsius $[rr'']\varrho'$ ex aequatione tertia deducto in hoc substituto, proveniet haec ipsius ϱ'' expressio

$$\varrho'' = \frac{[r'r'']}{[rr']}\,\frac{\mathrm{tang}\,\delta'\sin(\alpha-\odot') - \mathrm{tang}\,\delta\sin(\alpha'-\odot')}{\mathrm{tang}\,\delta''\sin(\alpha'-\odot') - \mathrm{tang}\,\delta'\sin(\alpha''-\odot')}\varrho$$
$$+ \frac{\mathrm{tang}\,\delta'}{[rr']}\cdot\frac{[r'r'']R\sin(\odot'-\odot) - [rr']R''\sin(\odot''-\odot')}{\mathrm{tang}\,\delta''\sin(\alpha'-\odot') - \mathrm{tang}\,\delta\sin(\alpha''-\odot')}.$$

Ultimum hujus expressionis membrum simpliciorem induit formam, si etiam pro tellure eundem significationis modum introducamus, ut habeamus

$$[R'R''] = R'R''\sin(\odot''-\odot'),\ [RR''] = RR''\sin(\odot''-\odot),\ [RR'] = RR'\sin(\odot'-\odot)$$

Sit porro brevitatis gratia

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{\mathrm{tang}\,\delta'\sin(\alpha-\odot') - \mathrm{tang}\,\delta\sin(\alpha'-\odot')}{\mathrm{tang}\,\delta''\sin(\alpha'-\odot') - \mathrm{tang}\,\delta'\sin(\alpha''-\odot')} \\ M'' &= \frac{\mathrm{tang}\,\delta'\sin(\odot'-\odot)}{\mathrm{tang}\,\delta''\sin(\alpha'-\odot') - \mathrm{tang}\,\delta'\sin(\alpha''-\odot')} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (e),$$

prodibit

$$\varrho'' = \frac{[r'r'']}{[rr']}\cdot M'\varrho + \left(\frac{[r'r'']}{[rr']} - \frac{[R'R'']}{[RR']}\right)M''R \qquad (f).$$

Quamcunque sectionem conicam cometa describat, eam in parte orbitae, in qua nobis est visibilis, parabolae sese applicantem considerare possumus. Quum vero, ut vidimus, areae, quas radius vector diversis describit temporibus, his ipsis temporibus sint proportionales, et areae triangulorum duplices $[r'r'']$, $[rr']$ parvis temporum intervallis a sectoribus parabolicis correspondentibus

parum differant, eoque minus duorum triangulorum ratio a ratione sectorum parabolicorum sint diversi, quumque, quod ad orbitam telluris adtinet, parva excentricitate orbitae ejus considerata, id fere omni rigore pro intervallis temporum aequalibus dicere possimus; sine magno errore statuere possumus:

$$\frac{t''-t'}{t'-t} = \frac{[r'r'']}{[rr']} = \frac{[R'R'']}{[RR']} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

et, si $M = \frac{t''-t'}{t'-t} M'$, expressionem ($f$) ad formam hanc simplicissimam reducimus

$$\varrho'' = \frac{t''-t'}{t'-t} M'\varrho = M\varrho \quad \ldots \quad \ldots \quad (g).$$

quae rationem inter ϱ et ϱ'' in quantitatibus cognitis suppeditat.

§. 5.

Ut radios vectores r, r'' et chordam correspondentem c per eandem quantitatem ϱ exprimamus, has notamus relationes

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$, $c^2 = (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2$.

Si pro x, y, z, x'', y'', z'' valores suos introducamus et observemus, esse $\varrho'' = M\varrho$, expressiones sequentes sponte prodeunt

$$r = \sqrt{\left(\frac{\varrho^2}{\cos^2\delta} - 2R\varrho\cos(\alpha - \odot) + R^2\right)}$$
$$r'' = \sqrt{\left(\frac{M^2\varrho^2}{\cos^2\delta''} - 2MR''\varrho\cos(\alpha'' - \odot'') + R''^2\right)},$$

quae, positis

$$\cos\delta\cos(\alpha - \odot) = \cos\psi, \qquad \cos\delta''\cos(\alpha'' - \odot'') = \cos\psi'' \quad (h)$$
$$R\sin\psi = B, \qquad R''\sin\psi'' = B'' \quad (i)$$

in has abeunt calculo numerico commodiores

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\left\{\left(\frac{\varrho}{\cos\delta} - R\cos\psi\right)^2 + B^2\right\}} \\ r'' &= \sqrt{\left\{\left(\frac{M\varrho}{\cos\delta''} - R''\cos\psi''\right)^2 + B''^2\right\}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14).$$

Ut pro chorda c commodam obtineamus expressionem, postquam valores ipsorum x, y, z, x'', y'', z'' fuerunt substitutae, quinque quantitates auxiliares g, G, h, H, ζ computamus ex aequationibus hisce suppositis

$$\left.\begin{aligned} &R''\cos\odot'' - R\cos\odot = g\cos G, \text{ vel } R''\cos(\odot'' - \odot) - R = g\cos(G - \odot) \\ &R''\sin\odot'' - R\sin\odot = g\sin G, \text{ vel } R''\sin(\odot'' - \odot) = g\sin(G - \odot) \end{aligned}\right\} (k)$$

$$\left.\begin{aligned} &M\cos\alpha'' - \cos\alpha = h\cos\zeta\cos H, \text{ vel } M - \cos(\alpha'' - \alpha) = h\cos\zeta\cos(H - \alpha'') \\ &M\sin\alpha'' - \sin\alpha = h\sin\zeta\sin H, \text{ vel } \sin(\alpha'' - \alpha) = h\sin\zeta\sin(H - \alpha'') \\ &M\tang\delta'' - \tang\delta = h\sin\zeta, \text{ vel } M\tang\delta'' - \tang\delta = h\sin\zeta \end{aligned}\right\} (l)$$

quarum ope c sequentem obtinet valorem

$$c = \sqrt{\{(\varrho h\cos\zeta\cos H - g\cos G)^2 + (\varrho h\sin\zeta\sin H - g\sin G)^2 + \varrho^2 h^2\sin^2\zeta\}}$$
$$= \sqrt{\{\varrho^2 h^2 - 2\varrho hg\cos\zeta\cos(G-H) + g^2\}}$$

quae formula ulteriorem haud abnuit simplificationem, si ponamus

$$\cos\zeta\cos(G-H) = \cos\Phi \quad \ldots\ldots \quad (m),$$
$$g\sin\Phi = A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n),$$

quo reducitur ad hanc

$$c = \sqrt{\{(\varrho h - g\cos\Phi)^2 + A^2\}}$$

et ulterius progrediendo, si statuamus

$$\varrho h - g\cos\Phi = u, \quad \text{quo fit} \quad \varrho = \frac{u + g\cos\varphi}{h} \quad \ldots \quad (o),$$

ad hanc simplicissimam erimus perducti

$$c = \sqrt{(u^2 + A^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (p).$$

Expressiones ipsorum r et r'' simpliciores reddere etiam licet, statuendo

$$\left.\begin{aligned} h\cos\delta &= b \\ \frac{h\cos\delta''}{M} &= b'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

$$\left.\begin{aligned} g\cos\Phi - b\,R\cos\psi &= s \\ g\cos\Phi - b''R''\cos\psi'' &= s'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (r),$$

quo has formulas simplices pro r et r'' obtinemus

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\left\{\left(\frac{u+s}{b}\right)^2 + B^2\right\}} \\ r'' &= \sqrt{\left\{\left(\frac{u+s''}{b''}\right)^2 + B''^2\right\}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (s).$$

Ex his formulis, quibus quantitates r, r'' et c exprimuntur, u ita determinetur necesse est, ut exinde aequationi *Lambertianae* satisfiat

$$(r + r'' + c)^{\frac{3}{2}} - (r + r'' - c)^{\frac{3}{2}} = \frac{t'' - t}{m} \quad \ldots\ldots \quad (t),$$

denotante m tempus dierum 9,6887401 et ideo $\log m = 0{,}9862673$. Aequatio haec experimentis tali modo resolvitur, ut a valore ipsius $r + r''$ supposito egrediamur, cujus substitutione valorem correspondentem ipsius c determinemus, quo u, r et r'' ex aequationibus (p) et (s) eliciamus. Quo facto novus valor ipsius $r + r''$ obtinetur, ex cujus congruentia cum valore supposito veritatem resultati concludere licet. Quum vero hoc plerumque non evenit, valor hic novus ipsius $r + r''$ eodem modo adhibetur et calculus idemtidem repetitur, donec congruentia perfecta efficitur. Primum valorem adhibere possumus

$r+r''=2$, quum $r+r''<1$ esse non possit, quamdiu distantia apparens cometae a sole mojor quam 30° est, quod fere semper evenit; et $r+r''>3$ perraro est, quoniam cometae nobis intra orbitam Martis plerumque sunt visibiles.

Tali modo u ea, quam obtinere possumus, perfectione computato, ϱ et ϱ'' ex aequationibus supra traditis determinantur.

§. 6.

Quantitatibus ϱ et ϱ'' jam cognitis facili negotio elementa orbitae eliciuntur. Ad hunc finem ponamus, exprimere

λ, λ'' longitudines cometae heliocentricas ad tempus primae et tertiae observationis;

β, β'' latidudines heliocentricas;

v, v'' longitudines in orbita;

☊ longitudinem nodi ascendentis;

i inclinationem orbitae, semper intra 0° et 90° contentam, si more usitato inter cometas, qui directe vel retro moventur, destinguamus;

π longitudinem perihelii;

T tempus transitus per perihelium;

q distantiam in perihelio.

Si projectiones locorum cometae in planum Eclipticae consideremus, ope trigonometriae planae ad quantitates λ, β, λ'', β'' determinandas sequentes facillime colliguntur formulas

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\cos(\alpha-\odot)-R &= r\cos\beta\cos(\lambda-\odot)\\
\varrho\sin(\alpha-\odot) &= r\cos\beta\sin(\lambda-\odot)\\
\varrho\,\mathrm{tang}\,\delta &= r\sin\beta\\
\varrho''\cos(\alpha''-\odot'')-R'' &= r''\cos\beta''\cos(\lambda''-\odot'')\\
\varrho''\sin(\alpha''-\odot'') &= r''\cos\beta''\sin(\lambda''-\odot'')\\
\varrho''\,\mathrm{tang}\,\delta'' &= r''\sin\beta''
\end{aligned}\right\}\quad(a).$$

Quoniam sex aequationes habemus, valores ipsorum r et r'' ex his etiam elicere possumus, quorum congruentia cum iis, ex quantitate u deductis, veritatem calculi confirmat. Cometa directe vel retro movetur, prout λ'' majus minusve ipso λ est.

Ad longitudinem nodi ascendentis et inclinationem orbitae determinandas ex principiis trigonometriae sphericae, si aequationem observemus identicam $\sin(\lambda''-☊)=\sin((\lambda-☊)+(\lambda''-\lambda))$, sponte sequitur:

$$\left.\begin{aligned} \pm \operatorname{tang}\beta &= \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega) \\ \pm \frac{\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta \cos(\lambda'' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} &= \operatorname{tang} i \cos(\lambda - \Omega) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\beta)$$

ubi signa adhibeantur superiora, si cometa directe moveatur, sin vero retro, inferiora.

Ad longitudines in orbita determinandas sine ullo negotio formulae deducuntur haecce

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{tang}(\lambda - \Omega)}{\cos i} &= \operatorname{tang}(v - \Omega) \\ \frac{\operatorname{tang}(\lambda'' - \Omega)}{\cos i} &= \operatorname{tang}(v'' - \Omega) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Formulas motus parabolici supra traditas respicientibus formularum pro determinatione longitudinis perihelii et distantiae minimae deductio erit in aperto, si tantummodo observemus esse $\cos\frac{1}{2}(v''-\pi) = \cos\frac{1}{2}((v-\pi)+(v''-v))$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r}} &= \frac{1}{\sqrt{q}} \cos\tfrac{1}{2}(v-\pi) \\ \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(v''-v)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sin\frac{1}{2}(v''-v)\sqrt{r''}} &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sin\tfrac{1}{2}(v-\pi) \end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

Ex tabulis *Barkerianis* [1]) (vel ex aliis tabulis motus cometarum) jam motus eliciuntur medios, anomaliis veris $v-\pi$, $v''-\pi$ vel $\pi-v$, $\pi-v''$ correspondentes; quos si litteris N, N'' designemus, duas expressiones temporis transitus cometae per perihelium obtinebimus sequentes:

$$T = t \mp Nnq^{\frac{3}{2}} = t'' \mp N''nq^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

ubi signa valeant superiora, si motu directo $v > \pi$, $v'' > \pi$ sit, vel si motus fiat retro, et sit $v < \pi$, $v'' < \pi$; signa vero inferiora casus respiciunt oppositos. Constans est n quantitas, cujus logarithmus $= 0{,}0398723$ est. Duorum iqsius T concensus valorum veritatem confirmat calculi.

Ex elementis tali modo indagatis longitudo et latitudo geocentrica cometae pro tempore observationis mediae computantur, quorum valorum computatorum cum observatis consensus ultimam calculi trutinam suppeditet, ex qua judicare possumus, quanta cum accuratione elementa fuerint determinata.

Elementa orbitae hoc modo determinata non sunt nisi approximata. Superest igitur scrutari, quomodo ex hac prima elementorum determinatione ad cognitionem horum, quam observationes concedant, accuratissimam perveniri

[1]) *Olbers*, Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen. Weimar 1797.

licet. Priusquam autem hanc rem adgrediamur, superiorem juvat ad calculos numericos accommodare theoriam.

§. 7

Computatio elementorum approximatorum cometae 28 Oct. 1842 Parisiis a Laugier inventi.

In observatorio Regio Berolinensi loci apparentes sunt observati sequentes:

1842 Nov. 5,326081 t. m. Berol.	A. R.	$268^0 12' 22'',4$	Decl. $+52^0 14' 53'',1$
7,367911		271 37 34,3	$+46$ 3 57,2
8,370782		273 9 15,1	$+42$ 43 27,2

Ex his observationibus pro α et δ valores prodeunt sequentes:

α ..$265^0 33' 20'',9$	δ ..$75^0 40' 51'',2$
α' ..273 13 27,4	δ' ..69 30 28,9
α''..275 43 51,5	δ''..66 7 18,5

Ex tabulis porro colligitur astronomicis:

$\odot$ ..$222^0 59' 17'',2$	$\log R$ ..9,9959650
$\odot'$ ..225 2 22,9	$\log R'$ ..9,9957465
$\odot''$..226 2 52,8	$\log R''$..9,9956406

Quibus ex datis calculus hoc modo conficitur: [1]

$\tan\delta'$..0,42745	$\tan\delta$..0,59303
$\sin(\alpha-\odot')$..9,81268	$\sin(\alpha'-\odot')$..9,87233
0,24013	0,46536
	0,39291
	0,07245
	9,58745
	0,48500
$\tan\delta''$..0,35391	$\tan\delta'$..0,42745
$\sin(\alpha'-\odot')$..9,87233	$\sin(\alpha''-\odot')$..9,88860
0,22624	0,31605
	0,72860
	9,58745

[1]) Ut calculus prodeat facilior, quinque tantummodo locos decimales adhibemus et tabulas, quibus logarithmus summae et differentiae duorum numerorum ex datis horum logarithmis elicitur, in usum vocamus.

$$\begin{array}{rrr}
\log(t''-t)..0{,}00124 & \log R''..9{,}99564 & \log R''..9{,}99564 \\
\log(t'-t)..\underline{0{,}31002} & \cos(\odot''-\odot)..\underline{9{,}99938} & \sin(\odot''-\odot)..\underline{8{,}72738} \\
9{,}69122 & 9{,}99502 & 8{,}72302 \\
\underline{0{,}48500} & \log R..9{,}99596 & \underline{7{,}33002_n} \\
\log M..0{,}17622 & \underline{2{,}66594} & \tan(G-\odot)..1{,}39300_n \\
 & 7{,}33002_n & G..315^0\,18'\,17'',2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
8{,}72302 \\
\sin(G-\odot)..\underline{9{,}99964} \\
\log g..8{,}72338
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\log M..0{,}17622 & \log M.\tan\delta''..0{,}53013 \\
\cos(\alpha''-\alpha)..\underline{9{,}99311} & \tan\delta..\underline{0{,}59303} \\
\underline{0{,}46342} & 0{,}87021 \\
9{,}71280 & \log h\sin\zeta..9{,}72282_n \\
\sin(\alpha''-\alpha)..\underline{9{,}24713} & \log h\cos\zeta..\underline{0{,}73685} \\
\tan(H-\alpha'')..9{,}53433 & \tan\zeta..9{,}98597_n \\
H-\alpha''..\;18^0 53' 35'' & \zeta..-44^0\,4'\,28'' \\
H..292\;\;7\;\;2 & \log h...\;9{,}88046
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
\cos\zeta..9{,}85639 & \cos\delta..9{,}39326 & \cos\delta''..9{,}60723 \\
\cos(G-H)..\underline{9{,}96342} & \cos(\alpha-\odot)..\underline{9{,}86716} & \cos(\alpha''-\odot''..\underline{9{,}81091} \\
\cos\varphi..9{,}81981 & \cos\psi..9{,}26042 & \cos\psi''..9{,}41814 \\
\varphi..48^0 40' 9'' & \psi..79^0 30' 19'' & \psi''..74^0 49' 1''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
\log g..9{,}72339 & \log R..9{,}99596 & \log R''..9{,}99564 \\
\sin\varphi..\underline{9{,}87559} & \sin\psi..\underline{9{,}99267} & \sin\psi''..\underline{9{,}98457} \\
\log A..8{,}59898 & \log B..9{,}98863 & \log B''..9{,}98021
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\log h..9{,}88046 & \log(h\cos\delta'')..9{,}48769 \\
\cos\delta..\underline{9{,}39326} & \log M..\underline{0{,}17622} \\
\log b..9{,}27372 & \log b''..9{,}31147
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
\log(g.\cos\varphi)..8{,}45320 & \log(bR.\cos\psi)..8{,}53010 & \log(b''R''\cos\psi'')..8{,}72525 \\
\text{num.}+0{,}03493 & \text{num.}+0{,}03389 & \text{num.}+0{,}05312
\end{array}$$

$$s..+0{,}00104 \qquad s''..-0{,}01819$$

Jam sequitur, u ex aequationibus

$$r = \sqrt{\left\{\left(\frac{u+s}{b}\right)^2+B\right\}}, \quad r'' = \sqrt{\left\{\left(\frac{u+s''}{b''}\right)^2+B''^2\right\}}, \quad k = \sqrt{(u^2+A^2)}$$

experimentis ita determinare, ut aequationi $(r+r''+c)^{\frac{3}{2}}-(r+r''-c)^{\frac{3}{2}} = (t''-t)\,6k$ satisfiat. Hoc ut facillime evadat ad c computandum formulas

auxiliares hasce adhibemus

$$\sin\theta = \frac{6k(t''-t)}{\sqrt{8}(r+r'')^{\frac{3}{2}}}, \quad \mu = \frac{3\sin\frac{1}{2}\theta}{\sin\theta}\sqrt{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)}, \quad c = \frac{2k(t''-t)}{\sqrt{(r+r'')}}\mu.$$

Si jam primum valorem approximativum (§. 5.) $r+r''=2$ statuamus, ex his formulis elicimus $\log\mu = 0{,}00002$, ideoque

$$\begin{aligned}
\log 2k &..8{,}53661\\
\log(t''-t) &..0{,}48354\\
\text{compl.} \log(r+r'')^{\frac{1}{2}} &..9{,}84949\\
\log\mu &..\underline{0{,}00002}\\
\log c &..8{,}86966
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log A &..8{,}59898\\
\log c &..8{,}86966\\
& \quad \underline{9{,}92639}\\
\log u &..\ 8{,}79605\\
u &..+0{,}06252\\
u+s &..+0{,}06356\\
u+s'' &..+0{,}04433
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(u+s) &..8{,}80318 & \log(u+s'') &..8{,}64670\\
\log b &..\underline{9{,}27372} & \log b'' &..\underline{9{,}31147}\\
& \quad 9{,}52946 & & \quad 9{,}33523\\
\log B &..9{,}98863 & \log B'' &..9{,}98021\\
& \quad \underline{9{,}51608} & & \quad \underline{9{,}34416}\\
\log r &..0{,}01338 & \log r'' &..9{,}99107
\end{aligned}$$

$$\log(r+r'')_1..0{,}30340$$

Jam cum hoc valore ipsius $r+r''$ calculum eundem repetamus et eodem modo sequentes obtinemus valores

$$\begin{aligned}
\log A &..8{,}59898\\
\log c &..8{,}86847\\
& \quad \underline{9{,}92590}\\
\log u &..\ 8{,}79437\\
u &..+0{,}06228\\
u+s &..+0{,}06332\\
u+s'' &..+0{,}04409
\end{aligned}$$

$\log(u+s)$..8,80154	$\log(u+s'')$..8,64434
$\log b$..9,27372	$\log b'')$..9,31147
9,52782	9,33287
$\log B$..9,98863	$\log B''$..9,98021
9,97543	9,98925
$\log r$..0,01320	$\log r''$..9,99096

$\log(r+r'')_2$..0,30325

Calculo denuo repetito invenitur:

$\log A$..8,59898
$\log c$..8,86855
9,92594
$\log u$.. 8,79449
u..+0,06230

$\log(u+s)$..8,80168	$\log(u+s'')$..8,64454
$\log b$..9,27372	$\log b''$..9,31147
9,52796	9,33307
$\log B$..9,98863	$\log B''$..9,98021
9,97542	9,98924
$\log r$..0,01321	$\log r''$..9,99097

$\log(r+r'')_3$..0,30326

Ex his ipsius $r+r''$ valoribus inventis interpolatione facillima ad verum appropinquare possumus. Ad hunc finem $r+r''=f$ ponamus, et hasce relationes supra adhibitas observamus

$$r+r'' = f_0, \qquad c = \frac{2k(t''-t)}{f_0^{\frac{3}{2}}}\mu, \qquad u = \sqrt{(c^2-A^2)}$$

$$r = \sqrt{\left\{\left(\frac{u+s}{b}\right)^2+B^2\right\}}, \qquad r'' = \sqrt{\left\{\left(\frac{u+s''}{b''}\right)^2+B''^2\right\}}$$

Si differentiemus, et μ, quod tamen semper unitati proximum est, constans consideremus, relationes evadent sequentes:

$$\frac{dc}{c} = -\tfrac{3}{2}\frac{df_0}{f_0}, \qquad du = \frac{c}{u}dc$$

$$rdr = \left(\frac{u+s}{b}\right)\frac{du}{b} = r\cos C\frac{du}{b}$$

$$r''dr'' = \left(\frac{u+s''}{b''}\right)\frac{du}{b''} = r''\cos C''\frac{du}{b''}, \qquad dr+dr'' = df_0,$$

ubi simplicitatis causa statuimus $\frac{u+s}{b} = \varrho \sec\delta - R\cos\psi = r\cos C$, et $\frac{u+s''}{b''} = \varrho''\sec\delta'' - R''\cos\psi'' = r''\cos C''$. C et C'' igitur angulos exprimunt, quos lineae a loco cometae ad solem et tellurem ductae includunt. Porro adnotamus, esse $b = h\cos\delta$, $b'' = \frac{h\cos\delta''}{M}$. Ex his sequitur

$$dr = \varrho\sec\delta\cos C\frac{du}{h\varrho} = D\cos C\frac{du}{h\varrho}$$

$$dr'' = \varrho''\sec\delta'' M\cos C''\frac{du}{h\varrho''} = D''\cos C''\frac{du}{h\varrho''}$$

positis $\varrho\sec\delta = D$ et $M\varrho''\sec\delta'' = D''$. Quoniam nunc $du = \frac{c}{u}\,de$ est, evadet

$$du = -\tfrac{1}{2}\frac{c^2}{u}\frac{df_0}{f_0}$$

$$df_1 = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{D\cos C + D''\cos C''}{r+r''}\right)\frac{c^2}{h\varrho u}df_0.$$

Haec expressio quum minus facile applicetur, observemus, quum loci cometae non procul a se invicem distant, esse D proxime $= D''$ et C proxime $= C''$. Quocirca medium inter illas quantitates adhibere possumus; quo evadet

$$df_1 = -\frac{D'\cos C}{r+r''}\cdot\frac{c^2}{h\varrho u}df_0.$$

Ut ϱh eliminemus, relationem revocamus

$$u = \varrho h - g\cos\Phi = c\cos\chi_{\prime\prime},$$

denotante $\chi_{\prime\prime}$ angulum, quem format linea, a primo loco cometae ad tertium ducta, cum illa, quae ducitur a tertio loco cometae ad punctum quoddam, respectu tertii loci telluris eodem modo positum, quo locus primus cometae respectu primi loci telluris. Ex his prodit

$$df_1 = -\frac{D'\cos C'}{r+r'}\cdot\frac{c}{c-g\cos\chi}df_0.$$

Quantitates in expressione ipsius df_1 contentae in genere sunt positivae. Quae etiam in negativas abire possent, constantes sunt. Si C' angulus sit obtusus, erit $r' < R' < 1$. Si $c - g\cos\chi$ in quantitatem abiret negativam, $g > c$ esset, ex quo fit $r' > 2$. Casus igitur duo, quibus signum negativum in positivum abiret, sunt illi rariores: si cometa solem et tellurem valde appropinquaret, vel procul a sole esset remotus. In genere signum igitur remanet negativum. Si igitur correctionem hoc modo exprimamus

$$df_1 = -l\,df_0$$

prima erit correctio negativa, secunda positiva, tertia negativa et sic porro

$$\begin{aligned} df_1 &= -l df_0 \\ df_2 &= -l df_1 = +l^2 df_0 \\ df_3 &= -l df_2 = -l^3 df_0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Correctiones sunt igitur alternae positivae et negativae, quod ad rapidiorem calculi approximationem erit utilissimum. Ut approximationem aestimemus, observamus esse

$$l = -\frac{D' \cos C'}{r+r'} \cdot \frac{e}{e - g \cos \chi}$$

ubi D, distantia a tellure, plerumque $< r$ est et factor primus ideo fractus. Quod ad secundum adtinet factorem, observamus, χ esse 0, si directiones motus cometae et telluris sibi invicem sint parallelae. χ vero est 180°, si directiones illae sibi invicem sint contrariae, quod plerumque evenit, quum cometae a tellure primum observantur. Vulgo igitur factor etiam posterior est fractus. Quocirca factores duo ipsius l in genere fractiones sunt verae.

Si ad differentias abire velimus finitas habemus

$$\begin{array}{ccc} f_1 & & \\ & \Delta f_1 & \\ f_2 & & \Delta^2 f_1 \\ & \Delta f_2 & \\ f_3 & & \end{array}$$

Quum jam est

$$f_1 = f - df_1$$
$$f_2 = f - df_2$$

erit

$$\Delta f_1 = df_1 - df_2 = (1+l) df_1$$

In genere fit l post approximationem quandam constans. Si igitur plura sunt facta experimenta erit:

$$df_1 = -l df_0, \qquad df_2 = -l df_1 = l_2 df_0$$

quum vero

$$f = f_1 + df_1, \qquad f = f_2 + df_2,$$
$$\Delta f_1 = df_1 - df_2 = (1+l) df_1, \qquad \Delta f_2 = (1+l) df_2 = -l(1+l) df_1,$$

erit

$$\frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} = -l.$$

Hunc valorem ipsius l inventum ad ulteriorem adhibere possumus approximationem. Quum

$$\Delta^2 f_1 = -(1+l)^2 df_1,$$

hoc modo df_1 in functione ipsius l expressum obtinemus sicuti etiam df_3. Prodit enim

$$df_1 = -\frac{(\Delta f_1)^2}{\Delta^2 f_1}, \qquad df_3 = -\frac{(\Delta f_2)^2}{\Delta^2 f_1},$$

ex quibus illum potissimum eligamas coefficientem, qui numeratorem habet minimum.

Considerationem istam si ad exemplum nostrum adplicemus, valores supra inventos ipsius $\log(r+r'') = f$ ad ulteriorem adhibeamus approximationem [1])

$$\begin{array}{lcc} f_1 .. 0{,}30340 & & \\ & -15 & \\ f_2 .. 0{,}30325 & & +16 \\ & +\ 1 & \\ f_3 .. 0{,}30326 & & \end{array}$$

$$\frac{(\Delta f_2)^2}{\Delta^2 f_1} = 0{,}00000, \quad df_3 = 0, \quad \text{et sic:}$$

$$f = 0{,}30326$$

Calculum si priorem cum hoc valore jam invento ipsius $f = \log(r+r'')$ iteremus evadent:

$$\begin{array}{rl} f .. & 0{,}30326 \\ \log c .. & 8{,}86854 \\ u .. & +0{,}0622981 \\ \log r .. & 0{,}013209 \\ \log r'' .. & 9{,}990966 \\ f_1 .. & 0{,}303246 \end{array}$$

calculoque denique repetito, hi resultant valores

$$\begin{array}{rl} \log c .. & 8{,}868529 \\ u .. & +0{,}0622964 \\ \log r .. & 0{,}013208 \\ \log r'' .. & 9{,}990960 \\ f_2 .. & 0{,}303244 \end{array}$$

Quod postremus ille valor ipsius f a proximo duabus tantum unitatibus in ultimo loco differt, ex eo concludimus, valorem ipsius $r+r''$ omni cum exactitudine, quam concedunt tabulae, esse inventum.

[1]) Eandem considerationem etiam ad logarithmos applicari posse, sponte intellegitur.

Ad elementa orbitae aproximata determinanda hos igitur adhibeamus valores

$u = +0{,}0622964$, $\log r = 0{,}013208$, $\log r'' = 9{,}990960$

Calculus sequens sic se habebit:

u..$+0{,}0622964$	$\log(u + g\cos\Phi)$..8,987785
$g\cos\Phi$..$+0{,}0349302$	$\log h$..9,88046
	$\log\varrho$..9,107325
	$\log M$..0,17622
	$\log\varrho''$..9,283545

$\log\varrho$..9,107325	$\log\varrho$..9,107325	$\log\varrho$..9,107325
$\cos(\alpha-\odot)$..9,86716	$\sin(\alpha-\odot)$..9,83024	$\tan\delta$..0,593031
8,974485	8,937565	9,700356
$\log R$..9,995965	$9{,}952530_n$	9,954546
0,043435	$\tan(\lambda-\odot)$..$8{,}985035_n$	$\tan\beta$..9,745810
$9{,}952530_n$	$\lambda-\odot$..174° 28′ 59″,4	β..29° 6′ 55″,0
$\cos(\lambda-\odot)$..$9{,}997984_n$	λ.. 37 28 16,6	
9,954546		

$\log\varrho''$..9,283545	$\log\varrho''$..9,283545	$\log\varrho''$..9,283545
$\cos(\alpha''-\odot'')$..9,81091	$\sin(\alpha''-\odot'')$..9,88223	$\tan\delta''$..0,353906
9,094455	9,165775	9,637451
$\log R''$..9,9956406	$9{,}9373757_n$	9,943505
0,0582649	$\tan(\lambda''-\odot'')$..$9{,}2283993_n$	$\tan\beta''$..9,693946
$9{,}9373757_n$	$\lambda''-\odot''$..170° 23′ 47″,5	β''..26° 18′ 3″,1
$\cos(\lambda''-\odot'')$..$9{,}9938707_n$	λ''.. 36 26 40,3	
9,9435050		

Ex eo, quod $\lambda'' < \lambda$ est, concludimus, motum cometae esse *retrogradum*. Si his valoribus inventis r et r'' computemus, obtinebimus: $\log r = 0{,}013212$ et $\log r'' = 9{,}990965$, ex quo calculi veritatem concludimus. Porro fit:

$\tan\beta$..9,745810	$\tan i \sin(\lambda-☊)$..$9{,}745810_n$	$0{,}543278_n$
$\cos(\lambda''-\lambda)$..9,999930	$\tan i \cos(\lambda-☊)$..$0{,}543278_n$	$\cos(\lambda-☊)$..$9{,}994550_n$
9,745740	$\tan(\lambda-☊)$..9,202532	$\tan i$..0,538828
$\tan\beta''$..9,693946	$\lambda-☊$..189° 3′ 27″,5	i..73° 52′ 15″,8
0,949143	☊..208 24 49,1	
$8{,}796597_n$		
$\sin(\lambda''-\lambda)$..$8{,}253319_n$		
0,543278		

$\tang(\lambda - \Omega)$..9,202532
$\cos i$..9,443732
$\tang(v - \Omega)$..9,758800
$v - \Omega$..209° 50′ 58″,0
v.. 58 15 47,1

$\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}(v'' - v)$..1,5930688$_n$
$\log \sqrt{r}$..0,006604
1,5864648$_n$
− 38,58912
+ 39,59028
+ 1,00116

$\tang(\lambda'' - \Omega)$..9,149498
$\cos i$..9,443732
$\tang(v'' - \Omega)$..9,705766
$v'' - \Omega$..206° 55′ 31″,8
v''.. 55 20 20,4

$\sin \tfrac{1}{2}(v'' - v)$..8,4069314$_n$
$\log \sqrt{r''}$..9,995480
8,4024114$_n$
compl. ..1,5975886$_n$
− 39,59028

$\log \frac{1}{\sqrt{r}}$..9,993396
0,0005035
$\tang \tfrac{1}{2}(v - \pi)$..0,0071075
$\tfrac{1}{2}(v - \pi)$..45° 28′ 7″,7
π..327 19 31,7
$\cos \tfrac{1}{2}(v - \pi)$..9,845902
$\log \frac{1}{\sqrt{q}}$..0,147494
$\log q$..9,705012

$\log q^{\frac{3}{2}}$..9,557518
$\log n$..0,039872
9,597390
$\log N$..2,0107051
1,6080951
40,55974
t..5,326081
T..45,885821 dies

9,597390
$\log N''$. 1,9776034
1,5749934
37,58317
8,370782
45,953952 dies

Medium Nov. ..45,919886

Elementa approximata orbitae cometae haec igitur sunt:

T..1842 December 15,919886
π..327° 19′ 31″,7
Ω..208 24 49,1
i.. 73 52 15,8
$\log q$..9,705012
Motus *retrogradus*.

Observator *Petersen* Altonae invenit: T..1842 Dec. 15,9643, π..327°37′21″, ☊..208°5′19″, i..73°52′22″, $\log q$..9,70428. Dr. *Galle* Berolini elementa invenit haecce T..1842 Dec. 15,9726, π..327°30′4″, ☊..208°1′36″, i..73°9′2″, $\log q$..9,70356. Dom. *Laugier* Parisiis T..1842 Dec. 15,8, π..328°32′, ☊..208°39′, i..74°31′, $\log q$..9,70927.

§. 8.

Casus quidam dantur, in quibus methodus supra tradita applicari non potest, ii nempe, quum tres loci geocentrici cometae in eodem circulo maximo cum loco medio telluris apparentur, vel ad hunc valde approximantur; quoniam hoc casu numerator et denominator in expressione (e) ipsius M' vel nihilo fiunt aequales, vel tam parvae evadunt, ut menda observationum maximam vim exercere possint. Casus illi excipiendi in natura ipsa problematis fontem habet suum. Si hoc eveniret, quod tamen rarius fit, ad expressiones (§. 4.) hasce regrediendum est:

$$[r'r''](\varrho\cos\alpha - R\cos\odot) - [rr''](\varrho'\cos\alpha' - R'\cos\odot') + [rr'](\varrho''\cos\alpha'' - R''\cos\odot'') = 0,$$

$$[r'r''](\varrho\sin\alpha - R\sin\odot) - [rr''](\varrho'\sin\alpha' - R'\sin\odot') + [rr'](\varrho''\sin\alpha'' - R''\sin\odot'') = 0,$$

$$[r'r'']\varrho\tang\delta - [rr'']\varrho'\tang\delta' + [rr']\varrho''\tang\delta'' = 0.$$

E duobus primis combinatione facillima deducere possumus:

$$[r'r''](\varrho\cos(\alpha-\odot') - R\cos(\odot-\odot')) - [rr''](\varrho'\cos(\alpha'-\odot') - R') + [rr'](\varrho''\cos(\alpha''-\odot') - R''\cos(\odot''-\odot')) = 0,$$

$$[r'r''](\varrho\sin(\alpha'-\alpha) + R\sin(\odot-\alpha')) - [rr'']R'\sin(\odot'-\alpha') - [rr'](\varrho''\sin(\alpha''-\alpha') - R''\sin(\odot''-\alpha')) = 0.$$

Secunda harum aequationum suppeditat hanc ipsius ϱ'' expressionem:

$$\varrho'' = \frac{[r'r'']}{[rr']}\cdot\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{\sin(\alpha''-\alpha')}\cdot\varrho + \frac{[r'r'']R\sin(\odot-\alpha') - [rr'']R'\sin(\odot'-\alpha') + [rr']R''\sin(\odot''-\alpha')}{[rr']\sin(\alpha''-\alpha')}.$$

Factores ipsorum $[r'r'']$, $[rr'']$ et $[rr']$ in numeratore membri ultimi hujus expressionis, ut ordinatas solis, ad axem abscissarum relatas, cujus positio per α' est data, considerari possunt, quae per Y, Y', Y'' designari est licitum. Respectu membrorum ordinis secundi habito, et posito: $k(t''-t') = \tau$, $k(t''-t) = \tau'$, $k(t'-t) = \tau''$, hae relationes facillime deducuntur:

$$\frac{[r'r'']}{[rr']} = \frac{[R'R'']}{[RR']}\left\{1-\tfrac{1}{6}(\tau^2-\tau''^2)\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{R'^3}\right)\right\},$$
$$\frac{[rr'']}{[rr']} = \frac{[RR'']}{[RR']}\left\{1-\tfrac{1}{6}(\tau'^2-\tau''^2)\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{R'^3}\right)\right\}.$$

His valoribus in ultimo membro substitutis, in numeratore erit expressio, quae sequenti modo scribi potest:

$$[R'R'']Y-[RR'']Y'+[RR']Y'',$$

quae ex (12) nihilo est aequalis. Restant tantummodo termini cum $\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{R'^3}$ multiplicati. Si in his pro $\frac{[R'R'']}{[RR']}$, $\frac{[RR'']}{[RR']}$ valores substituantur approximati $\frac{\tau}{\tau''}$, $\frac{\tau'}{\tau''}$, terminis ordinum superiorum neglectis, illa prodibit ipsius ϱ'' expresio:

$$\varrho'' = \frac{t''-t'}{t'-t}\cdot\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{\sin(\alpha''-\alpha')}\varrho-\tfrac{1}{2}\tau\tau'\frac{\sin(\alpha'-\odot')}{\sin(\alpha''-\alpha')}\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{R'^3}\right)R'.$$

Hoc in casu a valore approximato ipsius M progrediendum est, quo calculus ad finem experimentorum perducitur, et inde valores approximati ipsorum r et r'' determinantur. Jam vero valor ipsius r'' interpolatione deducitur. His substitutis valoribus ad accuratiorem ipsius M valorem pervenitur, quocum calculus ad finem plerumque perduci potest, quamvis in hoc casu exactitudo determinationis elementorum orbitae semper magis fit circumscripta, quam in eo, quo methodus adhiberi potest directa.

§. 9.

Superest jam examinare, quomodo ex elementis tali modo proxime determinatis elementa orbitae omni, quam concedant observationes, cura correcta deducuntur.

Ad hunc finem tres inter se distantes eliguntur observationes. Ope elementorum jam proxime determinatorum veras computantur anomalias correspondentes v, v', v'' radiique vectores r, r', r''; $v'-v$ et $v''-v$ angulos igitur, inter radios vectores r et r', r et r'' inclusos exprimunt. Si elementa jamjam inventa vera sint, valores computati ipsorum $v'-v$ et $v''-v$ cum iis, directe ex observationibus deductis, congruant necesse est; sicut vice versa differentia horum binorum valorum ex elementis minus recte suppositis existere debet.

Ex observationibus hoc modo $v'-v$ et $v''-v$ deducuntur. Unaquaque observatione longitudo et latitudo geocentrica, α et δ, obtinentur. Ut ex illis longitudinem et latitudinem heliocentricam λ et β derivemus, ponamus, S,

T et C locos respectivos exprimere solis, telluris et cometae. Si igitur designemus angulum CTS per γ, erit

$$\cos\gamma = \cos(\alpha - \odot)\cos\delta,$$

quoniam $STC' = \alpha - \odot$. In triangulo CTS duo supponimus latera R et r cognita, sicuti angulus γ lateri r oppositus; quocirca angulus $SCT = \eta$ determinetur ex relatione

$$\sin\eta = \frac{R}{r}\sin\gamma,$$

et deinceps est etiam angulus $CST = \varkappa$ cognitus. In pyramide triangulari CC_1ST [1]) habemus:

$$\sin\beta = \frac{\sin\delta\sin\varkappa}{\sin\gamma}, \qquad \cos C_1ST = \frac{\cos\varkappa}{\cos\beta}.$$

Designet jam L longitudo telluris heliocentrica, erit $\gamma = L + C_1ST$. Hoc igitur modo longitudines et latitudines cometae heliocentricae pro tribus observationum temporibus determinantur. Sint $CC'C''$ loci cometae his ipsis temporibus, $C_1C_1'C_1''$ projectiones horum punctorum in planum eclipticae, erint in triangulo spherico, quem formant puncta C et C' cum polo eclipticae, duo latera $90° - \beta$ et $90° - \beta'$ cognita, sicuti angulus polaris $\lambda' - \lambda$; et relationes prodibunt haecce:

$$\left.\begin{aligned} \cos(v' - v) &= \cos(\lambda' - \lambda)\cos\beta\cos\beta' + \sin\beta\sin\beta' \\ \cos(v'' - v) &= \cos(\lambda'' - \lambda)\cos\beta\cos\beta'' + \sin\beta\sin\beta'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad (a').$$

Differentiae inter hos valores ipsorum $v' - v$ et $v'' - v$ et illos, qui ex elementis fuerunt deducti, ex elementis minus accuratis existunt. Sint igitur m' et m'' valores ipsorum $v' - v$ et $v'' - v$ ex elementis deducti, ut etiam μ et μ'' valores harum quantitatum superiori modo determinati. Sint porro $\delta m'$, $\delta m''$, $\delta\mu'$, $\delta\mu''$ variationes, quae in m', m'', μ', μ'' ex correctionibus elementorum ipsorum nascuntur, erint

$$\left.\begin{aligned} m' + \delta m' &= \mu' + \delta\mu' \\ m'' + \delta m'' &= \mu'' + \delta\mu'' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b')$$

His duabus aequationibus correctiones, quae tempori transitus cometae per perihelium et distantiae minimae sunt applicandae, ut observationibus satisfiant, obtinentur. His autem elementis accurate determinatis, eadem cum exactitudine ex iis cetera deduci elementa est licitum.

Ut aequationes (b) evolvamus formulas motus parabolici, supra (§. 3.) inventas, revocamus

[1]) C_1 est projectio puncti C in planum eclipticae.

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v} \\ t &= q^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} (\tang \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \tang^3 \tfrac{1}{2} v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (c')$$

et supponimus, tempus transitus per perihelium minimamque distantiam minimas per δ designatas variationes subire; facta variatione elicitur

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta r}{r} &= \frac{\delta q}{q} + \tang \tfrac{1}{2} v \, \delta v \\ \delta v &= \frac{\sqrt{(2q)}}{r^2} \left(\frac{\delta t}{t} - \frac{3}{2} \frac{\delta q}{q} \right) . t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (d');$$

quibus variationes radii vectoris et anomaliae verae, variationibus ipsorum q et t correspondentes, determinantur. Ut variationes longitudinis et latitudinis heliocentricae, $\delta\lambda$ et $\delta\beta$ consequamur, expressiones ipsorum β et C_1ST supra inventas variemus, et retineamus, δ et γ non variari, et esse $\delta\lambda = \delta . C_1ST$; quo fit

$$\delta\beta = \tang\beta \cotang \varkappa . \delta\varkappa .$$

Jam vero est

$$\delta\eta = -\tang\eta \frac{\delta r}{r}$$

$$\delta\varkappa = -\delta\eta = \tang\eta \frac{\delta r}{r},$$

ideoque

$$\delta\beta = \tang\beta \tang\eta \cotang\varkappa \frac{\delta r}{r} \quad \ldots \ldots \quad (e')$$

Pro longitudine etiam facillime deducimus:

$$\left.\begin{aligned} \delta\lambda &= \cos C_1ST (\tang\varkappa \, \delta\varkappa - \tang\beta \, \delta\beta) \\ &= \cotang C_1ST \left(\tang\varkappa \tang\eta \frac{\delta r}{r} - \tang\beta \, \delta\beta \right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (f').$$

Ex his formulis (e') et (f') variationes longitudinum et latitudinum heliocentricarum deducuntur pro tribus observationibus, quas ad elementa corrigenda elegimus. Quas variationes, si valores ex (d') substituantur, in functionibus ipsorum δq et δt exprimentur.

Quum vero supra (a') invenimus

$$\cos\mu' = \cos(\lambda' - \lambda) \cos\beta \cos\beta' + \sin\beta \sin\beta' .$$

ad faciliorem ipsius μ' computationem angulum σ introducamus axiliarem, ut fit

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\sigma = \cos^2 \tfrac{1}{2} (\lambda' - \lambda) \cos\beta \cos\beta' .$$

quo fit:

$$\delta\sigma = -\tang \tfrac{1}{2}\sigma \left\{ \tang \tfrac{1}{2} (\lambda' - \lambda)(\delta\lambda' - \delta\lambda) + \tang\beta \, \delta\beta + \tang\beta' \, \delta\beta' \right\},$$

et exinde

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\mu' = \cos\tfrac{1}{2}(\beta+\beta'+\sigma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\beta'-\sigma),$$

quo prodibit

$$\delta\mu' = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mu'\{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta+\beta'+\sigma)(\delta\beta+\delta\beta'+\delta\sigma) + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta+\beta'-\sigma)(\delta\beta+\delta\beta'-\delta\sigma)\} \quad (g').$$

Si in (g') valores quantitatum $\delta\beta$, $\delta\beta'$, $\delta\sigma$ supra inventos substituamus, quantitatem $\delta\mu'$ per δq et δt expressam obtinebimus.

Ut etiam δm per easdem exprimatur quantitates, recordari solummodo est opus, esse $\delta m = \delta v' - \delta v$, et quantitates $\delta v'$ et δv ex (d') determinari.

Duas igitur obtinebimus hujus formae aequationes

$$\left.\begin{aligned}\delta\mu' &= f.\delta q + g.\delta t\\ \delta m' &= h.\delta q + k.\delta t\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (h'),$$

quum vero est $\delta\mu' - \delta m' = m' - \mu'$, erit

$$(f-h)\delta q + (g-k)\delta t = m' - \mu' \quad \ldots \quad (k').$$

Eodem modo primae et tertiae observationis combinatione consequimur

$$(f'-h')\delta q + (g'-k')\delta t = m'' - \mu'' \quad \ldots \quad (k_1'),$$

ex quibus duabus aequationibus (k') et (k_1') quantitates incognitae δq et δt eliminatione deducuntur.

Jam distantia in perihelio et tempus transitus accurate essent determinata, si calculus fuisset rigorosus. In aequationibus (k) vero formandis quantitates ordinis secundi fuerunt neglectae, quocirca calculum cum elementis ita correctis idemtidem renovari necesse erit, quousque valores quantitatum q et t obtineantur, qui tam prope, quam fieri potest, observationibus satisfaciunt; ad quem finem tres plerumque requiruntur calculi repetitiones.

Quum tali modo distantia in perihelio et tempus transitus summa cum diligentia fuerunt determinata, ex his cetera eodem gradu exactitudinis facillime computantur elementa. Valoribus scilicet ipsorum δq et δt, ultima calculi operatione consecutis, in aequationibus (e') et (f') substitutis, valores computantur correcti longitudinum latitudinumque heliocentricarum λ et β pro tribus temporibus observationum. Harum ope inclinatio orbitae et longitudo nodi ascendentis et denique cetera elementa ex formulis in §. 6. traditis eliciuntur.

In casibus evenire potest specialibus, ut elementa hoc modo correcta non nisi imperfecte observationibus satisfaciant, ex quo concludere licet, cometam non in parabola, ut supposuimus, moveri, sed in ellipsi vel hyperbola. Orbitae hyperbolicae in Astronomia minoris sunt momenti.

§. 10.

Suppositio orbitae parabolicae cometarum rigorose non est vera et, infinitis casibus, qui orbitam efficiunt elipticam vel hyperbolicam, cum iis, qui parabolicam producunt, comparatis, parum verosimilis. Quum ceterum cometa, qui in orbita moveatur parabolica vel elliptica, semel tantummodo nobis sit visibilis, probabiliter adoptare possumus, cometas, qui in orbitis talibus moventur, si alioquin existant, jam pridem perihelium suum transiisse, nos vero nunc temporis cometas tantummodo observare, qui longiore vel breviore temporis intervallo orbitas suas circa solem describant, qui ceteroquin Astronomiae maximi sunt momenti.

Si copia bonarum observationum ante et post transitum cometae per perihelium reperiatur, sequenti modo aliqua cum probabilitate tempus revolutionis determinari potest. Ponamus, parabolam, quae proxime omnibus satisfaciant observationibus, fuisse determinatam, et v, v', v'', v''' etc. anomalias esse veras, sicuti r, r', r'', r''' etc. radios vectores temporibus observationum correspondentes; sint porro $v'-v=m$, $v''-v=m'$, $v'''-v=m''$ etc.: ex methodo superiori m, m', m'' etc. μ, μ', μ'' etc. computantur. Posito:

$$m-\mu=M, \quad m'-\mu'=M', \quad m''-\mu''=M'', \quad m'''-\mu'''=M''' \text{ etc.}$$

Si jam distantia in perihelio quantitate minima variatur, et hoc sit casu:

$$m-\mu=N, \quad m'-\mu'=N', \quad m''-\mu''=N'', \quad m'''-\mu'''=N''' \text{ etc.}$$

Alia in hopothesi tempus transitus quantitate variatur perparva, distantia in perihelio eadem retenta, quae in primo erat casu; et sit jam:

$$m-\mu=P, \quad m'-\mu'=P', \quad m''-\mu''=P'', \quad m'''-\mu'''=P''' \text{ etc.}$$

Denique retineantur distantia in perihelio et tempus transitus, qualia in primo erant casu, computentur autem anomalia vera v et radius vector r, orbita supposita elliptica, in qua excentricitas e proxime est unitati aequalis, ut differentia $1-e$ perparva assumi potest. Ut valor ipsius v obtineatur, nihil aliud est opus, quam ut ad valorem, primo casu in parabola computatum, angulus addatur parvus, cujus sinus est

$$\tfrac{1}{10}(1-e).\text{tang}\tfrac{1}{2}v\{4-3\cos^2\tfrac{1}{2}v-6\cos^4\tfrac{1}{2}v\}.$$

Hoc valore ipsius v introducto in formula

$$r=\frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v}\left\{1-\frac{1-e}{2}\text{tang}^2\tfrac{1}{2}v\right\}$$

valor ebtinetur correspondens ipsius r.

Eodem determinantur modo $v', r', v'', r'', v''', r'''$ etc. ex quibus m, m', m'', m''' etc. μ, μ', μ'', μ''' etc. Sit hoc casu:

$$m - \mu = Q, \quad m' - \mu' = Q', \quad m'' - \mu'' = Q'', \quad m''' - \mu''' = Q''' \text{ etc.}$$

Sit u numerus, cum quo variatio supposita distantiae in perihelio multiplicari debet, ut vera prodeat, t numerus, quocum variatio temporis transitus multiplicetur, s vero numerus, quocum valor suppositus ipsius $1-e$ multiplicari debet, ut prodeat verus; sequentes formentur aequationes:

$$\begin{aligned}
(M - N)u + (M - P)t + (M - Q)s &= M; \\
(M' - N')u + (M' - P')t + (M' - Q')s &= M'; \\
(M'' - N'')u + (M'' - P'')t + (M'' - Q'')s &= M''; \\
(M''' - N''')u + (M''' - P''')t + (M''' - Q''')s &= M'''; \\
\text{etc.} &
\end{aligned}$$

ex quibus valores ipsorum u, t, s quam proxime his omnibus aequationibus satisfacientes methodo solita determinantur, et tali modo vera distantia in perihelio, verum tempus transitus per perihelium et verus ipsius $1-e$ valor consequentur. Semiaxis major erit jam $\frac{q}{1-e}$, et tempus revolutionis $= \left(\frac{q}{1-e}\right)^{\frac{3}{2}}$, distantia media solis unitati aequali posita.

Quam exacte autem quis suas instituat observationes, tanta tamen in tempore revolutionis definiendo restat incertitudo, ut ea solum via certum tempus revolutionis definietur, si cometa idem ad perihelium suum revertens observetur

---

Corrigendum.

Pag. 201 lin. 28 pro 8,45320 lege 8,54320

17.

Einige Bemerkungen über die Principien der Cauchyschen Residuenrechnung.

(Von dem Herrn Professor Dr. *Radike* in Bonn.)

Die Coëfficienten der nach steigenden Potenzen von ε fortschreitenden Entwickelung von $f(x+\varepsilon)$ werden bekanntlich, wenn diese Entwickelung nur positive Potenzen von ε enthält, in der Differentialrechnung, und wenn sie auch negative Potenzen enthält, in der Residuenrechnung behandelt.

Cauchy stellt in seinen „*Exercices*" Gesetze auf, denen die Coëfficienten der negativen Potenzen von ε (die von ihm sogenannten Residuen) gehorchen. Es dürfte aber noch nöthig sein, sich vollständig Rechenschaft von der Natur derjenigen Functionen zu geben, welche zu solchen negativen Potenzen führen, damit man diese Gesetze nicht auch da anwende, wo sie nicht mehr anwendbar sind.

Es dürfte demnach bei den vielen und wichtigen Anwendungen, welche die Residuenrechnung in der neueren Zeit gefunden hat, nicht ohne Interesse sein, die Grundlagen dieser Rechnung so weit zu untersuchen, als nöthig, um über die Grenzen der Gültigkeit jener Gesetze und somit über die Statthaftigkeit der aus ihnen gezogenen Resultate ein sicheres Urtheil fällen zu können.

Bevor ich hierauf eingehe, erlaube ich mir, Einiges vorauszuschicken, was sich auf die zum Theil noch herrschenden Ansichten über die Bedeutung gewisser Rechnungsformen bezieht.

Man hält z. B. den Werth der Ausdrücke $\frac{1}{0}$ und $\log 0$ für unendlich, weil für ein unendlich klein werdendes x, $\lim(1:x)$ als $=\infty$, $\lim \log x$ als $=-\infty$ angesehen werden kann. Allein die Verwechslung von $\lim f(x)$ und $f(0)$ rechtfertigt sich, wie aus dem Begriff der Grenze unmittelbar folgt, nur da, wo $f(x)$ bei $x=0$ continuirlich ist.*) Dafs $1:x$ und $\log x$ aber

---

*) Auf dieser Verwechselung beruht auch unter anderen das Doppelresultat, auf welches *Cauchy* in seinen *Leçons sur le calcul infinitésimal p. 2.* gekommen ist, wo er einerseits $\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}=1^{\pm\infty}$, andrerseits $\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ findet. Das e ist in der That die Grenze und wird auch von *Cauchy* mit Ausschliefsung des $1^{\pm\infty}$ benutzt.

bei $x=0$ discontinuirlich sind, läfst sich schon daraus schliefsen, dafs, wenn x vom negativen Unendlich-kleinen zum positiven Unendlich-kleinen übergeht, $\frac{1}{x}$ den Sprung von $-\infty$ zu $+\infty$ und $\log x$ den Sprung vom imaginären Unendlichen zum negativen Unendlichen macht. Bringt man übrigens, wie es am natürlichsten ist, den Begriff des Unendlichen mit dem Unendlich-kleinen in Zusammenhang und erklärt das Unendliche für den Werth eines Quotienten mit endlichem Zähler und unendlich kleinem Nenner, so darf man schon deswegen $1:0$ nicht als unendlich ansehen, weil der Nenner aufgehört hat, unendlich klein zu sein, wenn er in Null übergegangen ist.

Dafs man den Formen $1:0$ und $\log 0$ gar keine Bedeutung, d. h. gar keinen Werth (auch nicht in dem Sinne, wie man von „imaginären Werthen" spricht) beilegen darf, geht daraus hervor, dafs dieselben nicht mehr die das Wesen der Quotienten und Logarithmen bedingenden Grund-Eigenschaften besitzen. Die Quotienten-Eigenschaft (mit dem Divisor multiplicirt den Dividenden zu geben) geht der Form $1:0$ ab, weil die Summe von Nullen, wenn man sich auch deren Zahl ins Unendliche vervielfältigt vorstellt, nie etwas anderes als Null geben kann. Eben so wenig pafst die Logarithmen-Eigenschaft auf $\log 0$, und die bekannte Formel, welche die Werthe jedes Logarithmen giebt, nämlich $\log \text{nat}\, a = lr + (2n\pi + \Phi)\sqrt{-1}$ (wo lr den reellen Werth des natürlichen Logarithmen des Modulus von a vorstellt) würde für $a=0$ auf ein Argument Φ führen, dessen Sinus mit seinem Cosinus zugleich verschwindet. Mit jenen Grund-Eigenschaften verlieren aber natürlich auch die auf dieselben gegründeten Divisions- und Logarithmationsformeln ihre Anwendung; wie es schon indirect die wunderlichen Resultate bezeugen, auf die man kommt, wenn man Divisionen durch Null und den Logarithmen von Null in den Rechnungen statuirt.

Der Grund aber, den er für die Verwerfung des $1^{\pm\infty}$ anführt, dürfte nicht Statt finden. Er sagt nämlich, der Ausdruck $1^{\pm\infty}$ könne deshalb nicht zur Bestimmung der Grenze dienen, weil er unbestimmt sei. Dafs $1^{\pm\infty}$ unbestimmt ist, ist nun zwar insofern wahr, als 1^x, d. h. $\cos 2n\pi x + \sqrt{(-1)}\sin 2n\pi x$, bei unendlich grofs werdendem x nur eines einzigen (des $n=0$ entsprechenden) bestimmten Werthes (Eins) fähig ist und übrigens bei wachsendem x periodisch eine unendliche Menge von Werthen durchläuft. Allein diese periodischen Werthe sind sämmtlich imaginär, bis auf die beiden Werthe $+1$ und -1, so dafs l nicht einmal annäherungsweise als einer der Werthe von $1^{\pm\infty}$ betrachtet werden darf. Das $1^{\pm\infty}$ ist gar kein Grenzwerth, weil es der Substitution von Null für x entsprungen ist, während $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ bei $x=0$ keine Continuität hat.

Wäre es nöthig, sich noch auf Weiteres zu berufen, so ließe sich noch Folgendes erwähnen.

Erhält man nämlich bei Lösung einer analytischen Aufgabe ein Resultat, in welchem eine derjenigen Formen vorkommt, die weiter unten als *werthlos* werden bezeichnet werden, und zu denen auch $1:0$ und $\log 0$ gehört, so existirt entweder, *erstlich*, gar keine Lösung, weil die Bedingungen der Aufgabe einander widersprechen, oder es entsprechen, *zweitens*, verschiedenen Einzelfällen verschiedene Resultatformen, die sich nicht auf einander zurückführen lassen, und der Grund des Erscheinens der werthlosen Formen war dann die Anwendung von nicht allgemein gültigen Gleichungen, oder (wie bei der Benutzung der Methode der unbestimmten Coëfficienten) die Vorausbestimmung einer Form für das Resultat, deren dasselbe nicht überall fähig ist. Jedenfalls läßt sich aber die Rechnung, unter Vermeidung aller nicht allgemein gültigen Rechnungsregeln (wie z. B. der Divisionen durch einen des Werthes Null fähigen Ausdruck), so umändern, daß keine werthlose Form im Resultat auftritt, und man erhält dann im ersten Fall eine Gleichung von verständlicher Form, die aber in offenem Widerspruch mit dem Gegebenen steht, im zweiten Falle das richtige Resultat in einer von der erst erhaltenen verschiedenen Form.*) Die Ausdrücke $\frac{1}{0}$, $\log 0$ etc. können also nie als die Resultate selbst angesehen werden.

Ein Beispiel der ersten Art giebt die Bestimmung des Durchschnittspunctes zweier Geraden $y = ax + b$ und $y = a'x + b'$ für den Fall, daß $a = a'$ und $b \gtrless b'$ ist. Der Ausdruck für die Abscisse des Durchschnittspunctes nimmt für $a = a'$ die Form $1:0$ an, und man giebt dabei, indem man die Redeform „die Geraden schneiden sich im Unendlichen" dadurch übersetzt, „daß sie sich **nicht** schneiden," schon zu erkennen, daß es keine Abscisse für den vorausgesetzten Punct giebt und daß also $1:0$ ein *Nichtvorhandensein* des Gesuchten anzeigt. Vermeidet man bei der Bestimmung der Coordinaten des Durchschnittspunctes die Division durch das nachher Null werdende $a - a'$, so kommt man auf die verständliche Glei-

*) Hierin unterscheiden sich wesentlich die *werthlosen* von den *imaginären* Resultaten. Wie man auch bei einem einmal erhaltenen imaginären Resultat die Rechnung umändern mag: immer kommt man auf Schlußgleichungen, die sich auf einander zurückführen lassen; und dies bestätigt den beweisbaren Satz, daß wohl imaginäre, nie aber werthlose Formen in die Rechnung zugelassen werden dürfen.

chung $b = b'$, welche den Widerspruch mit den Bedingungen der Aufgabe offen darlegt.

Beispiele der zweiten Art kommen unter andern da vor, wo man für eine Linie, deren Lage man noch nicht kennt, die Gleichung $y = bx + c$ statt der Gleichung $ay + bx + c = 0$ anwendet, weil die erste Form die mit der Ordinaten-Achse parallele Richtung (deren Gleichung die Null zum Coëfficienten von y erfordert) nicht mit umfafst.

Ferner giebt ein Beispiel das bekannte Verfahren, das Integral $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ unter Benutzung der Formel $\int x^{n-1}(a + bx^n)\,dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)}$ auf ein einfacheres zurückzuführen. Da nämlich die letzte Formel weder für $b = 0$, noch für $n = 0$, noch für $p = -1$ richtig ist, so ist auch die in diesen Fällen in das allgemeine Resultat eingehende Form $\frac{1}{0}$ gerechtfertigt und sogar nothwendig. Jedem dieser Fälle entspricht eine eigenthümliche Resultatform, die jede für sich aufgesucht werden mufs.

Endlich liefert ein Beispiel dieser Art die Aufsuchung des Integrals $\int x^n dx$, wenn dieselbe so geschieht, dafs man dessen Werth vorläufig durch ax^m bezeichnet, und a und m so bestimmt, dafs ax^m dem Differential von x^n gleich wird. Da sich für $n = -1$, $a = 1:0$ findet, so müfste, wenn $1:0 = \infty$ und nicht ein werthloser Ausdruck wäre, welcher verräth, dafs die vorausgesetzte Form des Integralwerthes eine unrichtige war, nothwendig das Integral auch einen unendlichen Werth haben. Niemand aber hat noch versucht, hier, wie auch im vorigen Beispiel, eine Auslegung des unendlichen Resultats aufzustellen. Erwägt man, dafs man bei solchen, so häufig vorkommenden Gelegenheiten factisch die vermeintlich unendliche Form stets wie eine Nichts bedeutende verworfen hat, so wundert man sich mit Recht, warum man erst so spät dahin gekommen ist, es offen auszusprechen, dafs sie an sich der Bedeutung ermangle.

Die *werthlosen* Formen darf man als ein Zeichen der Vollkommenheit der Analysis ansehen, da sie durch sie die Mittel hat, es anzuzeigen, wenn in den Rechnungen unrichtige *Voraussetzungen* gemacht, oder Formeln von nicht unbedingter Gültigkeit benutzt wurden.

Ohm bezeichnet in seinen Schriften, aufser dem Quotienten $1:0$ und dem $\log 0$, auch die auf die Einheit als Basis bezogenen Logarithmen als unzuläfsliche Rechnungsformen. Es unterscheiden sich indefs die zuletzt genannten Logarithmen von den übrigen nur dadurch, dafs sie weniger

Werthe haben, und daſs ihnen namentlich der von *Cauchy* sogenannte Hauptwerth (*valeur principale*) fehlt. Denn stellt $\log a$ den Logarithmus von a für die Einheit als Basis vor, so ist

$$\log a = \frac{\text{log. nat.}\, a}{\text{log. nat.}\, 1} = \frac{\text{log. nat.}\, a}{2n\pi\sqrt{(-1)}},$$

(und in der That hat man, wenn r den Modulus und Φ das Argument von a vorstellt,

$$1^{\frac{lr+(2n'\pi+\varphi)\sqrt{(-1)}}{2n\pi\sqrt{(-1)}}} = e^{lr}(\cos(2n'\pi+\Phi)+\sqrt{(-1)}\sin(2n'\pi+\Phi)) = a).$$

Es hat also $\log a$ nur für $n=0$ keine Bedeutung und namentlich für ein positives a keinen reellen Werth, während die übrigen Werthe noch unverkürzt existiren.

Andrerseits muſs man aber, was *Ohm* unerörtert lieſs, auch die imaginären Potenzen von Null zu den werthlosen Formen zählen, da die Formel, welche zur Bestimmung der Werthe imaginärer Potenzen dient, eine einen Widerspruch enthaltende Form in sich aufnimmt, sobald der Dignand in Null übergeht.

Da nun alle negativen Potenzen von Null zugleich mit $\frac{1}{0}$ werthlos werden, so müssen wir *die negativen imaginären Potenzen* von Null, so wie *den Neperschen Logarithmen von Null* für *bedeutungslos* erklären; und zwar sind dies, wie man sich leicht bei der geringen Zahl der analytischen Verbindungsformen überzeugen kann, die *einzigen* werthlosen Grundformen, wofern man der Bequemlichkeit halber $\frac{1}{0}$ als zu den negativen Potenzen von Null gehörend ansieht.

Es ist oben bemerkt worden, daſs auf ein allgemeines Resultat, welches in einem einzelnen Falle werthlos wird, das diesem einzelnen Falle etwa entsprechende besondere Resultat sich nie zurückführen lasse. Zuweilen existirt jedoch eine allgemeine Form für das Resultat, aus welcher beide, jenes allgemeine, wie dieses besondere Resultat, hergeleitet werden können. Sind auf diese Weise beide Resultate einer gemeinsamen Form fähig, so nennt man nicht passend die werthlose Form des allgemeinen Resultats einen *unbestimmten Ausdruck,* und das specielle Resultat dessen *wahren Werth.* Das Verfahren bei der Aufsuchung des sogenannten wahren Werthes läuft auf nichts anderes hinaus, als auf die Ermittelung jener gemeinsamen Form.

So werden die Gleichungen $y = mx+n$ und $0 = px+q$ (von

welchen die erste die allgemeine Gleichung für alle mit der Ordinaten-Axe nicht parallele Linien, die zweite die besondere Gleichung der mit der Ordinaten-Axe parallelen Linien vorstellt, und von denen daher keine die andere in sich begreift) gemeinschaftlich repräsentirt durch $ay+bx+c=0$, und obwohl $0=px+q$ nicht aus $y=mx+n$ hergeleitet werden kann, so läfst sich doch die gemeinsame Form $ay+bx+c=0$ aus $y=mx+n$ finden, und so die letzte Gleichung indirect zur Bestimmung von $0=px+q$ (des sogenannten wahren Werthes von $y=mx+n$ für $a=0$) benutzen, indem man, ehe man den Uebergang zu $0=px+q$ macht, mit den den Nennern von m und n gemeinsamen Factoren multiplicirt und dadurch den Coëfficienten von y der Null gleich zu werden befähigt. Nie aber kann man sagen, dafs $0=px+q$ ein besonderer Werth von $y=mx+n$ sei.

Zu solchen sogenannten unbestimmten Ausdrücken (die sich übrigens alle *à priori* construiren lassen) gehören $0^a a^b$ (wo a positiv und b negativ, oder a und b imaginär zu nehmen sind), $\log 0^m - \log 0^n$ (wo m und n reell und imaginär sein können), $0^p \log 0^q$ (wo p und q nur positiv sein dürfen) etc.

So sind z. B. die Ausdrücke $(2x^3-5x^5)^{2+\sqrt{-1}}$, $(x+3x^4)^{4-3\sqrt{-1}}$ und $\log(ax+x^2)^{-3}-\log(bx^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{2}{3}})^6$ für $x=0$ durchaus ohne Bedeutung, haben jedoch (aufser für $x=0$) einerlei Werth mit den Ausdrücken $x^2(2-5x^2)^{2+\sqrt{-1}}$, $(1+3x^3)^{4-3\sqrt{-1}}$ und $\log(a+x)^{-3}-\log(b-x^{\frac{7}{6}})^6$, die auch für $x=0$ einen Werth besitzen; und das, was man die wahren Werthe nennt, nämlich 0 und $\log a^{-3}-\log b^6$ sind nicht, wie es scheint, Werthe jener ersten Ausdrücke, sondern Werthe der zweiten allgemeinen Formen.

Des Folgenden wegen werde noch bemerkt, dafs der sogenannte wahre Werth von $0^p \log 0^q$ unter allen Umständen der Null gleich ist, so dafs hier der Ausdruck „Unbestimmtheit," selbst in dem üblichen Sinne genommen, seine Bedeutung verliert. Es kann nämlich kein Ausdruck in $0 \log 0$ übergehen, wenn er nicht die Form $mx^a \log(ny^b)$ hat und x und y gleichzeitig verschwinden, während a und b positive ganze oder gebrochene Zahlen sind. Zu den allgemeineren Formen aber, welche sowohl sämmtliche Werthe dieses Products einschliefsen, als auch eines Werthes für $x=y=0$ fähig sind, gehört unter andern der Ausdruck $mx^a \log n + m \log(y^b)^{x^a}$, und dieser, wenn man vom letzten Logarithmen ($\log 0^0$ oder

log 1) nur den Hauptwerth berücksichtigt, geht in Null über, sobald x und y verschwinden. Weifs man nun, dafs die erste Form ein vollständiges Resultat war, so ist, weil die unendlich vieldeutigen Formen $u \log v$ und $\log v^u$ für $u = 0$ nur den Hauptwerth mit einander gemein haben, die Null als der *einzige* Werth des speciellen Resultats anzusehen.

---

§. 1. *Hülfssätze.* I. Versteht man unter *normaler Entwicklung* einer Function jede nach positiven ganzen Potenzen fortschreitende, noch für den Nullwerth des Fortschreitungsbuchstabens gültige Reihe, so ist, wenn x_1 einen besonderen Werth des veränderlichen x vorstellt,

die Function $f(x_1+\varepsilon)$ nach ε normal entwickelbar, so oft weder $f(x_1)$ werthlos ist, noch $f(x)$ Potenzen mit gebrochenen oder veränderlichen Exponenten enthält, deren Dignand für $x = x_1$ verschwindet. *)

Daher ist denn auch *jede Function $f(x)$ einer normalen Entwicklung nach x fähig, so oft sie weder für $x = 0$ werthlos wird, noch Potenzen mit gebrochenen oder veränderlichen Exponenten enthält, deren Dignand für $x = 0$ verschwindet.*

Die einzige Function $f(x)$, welche sich nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln läfst, ohne noch für $x = 0$ gültig zu bleiben, also ohne normal zu sein, ist die Function $A^{\frac{a}{x}}$, wenn A die Form

$$A = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots.$$

hat. Da nun mit dem Ungültigwerden für $x = 0$ die entsprechende Reihe nicht nach dem *Maclaurin*schen Lehrsatz hergestellt werden kann, und die Residuenrechnung sich auf den *Taylor*schen Satz stützt, so kommen dergleichen Functionen in den vorliegenden Untersuchungen nicht in Betracht.

II. Verliert eine Function $f(x)$ für $x = x_1$ ihre Bedeutung, so sind sämmtliche Differenzialcoëfficienten derselben für $x = x_1$ werthlos.

III. Ist x_1 ein Wurzelwerth einer algebraischen oder transcendenten Gleichung $f(x) = 0$, so läfst sich $f(x)$ auf die Form $(x - x_1)^\alpha \varphi(x)$ bringen, wo α eine positive ganze oder gebrochene Zahl vorstellt und $\varphi(x)$ eine Function bedeutet, welche für $x = x_1$ weder verschwindet noch werthlos wird.

---

*) Hier, wie überall in der Folge, sind die Quotienten und Wurzeln unter dem Begriff des Products und der Potenz subsumirt.

Die vorstehenden drei Lehrsätze lasse ich hier, um die Grenzen dieses Aufsatzes nicht zu sehr auszudehnen, vorläufig unbewiesen, und berufe mich hinsichtlich der Beweise auf mein nächstens erscheinendes Handbuch der Differenzial-, Residuen- und Variationsrechnung.

§. 2. *Erklärung.* Existirt eine positive ganze oder gebrochene Zahl n, welche so beschaffen ist, dafs $(x-x_1)^n f(x)$ für $x=x_1$ nicht werthlos wird, wenn auch $f(x_1)$ werthlos sein sollte, so werden wir $f(x)$ „für $x=x_1$ reductibel" nennen. Eben so werden wir, da jenes Product für $x-x_1=\varepsilon$ in $\varepsilon^n f(x_1+\varepsilon)$ übergeht, in diesem Falle auch $f(x_1+\varepsilon)$ „für $\varepsilon=0$ reductibel" nennen.

§. 3. *Von den Formen, nach welchen eine Function $f(x_1+\varepsilon)$ sich entwickeln läfst, wenn eine normale Entwicklung nach ε unmöglich ist, mit besonderer Rücksicht auf die Reductibilität derselben.*

Ist x_1 ein Werth von x, für welchen $f(x_1+\varepsilon)$ nicht normal entwickelt werden kann, so kommen nach §. 1. I. in $f(x)$ Potenzen vor, deren Dignand, oder Logarithmen, deren Logarithmand für $x=x_1$ verschwindet, d. h. (zufolge §. 1. III.) Ausdrücke von der Form

$$1.\quad [(x-x_1)^\alpha y]^m \quad \text{oder} \quad 2.\quad \log[(x-x_1)^\alpha y],$$

wo α eine positive ganze oder gebrochene Zahl, y aber eine Function vorstellt, welche für $x=x_1$ weder verschwindet, noch werthlos ist.

Ist nun z einer jener Ausdrücke, so läfst sich im allgemeinen $f(x)$ nach dem *Maclaurin*schen Lehrsatz normal nach z entwickeln, so dafs man

$$3.\quad f(x) = u+u_1z+u_2z^2+u_3z^3+\dots\dots$$

erhält, während, wenn z der einzige, die normale Entwicklung hindernde Ausdruck war, u, u_1, u_2, u_3, ... für $x=x_1+\varepsilon$ sich normal nach ε entwickeln lassen.

Es sei nun

A. der *Maclaurin*sche Lehrsatz für die Entwicklung nach z anwendbar, und zwar sei

I. in der Function $f(x)$ nur *ein* Ausdruck z vorhanden, welcher $f(x_1+\varepsilon)$ nach ε normal zu entwickeln hindert, und dabei dieses z von der Form (1.). Alsdann erhält man, wenn man u_1y^m durch v_1, u_2y^{2m} durch v_2 etc. ersetzt,

$$f(x) = u+v_1(x-x_1)^{\alpha m}+v_2(x-x_1)^{2\alpha m}+v_3(x-x_1)^{3\alpha m}+\dots\dots,$$

und wenn hierin x mit $x_1+\varepsilon$ vertauscht und durch (m), (u), (v_1), (v_2), ... Das bezeichnet wird, was durch diese Substitution aus m, u, v_1, v_2, ... wird,

5. $f(x_1+\varepsilon) = (u)+(v_1)\varepsilon^{\alpha(m)}+(v_2)\varepsilon^{2\alpha(m)}+(v_3)\varepsilon^{3\alpha(m)}+\dots,$
während (u), (v_1), (v_2), ... sich normal nach ε entwickeln lassen.

Ist nun 1. αm eine positive gebrochene Zahl (also auch $(m)=m$), so ergiebt sich, wenn man diese Reihe (5.) nach Potenzen von ε ordnet, eine nach positiven (ganzen und gebrochenen) Potenzen fortschreitende Entwicklung, in welcher αm der niedrigste gebrochene Exponent ist.

In diesem Fall ist $f(x_1)$ nicht werthlos, und daher $f(x)$ in Bezug auf $x=x_1$, und $f(x_1+\varepsilon)$ in Bezug auf $\varepsilon=0$, reductibel.

2. Ist m eine negative ganze oder gebrochene Zahl (also auch $(m)=m$), so läfst sich $f(x_1+\varepsilon)$ nur dann nach steigenden Potenzen von ε ordnen, wenn die Gliederzahl in (3) endlich ist, also wenn das x in $f(x)$ weder in einem Logarithmen, noch in einem Exponenten, noch in dem Dignanden einer Potenz mit veränderlichem Exponenten, noch endlich in einem mit einer nicht positiven ganzen Zahl potenzürten Binom oder Polynom vorkommt. Ist diese Bedingung erfüllt, läfst sich also $f(x)$ durch die einfache arithmetische Behandlung nach x entwickeln, so werden wir sagen, *x komme in $f(x)$ in einfacher Form vor.* Es enthält alsdann $f(x_1+\varepsilon)$ einen endlichen gröfsten negativen Exponenten zu ε, und daher ist, wenn $-n$ diesen Exponenten vorstellt, für $\varepsilon^n f(x_1+\varepsilon)$ eine nach steigenden positiven Potenzen fortschreitende Entwicklung möglich, welche dieserhalb für $\varepsilon=0$ nicht werthlos ist. Demzufolge ist $f(x_1+\varepsilon)$ für $\varepsilon=0$ und $f(x)$ für $x=x_1$ einzig und allein dann reductibel, wenn x in $f(x)$ nur in einfacher Form vorkommt.

3. Ist m imaginär, so erscheinen in der Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ imaginäre Potenzen von ε, so dafs die Reductibilität unmöglich wird.

4. Ist m veränderlich, und reducirt sich $m\alpha$ für $x=x_1$ auf i, so dafs $m\alpha=i+s$ und s eine mit $x-x_1$ zugleich erscheinende Function ist, so hat man, wenn (s) Das bedeutet, was aus s für $x=x_1+\varepsilon$ wird,

$$\varepsilon^{\alpha(m)} = e^{i+(s)} = \varepsilon^i(1+(s)\log\varepsilon+\tfrac{1}{2}(s)^2\log\varepsilon^2+\dots),$$
$$\varepsilon^{2\alpha(m)} = \varepsilon^{2i+2(s)} = \varepsilon^{2i}(1+2(s)\log\varepsilon+2(s)^2\log\varepsilon^2+\dots) \text{ etc.},$$

während (s), $(s)^2$, ... normal nach ε entwickelbar sind, da der Voraussetzung nach die normale Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ nur durch den *Dignanden* in x gehindert wird. Sollte demnach i positiv oder Null sein, so kommen in $f(x_1+\varepsilon)$ nur positive Potenzen von ε vor, die, von einem bestimmten (nämlich von dem auf ε^i folgenden) Gliede ab, ganze Functionen von $\log\varepsilon$ zu Factoren haben, und es ist, da $(s)\log\varepsilon$ für $x=x_1$ in Null

übergeht, $f(x_1)$ nicht werthlos und mithin $f(x)$ für $x = x_1$ reductibel. Sollte dagegen i negativ sein, und ist dabei die Gliederzahl in (3.) eine endliche, so läfst sich wiederum, wie man sieht, $f(x)$ auf die Form $(x-x_1)^{-n}\varphi(x)$ bringen, wo n eine positive Zahl und $\varphi(x)$ eine Function ist, die für $x = x_1$ weder verschwindet noch werthlos ist. Somit ist unter der angeführten Bedingung auch bei negativem i, $f(x)$ für $x = x_1$ reductibel.

II. Wenn z der einzige Ausdruck ist, welcher eine normale Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ nach ε unmöglich macht und dabei die Form (2.) hat, so ist, wenn z und y für $x = x_1+\varepsilon$ resp. in (z) und (y) übergehen,

$$(z) = \log\varepsilon^a + \log(y),$$

während $\log(y)$, da (y) nicht mit ε zugleich verschwindet, nach ε normal entwickelt werden kann. Es gehen daher in die Entwicklung von $(z)^2$, $(z)^3$, ... und somit auch in die Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ nur positive Potenzen von ε ein; doch so, dafs die Coëfficienten positive ganze Potenzen von $\log\varepsilon^a$ enthalten, und zwar in endlicher Form, so oft z in $f(x)$ nur in einfacher Form vorkommt. Nach $\log\varepsilon^a$ entwickelt, wird alsdann

$$6. \quad f(x_1+\varepsilon) = w + w_1\log\varepsilon^a + w_2(\log\varepsilon^a)^2 + \dots;$$

wobei w, w_1, w_2, ... in Bezug auf ε normal werden.

III. Schliefst $f(x)$ mehrere Ausdrücke von der Form (1.) und (2.) in sich, etwa die Ausdrücke z und z_1, so läfst sich $f(x)$ in Bezug auf z so behandeln, wie es so eben angegeben wurde, und $f(x_1+\varepsilon)$ in die Form (5.) oder (6.) bringen, nur dafs alsdann (u), (v_1), (v_2), ..., w, w_1, w_2, ... in Folge des in diesen Coëfficienten vorkommenden z_1 nicht mehr normal nach ε entwickelt werden können. Diese Coëfficienten lassen sich indessen selbst wieder in Reihen von der Art der (5.) und (6.) verwandeln. Die Vorausbestimmung der Form der jedesmaligen Gesammt-Entwicklung hat daher keine Schwierigkeit.

Kommen nämlich z. B. 1., in $f(x)$ mehrere Ausdrücke z, z_1, z_2, ... vor, welche eine normale Entwickelung von $f(x_2+\varepsilon)$ hindern, und sind dieselben sämmtlich Potenzen mit negativen Exponenten, oder mit Exponenten, die sich für $x = x_1$ auf negative Constanten reduciren, so läfst sich $f(x)$, wofern nur z, z_1, z_2, ... blofs in einfacher Form vorhanden sind, in ein Product $(x-x_1)^{-n}\varphi(x)$ verwandeln, in welchem n positiv und $\varphi(x)$ eine Function ist, die für $x = x_1$ weder verschwindet noch werthlos wird, und es wird daher $f(x_1+\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ reductibel. Dasselbe findet noch statt, wenn aufser jenen Potenzen z, z_1, z_2, ... noch andere Potenzen vor-

kommen, deren Dignanden für $x = x_1$ verschwinden und deren Exponenten positive gebrochene Zahlen oder Functionen von x sind, die sich für $x = x_1$ auf positive Constanten oder Null reduciren.

Enthält ferner 2., $f(x)$ mehrere logarithmische Ausdrücke z, z_1, z_2. ...., welche eine normale Entwicklung hindern, so ergiebt sich für $f(x_1+\varepsilon)$ wiederum eine Reihe, die in Bezug auf die Logarithmen von positiven Potenzen von ε normal ist und deren Coëfficienten sich normal nach ε entwickeln lassen, so dafs hier stets die Reductibilität statt findet.

Kommen endlich 3., aufser diesen logarithmischen Ausdrücken noch negative Potenzen oder solche Potenzen vor, deren Exponenten sich für $x = x_1$ auf negative Constanten reduciren, so lassen sich, sobald dieselben nur in einfacher Form vorhanden sind, die Coëfficienten der Reihe (6.), d. h. w, w_1, w_2, ..., sämmtlich auf die Form $(x-x_1)^{-n}\varphi(x)$ bringen, und es wird demnach $f(x_1+\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ reductibel, wenn gleichzeitig auch die logarithmischen Ausdrücke nur in einfacher Form in $f(x)$ vorkommen.

B. In Bezug auf die Fälle, in welchen $f(x)$ sich nicht nach z normal entwickeln läfst, bemerken wir, da es hier blofs auf die Erkennung der reductibeln Functionen ankommt, nur Folgendes.

Ist ξ der Ausdruck, welcher eine normale Entwicklung von $f(x)$ nach z hindert, und hat

1. dieses ξ die Potenzform, so sieht die Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ in Bezug auf z so aus, wie die Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ in Bezug auf ε in der Gleichung (5.). Sind nun sowohl ξ als z positiv gebrochene Potenzen, so läfst sich demnach, wenn man die Factoren $z^{\alpha m}$, $z^{2\alpha m}$ .... nach Potenzen von ε entwickelt, $f(x_1+\varepsilon)$ nach steigenden positiven Potenzen von ε ordnen und es bleibt $f(x_1+\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ reductibel.

Eben so verhält es sich, wenn die Exponenten der Potenzen ξ und z veränderlich sind, aber resp. für $z = 0$ und $x = x_1$ in positive Constanten oder Null übergehen.

Ist dagegen z eine negative Potenz, so darf diese zuvörderst in ξ nur in einfacher Form vorkommen, wenn $f(x)$ für $x = x_1$ reductibel sein soll; und da auch ξ dann nothwendig in $f(x)$ nur in einfacher Form vorhanden ist, so kann ξ kein Polynom in Bezug auf z sein, d. h. es mufs ξ die Form eines Products wz^β haben, so dafs wir genau wieder den Fall I. erhalten.

2. Sind ξ und z logarithmisch, so würde die Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ Ausdrücke von der Form $\log(\log\varepsilon^n)^m$ in sich aufnehmen und daher durch Multiplication mit einer positiven Potenz von ε nie in einen Ausdruck verwandelt werden können, welcher für $\varepsilon=0$ nicht mehr werthlos bliebe.

3. Ist ξ logarithmisch und z eine Potenz, so würde nach II., wenn (ξ) Das vorstellt, was aus ξ für $x=x_1+\varepsilon$ wird,

$$f(x_1+\varepsilon) = w+w_1\log(\xi)+w_2\log(\xi)^2+w_3\log(\xi)^3+\dots.$$

sein, während ξ wieder eine Reihe von der Form (5.) wäre. Die Multiplication mit einer positiven Potenz von ε könnte daher nur dann zu einem Ausdruck führen, der für $\varepsilon=0$ nicht werthlos ist, wenn z eine positive Potenz ist, also nur, wenn der Logarithmand in $f(x)$ für $x=x_1$ verschwindet. In diesem Falle wird sich aber die Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ nur dadurch von der in (6.) angegebenen Form unterscheiden, dafs auch w, w_1, w_2, ... *gebrochene* positive Potenzen von ε enthalten können.

4. Ist ξ eine Potenz und z logarithmisch, und dabei wiederum (ξ) der Werth von ξ für $x=x_1+\varepsilon$, so hat man $f(x_1+\varepsilon)$ von der Form

$$u+v_1(\xi)+v_2(\xi)^2+v_3(\xi)^3+\dots,$$

wo u, v_1, v_2, v_3, ... nach ε normal sind und (ξ) sich auf die Form der Reihe (6.) bringen läfst. Die Multiplication mit einer positiven Potenz von ε kann also nur dann etwas für $\varepsilon=0$ Nichtwerthloses hervorbringen, d. h. es kann $f(x_1+\varepsilon)$ nur dann für $\varepsilon=0$ reductibel werden, wenn ξ eine positive Potenz ist. Die Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ wird alsdann demnach wiederum eine Reihe mit positiven gebrochenen Potenzen von ε, in welcher die Coëfficienten positive Potenzen von $\log\varepsilon$ enthalten werden.

§. 4. *Lehrsatz.* Wenn $f(x)$ für $x=x_1$ nicht werthlos wird, so läfst sich $f(x_1+\varepsilon)$, falls eine normale Entwicklung nach ε unmöglich ist, in eine nach steigenden positiven gebrochenen Potenzen von ε fortlaufende Reihe mit constanten Coëfficienten verwandeln, oder doch in eine Reihe, die nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen fortläuft, und in welcher die Coëfficienten ganze Functionen von $\log\varepsilon$ sind. Die Glieder dieser Reihen lassen sich bis zu dem ersten Gliede, welches eine gebrochene Potenz von ε oder einen veränderlichen Coëfficienten enthält, durch unmittelbare Anwendung des *Taylor*schen Satzes bestimmen.

Beweis. Wenn $f(x_1)$ nicht werthlos wird, so ist eine normale Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ nur dann unmöglich, wenn in $f(x)$ Potenzen

vorkommen, deren Dignand für $x = x_1$ verschwindet, und deren Exponent positiv, gebrochen, oder eine Function von x ist, welche sich für $x = x_1$ auf eine positive Constante oder auf Null reducirt. Für den ersten Fall, welcher zu einer nach positiven Potenzen von ε fortlaufenden Reihe mit constanten Coëfficienten führt, ist die Richtigkeit des Lehrsatzes allgemein bekannt. Was den zweiten Fall betrifft, so kann man die Potenz, welche die normale Entwicklung hindert, durch $[(x-x_1)^a y]^{\frac{m+s}{a}}$ bezeichnen, wenn a eine positive ganze oder gebrochene Zahl, m eine positive ganze oder gebrochene Zahl oder Null vorstellt, und wenn y eine Function ist, die für $x = x_1$ nicht verschwindet, s dagegen mit $x - x_1$ zugleich Null wird.

Entwickelt man nun $f(x)$ nach Potenzen von $(x-x_1)^{m+s}$, so erhält man

$$f(x) = u + v_1(x-x_1)^{m+s} + v_2(x-x_1)^{2(m+s)} + v_3(x-x_1)^{3(m+s)} + \dots,$$

oder, wenn man s in der Form eines Products $(x-x_1)^\mu s_1$ schreibt, und dabei μ so grofs nimmt, dafs s_1 für $x = x_1$ weder verschwindet, noch werthlos wird:

$$f(x) =$$

$$u + v_1(x-x_1)^m + v_1(x-x_1)^{m+\mu}[s_1 \log(x-x) + \tfrac{1}{2}(x-x_1)^\mu s_1^2 \log(x-x_1)^2 \dots]$$
$$+ v_2(x-x_1)^{2m} + v_2(x-x)^{m+\mu}[2s_1 \log(x-x_1) + \tfrac{1}{2}(x-x_1)^\mu (2s_1)^2 \log(x-x_1)^2 + \dots]$$
$$+ \text{ etc.}$$

Ist ferner m gebrochen und m_1 die gröfste in m enthaltene ganze Zahl, so ist, wie man sieht, wenn man in dieser Reihe $x_1 + \varepsilon$ für x setzt, ε^{m_1} die höchste ganze Potenz mit constantem Exponenten, welche in der Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ vorkommt, und wenn $u, v_1, v_2, \dots$ nach ε sich normal entwickeln lassen, so werden die ersten $m_1 + 1$ Glieder jener Entwicklung folgende sein:

$$(u) + \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\varepsilon}{1} + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\frac{\varepsilon}{1.2} + \dots \left(\frac{d^{m_1}u}{dx^{m_1}}\right)\frac{\varepsilon^{m_1}}{1.2\dots m_1},$$

wo durch die Klammern angedeutet werden soll, dafs x_1 für x zu setzen ist. Ist m eine ganze Zahl und $\mu \overline{\overline{<}} 1$, so sind die Glieder von $f(x_1+\varepsilon)$, welche constante Coëfficienten haben, folgende:

$$(u) + \left(\frac{du}{dx}\right)\varepsilon + \dots \left(\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right)\frac{\varepsilon^{m-1}}{1.2\dots(m-1)} + \left[\left(\frac{d^m u}{dx^m}\right) + (1.2\dots)(v_1)\right]\frac{\varepsilon^m}{1.2\dots m}.$$

Ist endlich m eine ganze Zahl, $\mu > 1$ und m' eine zwischen m und $m+\mu$ liegende ganze Zahl, so folgen auf die so eben angeführten Glieder von $f(x_1+\varepsilon)$ noch normale Glieder von folgender Form:

$$\left[\left(\frac{d^{m'}u}{dx^{m'}}\right)+\left(\frac{d^{m'-m}v_1}{dx^{m'-m}}\right)\frac{1.2\dots.m'}{1.2\dots.(m'-m)}\right]\frac{\varepsilon^{m'}}{1.2\dots.m'}.$$

Soll nun die Behauptung des Lehrsatzes richtig sein, so wird gefordert, daſs

$$\left(\frac{d^r f}{dx^r}\right)=\left(\frac{d^r u}{dx^r}\right)$$

sei, so lange $r<m$ ist; daſs ferner, wenn m eine ganze Zahl ist,

$$\left(\frac{d^m f}{dx^m}\right)=\left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)+(1.2\dots.m)(v_1)$$

sei, und daſs endlich, wenn $m'>m$ und $<m+\mu$ ist,

$$\left(\frac{d^{m'}f}{dx^{m'}}\right)=\left(\frac{d^{m'}u}{dx^{m'}}\right)+\frac{1.2\dots.m'}{1.2\dots.(m'-m)}\left(\frac{d^{m'-m}v_1}{dx^{m'-m}}\right)$$

sei. Die Richtigkeit dieser Gleichungen folgt aber daraus, daſs erstlich

$$\frac{d^r[(x-x_1)^h(\log(x-x_1))^k]}{dx^r},$$

wenn k positiv ist, für $x=x_1$ der Null gleich, oder werthlos wird, je nachdem $h>r$ oder $h\overline{\overline{<}}r$ ist, insofern hier für $\log 1$ der Hauptwerth Null allein anwendbar ist; und daſs zweitens

$$\frac{d^r[(x-x_1)^h\varphi(x)]}{dx^r}$$

der Null gleich wird, wenn $r<h$ ist,

$$=(1.2\dots.r)\varphi(x_1),\text{ wenn } r=h, \text{ und}$$

$$=\frac{1.2\dots.r}{1.2\dots.(r-h)}\left(\frac{d^{r-h}\varphi}{dx^{r-h}}\right),\text{ wenn } h \text{ eine ganze Zahl und } >r \text{ ist.}$$

Es erhellt zugleich hieraus, daſs allen nicht normalen Gliedern von $f(x_1+\varepsilon)$ werthlose Formen in der *Taylor*schen Reihe entsprechen, der *Tayl* sche Lehrsatz also kein einziges unrichtiges Glied liefert.

Enthält $f(x)$ mehrere Potenzen mit veränderlichen Exponenten, welche sich für $x=x_1$ auf positive Constanten oder auf Null reduciren, so läſst sich doch allemal $f(x)$ auf die Form

$$u+v_1(x-x_1)^\alpha+v_2(x-x_1)^\beta+v_3(x-x_1)^\gamma+\dots.$$

bringen, so daſs α, β, $\gamma\dots.$ für $x=x_1$ positiv werden, während von den einzelnen Gliedern dieser Reihe dasselbe gilt, was so eben für $f(x)$ nachgewiesen wurde. Also sind auch hier noch die ersten Glieder von $f(x_1+\varepsilon)$ mit den Gliedern der *Taylor*schen Reihe, soweit solche mit ganzen Potenzen von ε multiplicirt sind und in ihren Coëfficienten den $\log\varepsilon$ nicht enthalten, übereinstimmend; vorausgesetzt, daſs man für den etwa vorkommenden $\log 1$ überall nur den Hauptwerth Null setzt.

§. 5. *Cauchy's Erklärung des Residuums und Auffindung des Werthes desselben.*

Die Erklärung des Residuums, wie sie *Cauchy* in seinen „*Exercices*" I. p. 11 giebt, ist folgende:

„Ist x_1 irgend ein Werth von x, welcher die Function $f(x)$ unendlich macht, und stellt ε eine unendlich kleine Gröfse vor, so enthalten die ersten Glieder der nach steigenden Potenzen von ε geordneten Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ negative Potenzen von ε, und eines derselben ist ein Product, dessen einer Factor $\frac{1}{\varepsilon}$ ist und dessen anderer Factor einen endlichen Werth hat. Diesen endlichen Factor nennen wir das *Residuum* der Function $f(x)$ in Bezug auf $x=x_1$."

Die Bestimmung des Werthes der Residuen geschieht ebendaselbst S. 12 und 13, wie folgt:

„Wird $f(x)$ für $x=x_1$ unendlich, und daher x_1 ein Wurzelwerth der Gleichung $\frac{1}{f(x)}=0$, so mufs, wenn dieser Wurzelwerth z. B. $m$fach ist, $(x-x_1)^m f(x)$ ein Ausdruck sein, der für $x=x_1$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt, und man hat, wenn

$$(x-x_1)^m f(x) = \varphi(x)$$

gesetzt und x mit $x_1+\varepsilon$ vertauscht wird,

$$f(x_1+\varepsilon) = \frac{\varphi(x_1+\varepsilon)}{\varepsilon^m} = \frac{1}{\varepsilon^m}\varphi(x_1)+\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\varphi'(x_1)+\frac{1}{\varepsilon^{m-2}}\varphi''\frac{(x_1)}{1.2}+\dots$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\varphi^{(m-1)}(x_1)}{1.2\dots.(m-1)}+\frac{\varphi^{(m)}(x_1+\theta\varepsilon)}{1.2\dots.m}.$$

Demnach ist, wenn das Residuum von $f(x)$ in Bezug auf $x=x_1$ durch

$$E\frac{f(x)(x-x_1)^m}{((x-x_1))^m}$$

bezeichnet wird,

$$1.\quad E\frac{f(x)(x-x_1)^m}{((x-x_1))^m} = \frac{\varphi^{(m-1)}(x_1)}{1.2\dots.(m-1)},$$

und für den besonderen Fall $m=1$,

$$2.\quad E\frac{f(x)(x-x_1)}{((x-x_1))} = \varphi(x_1)."$$

Gegen die obige Erklärung ist nun einzuwenden: erstlich, dafs, insofern *Cauchy*, wie der Verfolg zeigt, zu den Werthen von x, welche $f(x)$ unendlich machen, auch solche zählt, für welche $f(x)$ den Logarithmus von Null in sich aufnimmt, für $f(x_1+\varepsilon)$ *nicht*, wie behauptet wird, allemal eine

Reihe mit negativen Potenzen von ε existirt. Zweitens, daſs, wenn sich wirklich $f(x_1+\varepsilon)$ nach negativen Potenzen steigend entwickeln läſst, *nicht* nothwendig, wie es *Cauchy* voraussetzt, ein mit $\frac{1}{\varepsilon}$ multiplicirtes Glied vorhanden ist. Drittens, daſs, wenn in $f(x_1+\varepsilon)$ ein mit $\frac{1}{\varepsilon}$ multiplicirtes Glied vorkommt, der Coëfficient *nicht* nothwendig die Eigenschaften, welche in der Folge den Residuen beigelegt werden, und namentlich nicht den durch die Gleichungen (1. und 2.) bestimmten Werth hat.

Gegen die Entwicklung der Formeln (1. und 2.) ist einzuwenden, daſs sie nur in dem besonderen Fall allgemein gültig ist, wenn die Gleichung $\frac{1}{f(x)}=0$ auf eine *algebraische* Gleichung führt.

Da nun *Cauchy* die Gesetze, die er für die Residuen ableitet, gleichwohl für *jeden* Wurzelwerth der Gleichung $\frac{1}{f(x)}=0$ anwendet, andrerseits alle diese Gesetze auf der Richtigkeit der Gleichungen (1. und 2.) beruhen, so werden wir zur Kenntniſs aller der Fälle kommen, in welchen jene Gesetze in der That anwendbar sind, wenn wir die Grenzen der Gültigkeit der Gleichungen (1. und 2.) untersuchen.

Um den Gegenstand in seiner gröſsten Allgemeinheit zu behandeln, sehen wir vorläufig ganz von der dem Residuum beigelegten Eigenschaft, ein Coëfficient der Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ zu sein, ab, und stellen folgenden Begriff für das Residuum auf.

§. 6. Ist $f(x)$ eine beliebige Function von x, und x_1 ein besonderer Werth dieses x: existirt ferner eine positive ganze Zahl m, für welche

$$(a.)\quad \left[\frac{d^{m-1}(x-x_1)^m f(x)}{1.2\ldots.(m-1)\,dx^{m-1}}\right]_{x_1}\ ^{*)}$$

eine Bedeutung hat, so nenne man diesen Ausdruck (*a.*) das auf $x=x_1$ sich beziehende Residuum von $f(x)$.

§. 7. *Zusatz.* Hat der Ausdruck (*a.* §. 6.) für $m=\gamma$ einen bestimmten Werth K, so hat derselbe auch für jeden Werth von m, der gröſser als γ ist, einen Werth, und zwar denselben Werth K. Da nämlich, wenn der Ausdruck (*a.*) für $m=\gamma$ eine Bedeutung haben soll, auch $(x-x_1)^\gamma f(x)$ nach §. 1, 2. nicht ohne Bedeutung sein kann, so hat man, wenn n eine beliebige ganze Zahl vorstellt, die gröſser als γ ist:

---

*) Das angehängte x_1 bedeutet, daſs in dem eingeklammerten Ausdruck nach dem Differenziiren x mit x_1 vertauscht werden soll.

$$\frac{d^{n-1}(x-x_1)^n f(x)}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}(x-x_1)^{n-\gamma}[(x-x_1)^\gamma f(x)]}{dx^{n-1}} = \frac{1.2\ldots.(n-1)}{1.2\ldots.(\gamma-1)}\,\frac{d^{\gamma-1}(x-x_1)^\gamma f(x)}{dx^{\gamma-1}}.$$

Der Werth eines Residuums ist demnach unabhängig von der Gröfse des Exponenten m, wenn dieser nur nicht kleiner ist, als der kleinste Werth, für den der Ausdruck (a.) eine Bedeutung hat.

§. 8. *Zusatz.* Hat eine Function $f(x)$ für $x = x_1$ ein Residuum, so ist solches allemal dem Coëfficienten von ε^{-1} in der nach steigenden Potenzen von ε fortschreitenden Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ gleich. (Nicht aber ist umgekehrt der Coëfficient von ε^{-1} allemal ein Residuum von $f(x)$).

Es ist nämlich nach §. 4. der Ausdruck

$$\left\{\frac{d^{m-1}[(x-x_1)^m f(x)]}{dx^{m-1}}\right\}_{x_1},$$

so oft derselbe eine Bedeutung hat, der Coëfficient von $\frac{\varepsilon^{m-1}}{1.2\ldots.(m-1)}$ in der nach steigenden Potenzen von ε fortschreitenden Entwicklung von $[(x-x_1)^m f(x)]_{x_1+\varepsilon}$, d. h. von $\varepsilon^m f(x_1+\varepsilon)$, und mithin auch der Coëfficient von $\frac{\varepsilon^{-1}}{1.2\ldots.(m-1)}$ in der Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$, w. z. b. w.

Hat daher eine Function ein auf $x = x_1$ sich beziehendes Residuum, während $f(x_1+\varepsilon)$, nach steigenden Potenzen von ε entwickelt, kein mit ε^{-1} multiplicirtes Glied hat, so mufs der Ausdruck (a.), welcher den Werth des Residuums angiebt, der Null gleich sein. Wir werden die Residuen in diesem Falle, da man noch Glieder mit Null-Coëfficienten künstlich in die Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ hineinbringen mufs, wenn man dieselben mit *Cauchy* als Coëfficienten von ε^{-1} betrachten will, *künstliche Residuen* nennen. Die nicht künstlichen Residuen mögen alsdann, im Gegensatze zu denselben, *natürliche* heifsen.

§. 9. *Von den Werthen von x, für welche eine Function $f(x)$ eines Residuums fähig ist.*

I. Eine Function $f(x)$ hat für jeden Werth x_1 von x ein Residuum, und zwar ein künstliches, so oft $f(x_1)$ nicht werthlos ist, mag $f(x_1+\varepsilon)$ normal nach ε entwickelbar sein, oder nicht. In diesem Falle ist nämlich $[(x-x_1)f(x)]_{x_1} = 0$, und hiermit nach §. 7. auch

$$\left[\frac{d^{m-1}(x-x_1)^m f(x)}{1.2\ldots.(m-1)dx^{m-1}}\right]_{x_1} = 0,$$

für jeden positiven ganzen Zahlenwerth von m.

II. Eine Function $f(x)$ hat ein auf $x = x_1$ sich beziehendes (künstliches) Residuum, wenn $f(x_1)$ allein dadurch werthlos wird, dafs in $f(x)$ positive Potenzen von Logarithmen vorkommen, deren Logarithmand für $x = x_1$ verschwindet. Es läfst sich nämlich in diesem Fall $f(x_1 + \varepsilon)$ nach §. 3. in eine Reihe verwandeln, die nach positiven Potenzen von $\log \varepsilon$ fortschreitet und deren Coëfficienten nach positiven Potenzen von ε entwickelbar sind. Demnach mufs $(x - x_1) f(x)$ für $x = x_1$, und somit auch der Ausdruck (*a.*) für $x = x_1$ verschwinden, wofern man nur stets $\log 1$ als seinen Hauptwerth ausdrückend sich vorstellt.

III. Soll $f(x)$ überhaupt eines zu $x = x_1$ gehörenden Residuums fähig sein, so mufs

1. $f(x)$ für $x = x_1$ reductibel sein, weil nach §. 1, 2. der Ausdruck (*a.*) keine Bedeutung haben kann, wenn $[(x - x_1)^m f(x)]_{x_1}$ werthlos ist. Dies tritt, aufser in den so eben in I. und II. bezeichneten Fällen, dem §. 3. zufolge, nur ein: erstlich, wenn $f(x_1)$ dadurch werthlos wird, dafs in $f(x)$ Potenzen in einfacher Form vorkommen, deren Dignanden für $x = x_1$ verschwinden und deren Exponenten negative ganze oder gebrochene Zahlen oder Functionen von x sind, die sich für $x = x_1$ auf negative Constanten reduciren; zweitens, wenn überdies solche Potenzen und Logarithmen in $f(x)$ enthalten sind, welche den Fällen I. und II. entsprechen; wofern nur dann die Logarithmen lediglich in einfacher Form vorhanden sind.

2. Mufs zufolge des §. 4. $\varepsilon^m f(x_1 + \varepsilon)$, bis zu dem mit ε^{m-1} multiplicirten Gliede hin, in seiner nach steigenden Potenzen von ε geordneten Entwicklung nur positive ganze Potenzen mit constanten Coëfficienten enthalten, d. h. es dürfen in der Entwicklung von $f(x_1 + \varepsilon)$, bis zu dem mit ε^{-1} multiplicirten Gliede hin, nur negative ganze Potenzen und constante Coëfficienten vorkommen.

Enthält $f(x)$ nur negative *ganze* Potenzen mit verschwindenden Dignanden, so sind diese Bedingungen erfüllt; also unter andern, wenn $f(x)$ eine gebrochene Function mit rationalem Nenner ist; auf welchen Fall allein der *Cauchy*sche Beweis der Formel (*a.*) pafst.

Enthält $f(x)$ eine negativ gebrochene Potenz mit verschwindendem Dignanden, und ist etwa $[(x - x_1)^a y]^n$ (wo y mit $x - x_1$ nicht zugleich verschwindend zu nehmen ist) diese Potenz, so geht, da dieselbe nur in einfacher Form vorkommen darf, die Gleichung (4. §. 2.) in

$$u + u_1 (x - x_1)^{an} + v_2 (x - x_1)^{2an} + \dots v_h (x - x_1)^{han}$$

über, und die geforderte Bedingung ist daher nur erfüllt, wenn han ein negativer echter Bruch ist. Um also im Voraus zu erkennen, ob ein Residuum in diesem Falle existirt, hat man nur, nachdem man die etwa vorkommenden, jene Potenzen enthaltenden, mit ganzen positiven Zahlen potenziirten Binome oder Polynome entwickelt sich vorgestellt hat, zu sehen, ob der höchste negative Exponent echt oder unecht gebrochen sei.

Liegt die Unmöglichkeit, $f(x_1+\varepsilon)$ normal zu entwickeln, darin, dafs $f(x)$ eine Potenz enthält, deren Dignand für $x=x_1$ verschwindet und deren Exponent für $x=x_1$ sich auf eine negative Constante reducirt, so hat man, wenn jene Potenz durch $[(x-x_1^a)y]^n$ vorgestellt wird und übrigens die Bezeichnungen des §. 2. beibehalten werden:

$$f(x) = u+v_1(x-x_1)^{an}+v_2(x-x_1)^{2an}+\ldots . v_h(x-x_1)^{han},$$
$$f'(x_1+\varepsilon) = (u)+(v_1)\varepsilon^{a(n)}+(v_2)\varepsilon^{2a(n)}+\ldots .(v_h)\varepsilon^{ha(n)},$$

und, wenn wiederum $a(n)=i+(s)$ gesetzt wird, wo (s) mit ε zugleich verschwindet,

$$f(x_1+\varepsilon) = (u)+(v_1)\varepsilon^i[1+(s)\log\varepsilon+\ldots .]+(v_2)\varepsilon^{2i}[1+(2s)\log\varepsilon+\ldots .]+\ldots$$
$$\ldots+(v_h)\varepsilon^{hi}[1+(hs)\log\varepsilon+\ldots .].$$

Ist nun $(s)=\varepsilon^\beta(s')$ und β so gewählt, dafs (s') für $\varepsilon=0$ weder verschwindet noch werthlos wird, so ist das mit $\varepsilon^{\beta+hi}$ multiplicirte Glied das erste, welches einen veränderlichen Coëfficienten erhält. Demnach mufs, wenn ein Residuum existiren soll, erstlich, $\beta+hi>-1$ sein; zweitens mufs i eine (negative) ganze Zahl, oder doch wenigstens hi eine (negative) echt gebrochene Zahl sein. Ist hi echt gebrochen, so ist, da β stets positiv ist, die erste Bedingung von selbst erfüllt. Der Werth von hi, von welchem hiernach das Vorhandensein eines Residuums abhängt, läfst sich sogleich aus der Function $f(x)$ herauslesen, da jene Potenz $[(x-x_1)^a y]^n$ nur in einfacher Form in $f(x)$ vorhanden ist.

Was endlich die in §. 2. III. 3, erwähnten Entwicklungen betrifft, so hat man für sie die Form

$$f(x) =$$
$$w(x-x_1)^{-a}+w_1(x-x_1)^{-a_1}\log(x-x_1)^n+w_2(x-x_1)^{-a_2}[\log(x-x_1)^h]^2+\ldots$$
$$\ldots+w_2(x-x_2)^{-a_h}[\log(x-x_1)^n]^h,$$

wo sich $(w)_{x_1+\varepsilon}$, $(w_1)_{x_1+\varepsilon}$, $(w_2)_{x_1+\varepsilon}$, ... nach positiven Potenzen von ε entwickeln lassen. Wird nun durch $\gamma-1$ der gröfste unter den numerischen Werthen von $-a$, $-a_1$, $-a_2$, ... vorgestellt, so hat $[(x-x_1)^m f(x)]_{x_1}$ für

jeden Werth von m, der gröfser als γ ist, eine Bedeutung, und es müssen folglich, da

$$f(x_1+\varepsilon) = (w)\varepsilon^{-\alpha} + (w_1)\varepsilon^{-\alpha_1}\log\varepsilon^n + (w_2)\varepsilon^{-\alpha_2}(\log\varepsilon^n)^2 + \ldots (w_h)\varepsilon^{-\alpha_h}(\log\varepsilon^n)^h$$

ist, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$ echte Brüche oder Null, und α mufs entweder eine ganze Zahl oder ein echter Bruch sein. Ist α eine ganze Zahl, so wird das Residuum ein natürliches: ist α ein echter Bruch, so wird dasselbe ein künstliches.

Anmerkung. Dafür, dafs nicht, wie *Cauchy* behauptet, jeder Wurzelwerth der Gleichung $\frac{1}{f(x)} = 0$ zu einem Residuum führt, so wie, dafs nicht allemal der Coëfficient von ε^{-1} in der Entwicklung von $f(x_1+\varepsilon)$ durch die Formel (1. §. 5.) vorgestellt werden kann, lassen sich nach dem Vorstehenden leicht Beispiele als Belege finden. Ist z. B. $f(x) = 7x + \frac{5}{x-2} + \frac{1+x}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{(x-2)^3}$, so gehört nach *Cauchy* auch zu dem Wurzelwerth 2 der Gleichung $\frac{1}{f(x)} = 0$ ein Residuum, für welches sich findet:

$$E\frac{f(x)(x-2)^3}{((x-2))^3} = \left(\frac{d^2[(x-2)^3 f(x)]}{2dx^2}\right)_{x_1} = \tfrac{1}{0}.$$

Es würde dasselbe also einerseits, in *Cauchy's* Sinne genommen, unendlich werden, während in der Erklärung (§. 5.) die Residuen als etwas unbedingt Endliches aufgestellt worden sind; und andrerseits giebt die directe Entwicklung

$$f(x_1+\varepsilon) = 2\varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-2} + 3\varepsilon^{-\frac{3}{2}} + 5\varepsilon^{-1} + 14 + 7\varepsilon$$

für den Coëfficienten von ε^{-1} den endlichen Werth 5.

Zu den Folgerungen, deren Unhaltbarkeit sich unmittelbar aus dem Vorstehenden ergiebt, gehört unter andern die in den *Exercices* I. pag. 21 ausgesprochene: dafs man aus jeder beliebigen Function $f(x)$, welche nicht für alle Werthe von x einen endlichen Werth hat, eine andere, welche für *jeden* Werth von x einen endlichen Werth behält, dadurch ableiten könne, dafs man die Summe der zu allen $f(x) = \infty$ machenden Werthen von x gehörigen Residuen (das von *Cauchy* sogenannte Integralresiduum) subtrahire.

Aus den Sätzen, welche, um allgemein gültig zu werden, einer Umänderung bedürfen, heben wir beispielsweise folgenden in den *Exercices* I. pag. 167 et seqq. behandelten wegen seiner häufigeren Anwendung heraus.

§. 10. Wird $f(z)$ für $z = z_1$ unendlich, und giebt es eine ganze Zahl m, für welche $(z-z_1)^m f(z) = 0$ wird, so ist auch

$$1. \quad E\frac{(z-z_1)f'(z)}{((z-z_1))} = 0.$$

Aus dem Obigen ist klar, dafs dieser Satz, wenn er richtig wäre, Anwendung müfste finden dürfen, so oft $f(z)$ für $z = z_1$ ein Residuum hat, da in diesem Fall stets ein Werth von m existirt, welcher $(z-z_1)^m f(z) = 0$ macht. Es ist derselbe aber, wenn $f(z)$ ein auf $z = z_1$ sich beziehendes Residuum hat, nur unter gewissen Umständen richtig, und nie richtig, wenn $f(z)$ kein Residuum für $z = z_1$ hat.

Um dies nachzuweisen, nehmen wir zuvörderst an, es enthalte $f(z)$ keinen Logarithmen, dessen Logarithmand, und keine Potenz mit veränderlichem Dignanden, deren Dignand für $z = z_1$ verschwindet.

Unter dieser Voraussetzung enthält die nach steigenden Potenzen von $z-z_1$ geordnete Entwicklung von $f(z)$ (da nach der Annahme $(z-z_1)^m f(z)$ für einen ganzen Zahlenwerth von m soll verschwinden können) nur positive, oder positive und negative Potenzen von $z-z_1$. Befinden sich nun unter diesen Potenzen negative gebrochene, so erhält man durch Differenziiren der dem $f(z)$ gleichen Reihe für $f'(z)$ eine nach Potenzen von $z-z_1$ fortschreitende Entwicklung, welche, da sich dabei die Exponenten um Eins verringern, jederzeit unecht gebrochene negative Exponenten enthalten mufs. Es hat demnach

$$E\frac{(z-z_1)f'(z)}{((z-z_1))}$$

keinen Werth (oder nach *Cauchy's* Vorstellungsweise einen unendlichen Werth), also nicht den Werth Null, so oft in $f(z)$ negative gebrochene Potenzen, deren Dignand für $z = z_1$ verschwindet, vorkommen, sei es, dafs dieselben echt gebrochen sind (und daher $f(z)$ eines Residuums für $z = z_1$ fähig ist), oder nicht.

Schliefst dagegen $f(z)$ nur positive Potenzen, oder, wenn darin auch negative Potenzen vorhanden sind, nur negative *ganze* Potenzen in sich, in denen der Dignand für $z = z_1$ verschwindet, so hat $f'(z)$ mit $f(z)$ zugleich ein Residuum. In diesem Falle sind auch die beiden Glieder auf der rechten Seite der identischen Gleichung

$$2. \quad f'(z) = \frac{\varphi'(z)}{(z-z_1)^m} - m\frac{\varphi(z)}{(z-z_1)^{m+1}},$$

in welcher der Kürze wegen $\varphi(z)$ für $(z-z_1)^m f(z)$ steht, eines auf $z = z_1$

sich beziehenden Residuums fähig. Denn einerseits hat der Quotient $\frac{\varphi(z)}{(z-z_1)^{m+1}}$, da er mit $\frac{f(z)}{z-z_1}$ identisch ist und $f(z)$ keine negative gebrochene Potenzen von $z-z_1$ in seiner Entwicklung enthalten soll, keine unecht gebrochene negative Potenzen von $z-z_1$ in seiner Entwicklung. Anderseits sind die Glieder der nach steigenden Potenzen von $z-z_1$ geordneten Entwicklung von $\varphi(z)$ von der Form $v(z-z_1)^r$, wo r stets positiv ist, und zwar entweder eine ganze Zahl, oder eine gebrochene Zahl $> m$. Die entsprechenden Glieder von $\frac{\varphi'(z)}{(z-z_1)^m}$ nehmen daher die Form

$$rv(z-z_1)^{r-m-1}+\frac{dv}{dx}(z-z_1)^{r-m}$$

an und geben folglich wiederum keine Glieder mit negativen, unecht gebrochenen Potenzen von $z-z_1$.

Diesem zufolge darf man aus der Gleichung (2.), gliederweise die auf $z=z_1$ sich beziehenden Residuen nehmend, folgende Gleichung ableiten:

$$\begin{aligned} E\,\frac{f'(z)(z-z_1)}{((z-z_1))} &= E\,\frac{\varphi'(z)}{((z-z_1))^m}-m\,E\,\frac{\varphi(z)}{((z-z_1))^{m+1}} \\ &= \frac{d^m\varphi(z)}{1.2\ldots.(m-1)\,dx^m}-m\,\frac{d^m\varphi(z)}{1.2\ldots.m\,dz^m}=0. \end{aligned}$$

Der obige Satz ist demnach unter der gemachten Voraussetzung nur richtig, wenn in $f(z)$ keine negativen gebrochenen Potenzen vorkommen, deren Dignand für $z=z_1$ verschwindet.

Enthält dagegen $f(z)$ noch Logarithmen, in denen der Logarithmand für $z=z_1$ verschwindet, oder Potenzen mit veränderlichen Exponenten, in denen der Dignand für $z=z_1$ der Null gleich wird, so läfst sich, da $[(z-z_1)^m f(z)]_{z_1}$ soll verschwinden können, $f(z)$ auf folgende Form bringen:

$$f(z)=v(z-z_1)^n+v_1(z-z_1)^s[\log(z-z_1)^\alpha]^\gamma+\ldots.;$$

wo die etwa noch folgenden Glieder die Form des zweiten Gliedes haben und wo v, v_1, ... für $z=z_1$ weder verschwinden, noch werthlos werden; wo ferner α und γ positiv, und endlich n und s reell sind. Soll dabei $f(z)$ ein auf $z=z_1$ sich beziehendes Residuum haben, so darf überdies n nicht eine negative unecht gebrochene Zahl und s nicht gleich -1 oder kleiner als -1 sein. Bezeichnet man nun $\log(z-z_1)^\alpha$ durch u, so ist

$$\begin{aligned} 4.\quad f'(z) = \frac{d[v(z-z_1)^n]}{dz}+\frac{dv_1}{dz}(z-z_1)^s u^\gamma+sv_1(z-z_1)^{s-1}u^\gamma \\ +\alpha\gamma v_1(z-z_1)^{s-1}u^{\gamma-1}+\text{ etc.} \end{aligned}$$

Demnach existirt ein Residuum von $f'(z)$ nur dann, wenn n nicht negativ gebrochen ist, und wenn s gleich Null oder positiv, und $\gamma \overline{\overline{>}} 1$ ist, mithin nie, wenn nicht auch $f(z)$ ein Residuum hat; im entgegengesetzten Falle nur unter gewissen Beschränkungen. Es ist nämlich, nach dem Vorigen, insofern n keine negative gebrochene Zahl vorstellen darf,

$$E\frac{d[v(z-z_1)^n]}{((z-z_1))\,dz} = 0;$$

ferner sind

$$E\frac{dv_1}{dz}\cdot\frac{(z-z_1)^{s+1}u^\gamma}{((z-z_1))} \quad \text{und} \quad E\frac{s\,v_1(z-z_1)^s u^\gamma}{((z-z_1))},$$

als künstliche Residuen, gleich der Null, und mithin erhält man, auf jeder Seite der Gleichung (4.) die Residuen nehmend:

$$E\frac{f'(z)(z-z_1)}{((z-z_1))} = \alpha\gamma E\frac{v_1(z-z_1)^s u^{\gamma-1}}{((z-z_1))}.$$

Ist daher $\gamma > 1$, so verschwindet auch das Residuum der rechten Seite, als künstliches Residuum, und es findet sich der Lehrsatz für diesen Fall bestätigt. Ist aber $\gamma = 1$, so wird

$$E\frac{f'(z)(z-z_1)}{((z-z_1))} = \alpha E\frac{v_1(z-z_1)^s}{((z-z_1))},$$

und mithin im Allgemeinen *nicht* gleich Null, nämlich gleich $\alpha(v_1)_{z_1}$, wenn gleichzeitig $s = 0$ ist.

Bei logarithmischen Functionen hat also $f'(z)$ nur dann ein Residuum, wenn der Exponent des Logarithmen $\overline{\overline{>}} 1$ ist und der Coëfficient desselben für $z = z_1$ nicht werthlos wird; und sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das Residuum, gleichfalls im Widerspruch mit dem Lehrsatze, von Null verschieden, wenn jener Exponent gleich Eins ist und der Coëfficient für $z = z_1$ nicht verschwindet.

Was den Fall betrifft, in welchem $f(z)$ Potenzen mit veränderlichen Exponenten enthält, so mufs, wenn der Exponent durch $m + (z-z_1)^\beta q$ vorgestellt wird (wo β so anzunehmen ist, dafs q für $z = z_1$ weder verschwindet noch werthlos wird), $\beta > m - 1$ sein, wenn $f'(z)$ ein Residuum haben soll; es wird dasselbe aber, wenn es existirt, stets der Null gleich, weil alsdann in $f(z)$ höhere Potenzen in $\log(z-z_1)$ eingehen.

Dafs es einen Fall giebt, in welchem $f'(z)$ ein von Null verschiedenes Residuum hat, ist *Cauchy* bekannt gewesen, da er gleich darauf (a. a. O. S. 169) die Abhängigkeit der Existenz solcher von Null verschiedener Residuen von Logarithmen, die in $f(z)$ vorkommen, nachweiset; und

in der That glaubt er diesen Fall durch die Bemerkung: „es müsse $[(z-z_1)^m f(z)]_{z_1}$ für einen ganzen Zahlenwerth von m verschwinden können" oder durch die Bemerkung (in die er jene nachher S. 169 umändert): „es müsse $[(z-z_1)^m f(z)]_{z_1}$ für einen ganzen Zahlenwerth von m endlich und von Null verschieden werden können" ausgeschlossen zu haben.

Allein es ist nie, wie *Cauchy* hiernach offenbar annimmt, $(z-z_1)^m \log(z-z_1)$ für $z=z_1$ unendlich, so dafs jene Bemerkungen den beabsichtigten Ausschlufs nicht bewirken.

18.

Ueber die Summirung der Reihen von der Form $A\varphi(0)$, $A_1\varphi(1)x$, $A_2\varphi(2)x^2$, ... $A_n\varphi(n)x^n$, ..., wo A eine beliebige constante Gröfse, A_n eine beliebige und $\varphi(n)$ eine ganze rationale algebraische Function der positiven ganzen Zahl n bezeichnet.

(Von dem Herrn Prof. *Grunert* in Greifswalde.)

---

§. 1.

Wenn die Reihe

$$t,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots.\ t_n,\ \ldots.,$$

deren Glieder Functionen von x und, so wie (wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes bemerkt wird) alle im Folgenden vorkommenden Gröfsen reelle Gröfsen sein sollen, für jedes x, welches gröfser als a und kleiner als b ist, wobei natürlich a kleiner als b angenommen wird, convergirt, und die Summe s hat, so soll dies im Folgenden, wo es die Deutlichkeit fordert, durch

$$s = t + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_n + \ldots.\quad \{a < x < b\}$$

bezeichnet werden.

Dafs die Gleichung

$$s = t + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_n + \ldots.$$

für jedes x, welches gröfser als a und kleiner als b ist, und aufserdem auch noch für $x = a$ gilt, soll im Folgenden durch

$$s = t + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_n + \ldots.\quad \{a = x < b\}$$

bezeichnet werden.

Dafs die Gleichung

$$s = t + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_n + \ldots.$$

für jedes x, welches gröfser als a und kleiner als b ist, und aufserdem auch noch für $x = b$ gilt, soll auf ähnliche Art durch

$$s = t + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_n + \ldots.\quad \{a < x = b\}$$

bezeichnet werden.

Gilt endlich die Gleichung

$$s = t + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n + \ldots$$

für jedes x, welches gröfser als a und kleiner als b ist, und aufserdem auch noch für $x = a$ und $x = b$, so soll dies durch

$$s = t + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n + \ldots \; \{a = x = b\}$$

bezeichnet werden.

§. 2.

Lehrsatz. *Wenn, vorausgesetzt, dafs a kleiner als b ist, die Reihe A, $A_1 x$, $A_2 x^2$, $A_3 x^3$, ... $A_n x^n$ .... für jedes x von $x = a$ bis $x = b$ convergirt und für jeden dieser Werthe von x die Summe $f(x)$ hat, d. h. wenn*

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots \; \{a = x = b\}$$

ist, so convergirt für dieselben Werthe von x auch jederzeit die Reihe

$$A_1, \; 2A_2 x, \; 3A_3 x^2, \; 4A_4 x^3, \; \ldots \; nA_n x^{n-1}, \; \ldots,$$

und für jeden der in der Reihe stehenden Werthe von x ist $f'(x)$ die Summe dieser Reihe; wo $f'(x)$ wie gewöhnlich den ersten Differential-quotienten oder die erste derivirte Function von $f(x)$ bezeichnet; oder es ist unter den gemachten Voraussetzungen immer

$$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots \; \{a = x = b\}.$$

Beweis. I. Für $x = a$ ist nach der Voraussetzung

$$f(a) = A + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \ldots + A_n a^n + \ldots$$

Ferner ist, wenn i eine unendlich kleine positive Gröfse bezeichnet, nach der Voraussetzung, da $a + i$ zwischen a und b liegt,

$$f(a+i) = A + A_1(a+i) + A_2(a+i)^2 + \ldots + A_n(a+i)^n + \ldots$$

Also ist

$$\frac{f(a+i) - f(a)}{i} = A_1 \frac{(a+i) - a}{i} + A_2 \frac{(a+i)^2 - a^2}{i} + A_3 \frac{(a+i)^3 - a^3}{i} + \ldots$$

$$\ldots + A_n \frac{(a+i)^n - a^n}{i} + \ldots$$

Nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung, wegen dessen uns hier auf *Cauchy, Leçons sur le calcul différentiel. Paris 1829. p. 36.* zu verweisen erlaubt sein mag, ist aber, wenn ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet:

$$f(a+i) = f(a) + i f'(a + \varrho i),$$

oder

$$\frac{f(a+i) - f(a)}{i} = f'(a + \varrho i);$$

und auf ganz ähnliche Art ist, wenn

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots\ldots \varrho_n, \ldots\ldots$$

positive echte Brüche bezeichnen,

$$\begin{aligned}
a+i &= a+i(a+\varrho_1 i)^0,\\
(a+i)^2 &= a^2+2i(a+\varrho_2 i)^1,\\
(a+i)^3 &= a^3+3i(a+\varrho_3 i)^2,\\
(a+i)^4 &= a^4+4i(a+\varrho_4 i)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a+i)^n &= a^n+ni(a+\varrho_n i)^{n-1}
\end{aligned}$$

u. s. w.

oder

$$\begin{aligned}
\frac{(a+i)-a}{i} &= (a+\varrho_1 i)^0,\\
\frac{(a+i)^2-a^2}{i} &= 2(a+\varrho_2 i)^1,\\
\frac{(a+i)^3-a^3}{i} &= 3(a+\varrho_3 i)^2,\\
\frac{(a+i^4)-a^4}{i} &= 4(a+\varrho_4 i)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{(a+i)^n-a^n}{i} &= n(a+\varrho_n i)^{n-1}
\end{aligned}$$

u. s. w.

Folglich ist nach dem Obigen

$$f'(a+\varrho i) = A_1(a+\varrho_1 i)^0+2A_2(a+\varrho_2 i)^1+3A_3(a+\varrho_3 i)^2+4A_4(a+\varrho_4 i)^3+\ldots$$
$$\ldots+nA_n(a+\varrho_n i)^{n-1}+\ldots\ldots;$$

und diese Gleichung gilt, wie nahe man auch i bei Null annehmen mag. Daher gilt dieselbe offenbar auch für die Grenzen, denen sich die Gröſsen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nähern, wenn man i sich der Null nähern läſst. Da aber

$$\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots\ldots \varrho_n, \ldots\ldots$$

positive echte Brüche sind, so nähern sich die Gröſsen

$$f'(a+\varrho i),\ (a+\varrho_1 i)^0,\ (a+\varrho_2 i)^1,\ (a+\varrho_3 i)^2,\ (a+\varrho_4 i)^3,\ \ldots\ldots,$$

wenn i sich der Null nähert, offenbar respective den Grenzen

$$f'(a),\ a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots$$

und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur i nahe genug bei Null nimmt. Also ist nach dem Vorhergehenden

$$f'(a) = A_1+2A_2 a+3A_3 a^2+4A_4 a^3+\ldots\ldots+nA_n a^{n-1}+\ldots\ldots$$

II. Für $x = b$ ist nach der Voraussetzung

$$f(b) = A + A_1 b + A_2 b^2 + A_3 b^3 + \ldots + A_n b^n + \ldots$$

Ferner ist, wenn i wieder eine unendlich kleine positive Gröfse bezeichnet, nach der Voraussetzung, da $b-i$ zwischen a und b liegt,

$$f(b-i) = A + A_1(b-i) + A_2(b-i)^2 + \ldots A_n(b-i)^n + \ldots$$

und folglich

$$\frac{f(b-i)-f(b)}{i} = A_1\frac{(b-i)-b}{i} + A_2\frac{(b-i)^2-b^2}{i} + A_3\frac{(b-i)^3-b^3}{i} + \ldots$$

$$\ldots + A_n\frac{(b-i)^n-b^n}{i} + \ldots$$

Nach dem schon oben angewandten Satze aus der Differentialrechnung ist aber, wenn

$$\varrho,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ \varrho_n,\ \ldots$$

wieder positive echte Brüche bezeichnen:

$$f(b-i) = f(b) - if'(b-\varrho i)$$

und

$$b-i = b - i(b-\varrho_1 i)^0,$$
$$(b-i)^2 = b^2 - 2i(b-\varrho_2 i)^1,$$
$$(b-i)^3 = b^3 - 3i(b-\varrho_3 i)^2,$$
$$(b-i)^4 = b^4 - 4i(b-\varrho_4 i)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(b-i)^n = b^n - ni(b-\varrho_n i)^{n-1}$$

u. s. w.

oder

$$\frac{f(b-i)-f(b)}{i} = -f'(b-\varrho i),$$

und

$$\frac{(b-i)-b}{i} = -(b-\varrho_1 i)^0,$$
$$\frac{(b-i)^2-b^2}{i} = -2(b-\varrho_2 i)^1,$$
$$\frac{(b-i)^3-b^3}{i} = -3(b-\varrho_3 i)^2,$$
$$\frac{(b-i)^4-b^4}{i} = -4(b-\varrho_4 i)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(b-i)^n-b^n}{i} = -n(b-\varrho_n i)^{n-1}$$

u. s. w.

Also ist, nach der oben gefundenen Gleichung, wenn man zugleich auf beiden Seiten derselben mit -1 multiplicirt, oder die Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt,

$$f'(b-\varrho i) = A_1(b-\varrho_1 i)^0 + 2A_2(b-\varrho_2 i)^1 + 3A_3(b-\varrho_3 i)^2 + 4A_4(b-\varrho_4 i)^3 + \ldots$$
$$\ldots + nA_n(b-\varrho_n i)^{n-1} + \ldots$$

für jedes noch so kleine i, und folglich, wenn man, indem man sich nämlich i der Null nähern läfst, auf beiden Seiten dieser Gleichung die Grenzen nimmt,

$$f'(b) = A_1 + 2A_2 b + 3A_3 b^2 + 4A_4 b^3 + \ldots + nA_n b^{n-1} + \ldots$$

III. Wenn ξ ein beliebiger, zwischen a und b liegender Werth von x ist, so ist nach der Voraussetzung

$$f(\xi) = A + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \ldots + A_n\xi^n + \ldots,$$

und auch

$$f(\xi\pm i) = A + A_1(\xi\pm i) + A_2(\xi\pm i)^2 + \ldots + A_n(\xi\pm i)^n + \ldots$$

Also ist

$$\frac{f(\xi\pm i)-f(\xi)}{i} = A_1\frac{(\xi\pm i)-\xi}{i} + A_2\frac{(\xi\pm i)^2-\xi^2}{i} + A_3\frac{(\xi\pm i)^3-\xi^3}{i} + \ldots$$
$$\ldots + A_n\frac{(\xi\pm i)^n-\xi^n}{i} + \ldots$$

Bezeichnen aber wieder

$$\varrho,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4,\ \ldots\ \varrho_n,\ \ldots$$

positive echte Brüche, so ist, auf ganz ähnliche Art wie oben,

$$f(\xi\pm i) = f(\xi) \pm if'(\xi\pm\varrho i),$$

und

$$\xi\pm i = \xi \pm i(\xi\pm\varrho_1 i)^0,$$
$$(\xi\pm i)^2 = \xi^2 \pm 2i(\xi\pm\varrho_2 i)^1,$$
$$(\xi\pm i)^3 = \xi^3 \pm 3i(\xi\pm\varrho_3 i)^2,$$
$$(\xi\pm i)^4 = \xi^4 \pm 4i(\xi\pm\varrho_4 i)^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\xi\pm i)^n = \xi^n \pm ni(\xi\pm\varrho_n i)^{n-1}$$

u. s. w.

oder

$$\frac{f(\xi\pm i)-f(\xi)}{i} = \pm f'(\xi\pm\varrho i),$$

und

$$\frac{(\xi\pm i)-\xi}{i} = \pm(\xi\pm\varrho_1 i)^0,$$
$$\frac{(\xi\pm i)^2-\xi^2}{i} = \pm 2(\xi\pm\varrho_2 i)^1,$$

$$\frac{(\xi \pm i)^3 - \xi^3}{i} = \pm 3(\xi \pm \varrho_3 i)^2,$$
$$\frac{(\xi \pm i)^4 - \xi^4}{i} = \pm 4(\xi \pm \varrho_4 i)^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(\xi \pm i)^n - \xi^n}{i} = \pm n(\xi \pm \varrho_n i)^{n-1}$$

u. s. w.

Folglich ist

$$\pm f'(\xi \pm \varrho i) = \pm A_1(\xi \pm \varrho_1 i)^0 \pm 2A_2(\xi \pm \varrho_2 i)^1 \pm 3A_3(\xi \pm \varrho_3 i)^2 \pm 4A_4(\xi \pm \varrho_4 i) \pm \ldots$$
$$\ldots \pm nA_n(\xi \pm \varrho_n i)^{n-1} \pm \ldots$$

oder

$$f'(\xi \pm \varrho i) = A_1(\xi \pm \varrho_1 i)^0 + 2A_2(\xi \pm \varrho_2 i)^1 + 3A_3(\xi \pm \varrho_3 i)^2 + 4A_4(\xi \pm \varrho_4 i)^3 + \ldots$$
$$\ldots + nA_n(\xi \pm \varrho_4 i)^{n-1} \pm \ldots,$$

für jedes noch so kleine i.

Geht man nun, indem man i sich der Null nähern läfst, wieder zu den Grenzen über, so erhält man

$$f'(\xi) = A_1 + 2A_2\xi + 3A_3\xi^2 + 4A_4\xi^3 + \ldots + nA_n\xi^{n-1} + \ldots$$

IV. Aus I., II. und III. folgt, dafs

$$f(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots + nA_nx^{n-1} + \ldots \{a = x = b\}$$

ist; was bewiesen werden sollte.

§. 3.

Zusätze. I. *Wenn*

$$f(x) = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots \{a = x < b\}$$

ist, so ist

$$f'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots + nA_nx^{n-1} + \ldots \{a = x < b\}$$

II. *Wenn*

$$f(x) = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots \{a < x = b\}$$

ist, so ist

$$f'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots + nA_nx^{n-1} + \ldots \{a < x = b\}.$$

III. *Wenn*

$$f(x) = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots \{a < x < b\}$$

ist, so ist

$$f'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots + nA_nx^{n-1} + \ldots \{a < x < b\}.$$

Diese drei Sätze ergeben sich unmittelbar aus dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze und sind, ebenso wie dieser Satz, sowohl

für das Folgende, als auch für die strenge Theorie der Reihen überhaupt wichtig.

§. 4.

Wir wollen jetzt annehmen, dafs für jedes x zwischen zwei bestimmten Grenzen, die wir jedoch der Kürze wegen nicht wirklich angeben oder durch besondere Symbole bezeichnen wollen,

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

sei, so ist nach §. 2. und 3., für jedes x zwischen denselben Grenzen,

$$\frac{1}{\partial x}\partial f(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots$$

und folglich

$$\frac{x}{\partial x}\partial f(x) = A_1 x + 2A_2 x^2 + 3A_3 x^3 + \ldots + nA_n x^n + \ldots$$

Also ist ferner nach §. 2. und 3. für jedes x zwischen denselben Grenzen

$$\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{x}{\partial x}\partial f(x)\right) = A_1 + 2^2 A_2 x + 3^2 A_3 x^2 + \ldots + n^2 A_n x^{n-1} + \ldots$$

und folglich

$$\frac{x}{\partial x}\partial\left(\frac{x}{\partial x}\partial f(x)\right) = A_1 x + 2^2 A_2 x^2 + 3^2 A_3 x^3 + \ldots + n^2 A_n x^n + \ldots$$

Also ist wieder nach §. 2. und 3. für jedes x zwischen denselben Grenzen

$$\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{x}{\partial x}\partial\left(\frac{x}{\partial x}\partial f(x)\right)\right) = A_1 + 2^3 A_2 x + 3^3 A_3 x^2 + \ldots + n^3 A_n x^{n-1} + \ldots,$$

und folglich

$$\frac{x}{\partial x}\partial\left(\frac{x}{\partial x}\partial\left(\frac{x}{\partial x}\partial f(x)\right)\right) = A_1 x + 2^3 A_2 x^2 + 3^3 A_3 x^3 + \ldots + n^3 A_n x^n + \ldots$$

Wie man auf diese Art weiter gehen könne, erhellet hier schon deutlich genug, und wir werden durch das Vorhergehende unmittelbar auf folgendes Theorem geführt:

Wenn für jedes x zwischen zwei bestimmten Grenzen,

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

ist, so ist für jedes x zwischen denselben Grenzen,

$$A + \frac{x}{\partial x}\overset{k}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{k-1}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{k-2}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\ldots\ldots\overset{2}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{1}{\partial} f(x)\right)\right)\right)\ldots\right)$$
$$= A + 1^k A_1 x + 2^k A_2 x^2 + 3^k A_3 x^3 + \ldots + n^k A_n x^n + \ldots;$$

wo die Anzahl der Differentiationen in dem Ausdrucke auf der linken Seite des Gleichheitszeichens durch erhöht geschriebene Indices bezeichnet worden ist.

§. 3.

Zunächst wollten wir uns nun mit der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{x}{\partial x}\overset{k}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k-1}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k-2}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\;\ldots\ldots\;\overset{2}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{1}{\partial}f(x)\Big)\Big)\Big)\ldots\Big)$$

beschäftigen.

Durch Differentiation erhält man, wenn man der Kürze wegen die Differentialquotienten oder derivirten Functionen von $f(x)$ nach *Lagrange* bezeichnet, ohne Schwierigkeit:

$$\frac{x}{\partial x}\partial f(x) = xf'(x),$$

$$\frac{x}{\partial x}\partial\Big(\frac{x}{\partial x}\partial f(x)\Big) = xf'(x) + x^2 f''(x),$$

$$\frac{x}{\partial x}\partial\Big(\frac{x}{\partial x}\partial\Big(\frac{x}{\partial x}\partial f(x)\Big)\Big) = xf'(x) + 3x^2 f''(x) + x^3 f'''(x),$$

$$\frac{x}{\partial x}\partial\Big(\frac{x}{\partial x}\partial\Big(\frac{x}{\partial x}\partial\Big(\frac{x}{\partial x}\partial f(x)\Big)\Big)\Big) = xf'(x) + 7x^2 f''(x) + 6x^3 f'''(x) + x^4 f^{\mathrm{IV}}(x)$$

u. s. w.

und schliefst hieraus leicht, dafs, indem

$$\overset{k}{C}_1,\quad \overset{k}{C}_2,\quad \overset{k}{C}_3,\quad \overset{k}{C}_4,\quad \ldots\ldots\quad \overset{k}{C}_k$$

gewisse von x unabhängige Coëfficienten bezeichnen, allgemein

$$\frac{x}{\partial x}\overset{k}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k-1}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k-2}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\;\ldots\ldots\;\overset{2}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{1}{\partial}f(x)\Big)\Big)\Big)\ldots\Big)$$

$$= \overset{k}{C}_1 xf'(x) + \overset{k}{C}_2 x^2 f''(x) + \overset{k}{C}_3 x^3 f'''(x) + \ldots\ldots \overset{k}{C}_k x^k f^{(k)}(x) \quad \text{ist.}$$

Um dieses Gesetz allgemein zu beweisen und zugleich recurrirende Ausdrücke zur Bestimmung der von x unabhängigen Coëfficienten zu finden, wollen wir die vorstehende Gleichung nochmals differentiiren. Dadurch erhalten wir

$$\frac{x}{\partial x}\overset{k+1}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k-1}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k-2}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\;\ldots\ldots\;\overset{2}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{1}{\partial}f(x)\Big)\Big)\Big)\Big)\ldots\Big)$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \overset{k}{C}_1 xf'(x) \\
& + (\overset{k}{C}_1 + 2\overset{k}{C}_2)\, x^2 f''(x) \\
& + (\overset{k}{C}_2 + 3\overset{k}{C}_3)\, x^3 f'''(x) \\
& + (\overset{k}{C}_3 + 4\overset{k}{C}_4)\, x^4 f^{\mathrm{IV}}(x) \\
& \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& + (\overset{k}{C}_{k-1} + k\overset{k}{C}_k)\, x^k f^{(k)}(x) \\
& + \qquad \overset{k}{C}_k x^{k+1} f^{(k+1)}(x).
\end{aligned}$$

Also ist, wenn wir

$$\begin{aligned}
\overset{k}{C}_1 &= \overset{k+1}{C}_1,\\
\overset{k}{C}_1 + 2\overset{k}{C}_2 &= \overset{k+1}{C}_2,\\
\overset{k}{C}_2 + 3\overset{k}{C}_3 &= \overset{k+1}{C}_3,\\
\overset{k}{C}_3 + 4\overset{k}{C}_4 &= \overset{k+1}{C}_4,\\
\cdots &\cdots\\
\overset{k}{C}_{k-1} + k\overset{k}{C}_k &= \overset{k+1}{C}_k,\\
\overset{k}{C}_k &= \overset{k+1}{C}_{k+1}
\end{aligned}$$

setzen,

$$\frac{x}{\partial x}\overset{k+1}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k-1}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{k-2}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\;\ldots\;\overset{2}{\partial}\Big(\frac{x}{\partial x}\overset{1}{\partial}f(x)\Big)\Big)\Big)\Big)\ldots\Big)$$

$$= \overset{k+1}{C}_1 x f'(x) + \overset{k+1}{C}_2 x^2 f''(x) + \overset{k+1}{C}_3 x^3 f'''(x) + \ldots + \overset{k+1}{C}_{k+1} x^{k+1} f^{(k+1)}(x),$$

und hierdurch folglich nicht blofs die Allgemeinheit des oben bemerkten Gesetzes bewiesen, sondern auch zugleich eine recurrirende Bestimmungsmethode der von x unabhängigen Coëfficienten gefunden. Man könnte nach dieser Methode leicht eine Tafel der in Rede stehenden Coëfficienten berechnen *); für jetzt genügt es, den Beweis geliefert zu haben, dafs diese Coëfficienten immer als bekannte Gröfsen betrachtet werden können.

§. 6.

Das in §. 4. bewiesene, für alles Folgende wichtige Theorem läfst sich nun auch auf folgenden Ausdruck bringen.

Wenn für jedes x zwischen zwei bestimmten Grenzen

$$f(x) = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots$$

ist, so ist für jedes x zwischen denselben Grenzen

$$A + \overset{k}{C}_1 x f'(x) + \overset{k}{C}_2 x^2 f''(x) + \overset{k}{C}_3 x^3 f'''(x) + \ldots + \overset{k}{C}_k x^k f^{(k)}(x)$$
$$= A + 1^k A_1 x + 2^k A_2 x^2 + 3^k A_3 x^3 + \ldots + n^k A_n x^n + \ldots;$$

wobei wir die von x unabhängigen Coëfficienten

$$\overset{k}{C}_1,\ \overset{k}{C}_2,\ \overset{k}{C}_3,\ \overset{k}{C}_4,\ \ldots\ \overset{k}{C}_k$$

nach §. 5. als bekannt vorauszusetzen berechtigt sind.

§. 7.

Es läfst sich der vorhergehende Satz auch noch auf einen andern merkwürdigen Ausdruck bringen.

---

*) Den Anfang einer solchen Tafel findet man am Ende dieser Abhandlung.

Setzen wir nämlich, indem e, wie gewöhnlich, die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bezeichnet:

$$xe^u = \theta,$$

und differentiiren, x als constant betrachtend, θ nach u als veränderliche Gröfse, so erhalten wir

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = xe^u = \theta.$$

Also ist, wenn wir die derivirte Function $f^{(k)}(\theta)$, wo θ als unabhängige veränderliche Gröfse betrachtet worden ist, nach u differentiiren,

$$\frac{\partial f^{(k)}(\theta)}{\partial u} = \frac{\partial f^{(k)}(\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial u} = \theta f^{(k+1)}(\theta).$$

Dies vorausgesetzt, erhalten wir ohne Schwierigkeit durch successive Differentiation:

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial u} = \theta f'(\theta),$$

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial u^2} = \theta f'(\theta) + \theta^2 f''(\theta),$$

$$\frac{\partial^3 f(\theta)}{\partial u^3} = \theta f'(\theta) + 3\theta^2 f''(\theta) + \theta^3 f'''(\theta),$$

$$\frac{\partial^4 f(\theta)}{\partial u^4} = \theta f'(\theta) + 7\theta^2 f''(\theta) + 6\theta^3 f'''(\theta) + \theta^4 f^{\text{IV}}(\theta),$$

u. s. w.

und schliefsen hieraus, die in §. 5. gegebene Entwicklung vergleichend, sehr leicht, dafs allgemein

$$\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k} = \overset{k}{C}_1 \theta f'(\theta) + \overset{k}{C}_2 \theta^2 f''(\theta) + \overset{k}{C}_3 \theta^3 f'''(\theta) + \ldots + \overset{k}{C}_k \theta^k f^{(k)}(\theta) \text{ ist.}$$

Für $u = 0$ wird $\theta = x$. Bezeichnen wir also den Werth, welchen der Differentialquotient

$$\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}$$

erhält, wenn man $u = 0$ setzt, durch

$$\left\{\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}\right\},$$

so ist offenbar

$$\left\{\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}\right\} = \overset{k}{C}_1 x f'(x) + \overset{k}{C}_2 x^2 f''(x) + \overset{k}{C}_3 x^3 f'''(x) + \ldots + \overset{k}{C}_k x^k f^{(k)}(x),$$

und folglich nach §. 5.

$$\left\{\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}\right\} = \frac{x}{\partial x}\overset{k}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{k-1}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{k-2}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\ldots\overset{2}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{1}{\partial} f(x)\right)\right)\right)\ldots\right),$$

oder auch, wenn man für θ seinen obigen Werth setzt,

$$\left\{\frac{\partial^k f(xe^u)}{\partial u^k}\right\} = \frac{x}{\partial x}\overset{k}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{k-1}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{k-2}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\;\ldots.\;\overset{2}{\partial}\left(\frac{x}{\partial x}\overset{1}{\partial}f(x)\right)\right)\right)\ldots.\right),$$

und das Theorem in §. 6. läßt sich auf folgenden merkwürdigen Ausdruck bringen.

Wenn für jedes x zwischen zwei bestimmten Grenzen

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots. + A_n x^n + \ldots.$$

ist, so ist für jedes x zwischen denselben Grenzen

$$A + \left\{\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}\right\} = A + 1^k A_1 x + 2^k A_2 x^2 + 3^k A_3 x^3 + \ldots. + n^k A_n x^n + \ldots.,$$

oder

$$A + \left\{\frac{\partial^k f(xe^u)}{\partial u^k}\right\} = A + 1^k A_1 x + 2^k A_2 x^2 + 3^k A_3 x^3 + \ldots. + n^k A_n x^n + \ldots.$$

Bei der Entwicklung von

$$\left\{\frac{\partial^k f(xe^u)}{\partial u^k}\right\}$$

wird bei der Differentiation nur u als variabel, x als constant betrachtet, und nach der Differentiation wird $u = 0$ gesetzt.

§. 8.

Zunächst handelt es sich nun um die weitere Entwicklung des Bildungsgesetzes der numerischen Coëfficienten in den im Vorhergehenden bewiesenen Gleichungen.

Zu dem Ende wollen wir

$$f(x) = e^x, \text{ also } f(\theta) = e^\theta$$

setzen, wo immer

$$\theta = xe^u$$

ist, so ist

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \quad \ldots. \quad f^{(k)}(x) = e^x,$$

und folglich nach §. 7.

$$\left\{\frac{\partial^k . e^\theta}{\partial u^k}\right\} = xe^x\{\overset{k}{C}_1 + \overset{k}{C}_2 x + \overset{k}{C}_3 x^2 + \overset{k}{C}_4 x^3 + \ldots. + \overset{k}{C}_k x^{k-1}\}.$$

Da nun aber

$$\frac{\partial . e^\theta}{\partial u} = \frac{\partial . e^\theta}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u} = xe^u e^\theta$$

ist, so ist, wenn wir, nach einer zuerst von Bessel gebrauchten Bezeichnung, für $n > 0$ überhaupt

$$\frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2.3\ldots.n} = P^m_n,$$

für $n = 0$ aber immer, was auch m sein mag,

$$1 = P^0_m$$

setzen, nach einem bekannten, gewöhnlich nach *Leibnitz* benannten Satze aus der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial^{k+1}.e^\theta}{\partial u^{k+1}} = x\Big\{P^0_k \frac{\partial^k.e^u}{\partial u^k}e^\theta + P^1_k \frac{\partial^{k-1}.e^u}{\partial u^{k-1}}.\frac{\partial.e^\theta}{\partial u} + P^2_k \frac{\partial^{k-2}.e^u}{\partial u^{k-2}}.\frac{\partial^2.e^\theta}{\partial u^2} + \ldots$$

$$\ldots + P^{k-1}_k \frac{\partial.e^u}{\partial u}.\frac{\partial^{k-1}.e^\theta}{\partial u^{k-1}} + P^k_k e^u \frac{\partial^k.e^\theta}{\partial u^k}\Big\}$$

$$= x e^u\Big\{P^0_k e^\theta + P^1_k \frac{\partial.e^\theta}{\partial u} + P^2_k \frac{\partial^2.e^\theta}{\partial u^2} + \ldots + P^k_k \frac{\partial^k.e^\theta}{\partial u^k}\Big\},$$

und folglich, wenn man $u = 0$ setzt,

$$x^{-1}\Big\{\frac{\partial^{k+1}.e^\theta}{\partial u^{k+1}}\Big\} = P^0_k e^x + P^1_k\Big\{\frac{\partial.e^\theta}{\partial u}\Big\} + P^2_k\Big\{\frac{\partial^2.e^\theta}{\partial u^2}\Big\} + \ldots + P^k_k\Big\{\frac{\partial^k.e^\theta}{\partial u^k}\Big\}.$$

Setzt man nun für

$$\Big\{\frac{\partial.e^\theta}{\partial u}\Big\},\quad \Big\{\frac{\partial^2.e^\theta}{\partial u^2}\Big\},\quad \Big\{\frac{\partial^3.e^\theta}{\partial u^3}\Big\},\quad \ldots\quad \Big\{\frac{\partial^{k+1}.e^\theta}{\partial u^{k+1}}\Big\}$$

die aus dem Obigen sich ergebenden Ausdrücke dieser Gröfsen, so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
& x e^x\{\overset{k+1}{C}_1 + \overset{k+1}{C}_2 x + \overset{k+1}{C}_3 x^2 + \overset{k+1}{C}_4 x^3 + \ldots + \overset{k+1}{C}_{k+1} x^k\} \\
= {} & x e^x P^0_k \\
& + x^2 e^x P^1_k \overset{1}{C}_1 \\
& + x^2 e^x P^2_k \{\overset{2}{C}_1 + \overset{2}{C}_2 x\} \\
& + x^2 e^x P^3_k \{\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_2 x + \overset{3}{C}_3 x^2\} \\
& + x^2 e^x P^4_k \{\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_2 x + \overset{4}{C}_3 x^2 + \overset{4}{C}_4 x^3\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + x^2 e^x P^k_k \{\overset{k}{C}_1 + \overset{k}{C}_2 x + \overset{k}{C}_3 x^2 + \overset{k}{C}_4 x^3 + \ldots + \overset{k}{C}_k x^{k-1}\};
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
& \overset{k+1}{C}_1 + \overset{k+1}{C}_2 x + \overset{k+1}{C}_3 x^2 + \overset{k+1}{C}_4 x^3 + \ldots + \overset{k+1}{C}_{k+1} x^k \\
= {} & P^0_k \\
& + x P^1_k \overset{1}{C}_1 \\
& + x P^2_k \{\overset{2}{C}_1 + \overset{2}{C}_2 x\} \\
& + x P^3_k \{\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_2 x + \overset{3}{C}_3 x^2\} \\
& + x P^4_k \{\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_2 x + \overset{4}{C}_3 x^2 + \overset{4}{C}_4 x^3\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + x P^k_k \{\overset{k}{C}_1 + \overset{k}{C}_2 x + \overset{k}{C}_3 x^2 + \overset{k}{C}_4 x^3 + \ldots + \overset{k}{C}_k x^{k-1}\},
\end{aligned}$$

oder, wenn man auf der rechten Seite nach Potenzen von x ordnet,

$$\overset{k+1}{C}_1 + \overset{k+1}{C}_2 x + \overset{k+1}{C}_3 x^2 + \overset{k+1}{C}_4 x^3 + \ldots + \overset{k+1}{C}_{k+1} x^k$$
$$= P_k^0 + \{P_k^1 \overset{1}{C}_1 + P_k^2 \overset{2}{C}_1 + P_k^3 \overset{3}{C}_1 + P_k^4 \overset{4}{C}_1 + \ldots + P_k^k \overset{k}{C}_1\} x$$
$$+ \{P_k^2 \overset{2}{C}_2 + P_k^3 \overset{3}{C}_2 + P_k^4 \overset{4}{C}_2 + \ldots + P_k^k \overset{k}{C}_2\} x^2$$
$$+ \{P_k^3 \overset{3}{C}_3 + P_k^4 \overset{4}{C}_3 + \ldots + P_k^k \overset{k}{C}_3\} x^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \{P_k^{k-1} \overset{k-1}{C}_{k-1} + P_k^k \overset{k}{C}_{k-1}\} x^{k-1}$$
$$+ P_k^k \overset{k}{C}_k x^k.$$

Da diese Gleichung für jedes x gilt, so ist allgemein

$$\overset{k+1}{C}_1 = P_k^0 = 1,$$

und, unter der Voraussetzung, dafs $n > 0$ ist,

$$\overset{k+1}{C}_{n+1} = P_k^n \overset{n}{C}_n + P_k^{n+1} \overset{n+1}{C}_n + P_k^{n+2} \overset{n+2}{C}_n + \ldots + P_k^k \overset{k}{C}_n.$$

§. 9.

Nach den Principien der Differenzenrechnung ist ferner für $\Delta x = 1$:

$$\Delta^a . x^n = P_a^0 (x+a)^n - P_a^1 (x+a-1)^n + P_a^2 (x+a-2)^n - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{a-1} P_a^{a-1} (x+1)^n + (-1)^a P_a^a x^n,$$

und folglich für $x = 0$:

$$\Delta^a . 0^n = P_a^0 a^n - P_a^1 (a-1)^n + P_a^2 (a-2)^n - \ldots$$
$$\ldots + (-)^{a-1} P_a^{a-1} . 1^n + (-1)^a P_a^a . 0^n.$$

Auch ist bekanntlich immer

$$\Delta^{n+1} . 0 = \Delta^{n+2} . 0^n = \Delta^{n+3} . 0^n = \ldots = 0.$$

Nach §. 8. ist nun

$$\overset{k+1}{C}_1 = 1,$$

und folglich

$$\overset{k+1}{C}_2 = P_k^1 + P_k^2 + P_k^3 + \ldots + P_k^k,$$

oder, nach einer bekannten Bezeichnung,

$$\overset{k+1}{C}_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=k} P_k^\mu.$$

Da aber

$$\Delta . 0^0 = 0$$

ist, so ist auch

$$\overset{k+1}{C}_2 = P_k^0 \Delta . 0^0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=k} P_k^\mu,$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\Delta.0^0 = P_1^0 - P_1^1$$

ist,

$$\overset{k+1}{C}_2 = \{P_1^0 - P_1^1\}P_k^0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=k} P_k^\mu,$$

oder

$$\overset{k+1}{C}_2 = P_1^0\{P_k^0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=k} P_k^\mu\} - P_1^1 P_k^0,$$

d. i., wie leicht erhellen wird,

$$\overset{k+1}{C}_2 = P_1^0 \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu - P_1^1 P_k^0.$$

Da aber nach dem binomischen Lehrsatze offenbar

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu = (1+1)^k = 2^k$$

ist und

$$P_k^0 = 1$$

gesetzt werden kann, so ist

$$1.\overset{k+1}{C}_2 = P_1^0.2^k - P_1^1.1^k.$$

Nach §. 8. und dieser Gleichung ist nun ferner

$$\begin{aligned}
1.\overset{k+1}{C}_3 = & P_k^2.1.\overset{2}{C}_2 + P_k^3.1.\overset{3}{C}_2 + P_k^4.1.\overset{4}{C}_2 + \ldots + P_k^k.1.\overset{k}{C}_2 \\
= & P_k^2\{P_1^0.2^1 - P_1^1.1^1\} \\
& + P_k^3\{P_1^0.2^2 - P_1^1.1^2\} \\
& + P_k^4\{P_1^0.2^3 - P_1^1.1^3\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + P_k^k\{P_1^0.2^{k-1} - P_1^1.1^{k-1}\},
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
1.2.\overset{k+1}{C}_3 = & \tfrac{2}{2}P_1^0\{P_k^2.2^2 + P_k^3.2^3 + P_k^4.2^4 + \ldots + P_k^k.2^k\} \\
& - \tfrac{2}{1}P_1^1\{P_k^2.1^2 + P_k^3.1^3 + P_k^4.1^4 + \ldots + P_k^k.1^k\} \\
= & P_2^0 \sum_{\mu=2}^{\mu=k} P_k^\mu.2^\mu - P_2^1 \sum_{\mu=2}^{\mu=k} P_k^\mu.1^\mu.
\end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned}
0 = & P_k^0\Delta^2.0^0 + P_k^1\Delta^2.0^1 \\
= & P_k^0\{P_2^0.2^0 - P_2^1.1^0 + P_2^2.0^0\} + P_k^1\{P_2^0.2^1 - P_2^1.1^1 + P_2^2.0^1\} \\
= & P_2^0\{P_k^0.2^0 + P_k^1.2^1\} - P_2^1\{P_k^0.1^0 + P_k^1.1^1\} + P_2^2 P_k^0 \\
= & P_2^0 \sum_{\mu=0}^{\mu=1} P_k^\mu.2^\mu - P_2^1 \sum_{\mu=0}^{\mu=1} P_k^\mu.1^\mu + P_2^2 P_k^0,
\end{aligned}$$

und offenbar
$$\sum_{\mu=0}^{\mu=1} P_k^\mu.2^\mu + \sum_{\mu=2}^{\mu=k} P_k^\mu.2^\mu = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu.2^\mu,$$
$$\sum_{\mu=0}^{\mu=1} P_k^\mu.1^\mu + \sum_{\mu=2}^{\mu=k} P_k^\mu.1^\mu = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu.1^\mu$$
ist, so ist auch
$$1.2.\overset{k+1}{C_3} = P_2^0 \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu.2^\mu - P_2^1 \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu.1^\mu + P_2^2 P_k^0.$$
Da nun aber offenbar nach dem binomischen Lehrsatze allgemein
$$\sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu.\lambda^\mu = (1+\lambda)^k,$$
ist und
$$P_k^0 = 1^k$$
gesetzt werden kann, so ist
$$1.2.\overset{k+1}{C_3} = P_2^0.3^k - P_2^1.2^k + P_2^2.1^k.$$

Nach §. 8. und dieser Gleichung ist ferner, auf ähnliche Art wie vorher:
$$\begin{aligned}
1.2.\overset{k+1}{C_4} &= P_k^3.1.2.\overset{3}{C_3} + P_k^4.1.2.\overset{4}{C_3} + P_k^5.1.2.\overset{5}{C_3} + \ldots + P_k^k.1.2.\overset{k}{C_3} \\
&= P_k^3\{P_2^0.3^2 - P_2^1.2^2 + P_2^2.1^2\} \\
&\quad + P_k^4\{P_2^0.3^3 - P_2^1.2^3 + P_2^2.1^3\} \\
&\quad + P_k^5\{P_2^0.3^4 - P_2^1.2^4 + P_2^2.1^4\} \\
&\quad \ldots\ldots \\
&\quad + P_k^k\{P_1^0.3^{k-1} - P_2^1.2^{k-1} + P_2^2.1^{k-1}\}
\end{aligned}$$
und folglich
$$\begin{aligned}
1.2.3.\overset{k+1}{C_4} = &\tfrac{3}{3}P_2^0\{P_k^3.3^3 + P_k^4.3^4 + P_k^5.3^5 + \ldots + P_k^k.3^k\} \\
&- \tfrac{3}{2}P_2^1\{P_k^3.2^3 + P_k^4.2^4 + P_k^5.2^5 + \ldots + P_k^k.2^k\} \\
&+ \tfrac{3}{1}P_2^2\{P_k^3.1^3 + P_k^4.1^4 + P_k^5.1^5 + \ldots + P_k^k.1^k\} \\
= &\text{[illegible]} \sum_{\mu=3}^{\mu=k} P_k^\mu.3^\mu - P_3^1 \sum_{\mu=3}^{\mu=k} P_k^\mu.2^\mu + P_3^2 \sum_{\mu=3}^{\mu=k} P_k^\mu.1^\mu.
\end{aligned}$$
Da aber
$$\begin{aligned}
0 = &P_k^0\Delta^3.0^0 + P_k^1\Delta^3.0^1 + P_k^2\Delta^3.0^2 \\
= &P_k^0\{P_3^0.3^0 - P_3^1.2^0 + P_3^2.1^0 - P_3^3.0^0\} \\
&+ P_k^1\{P_3^0.3^1 - P_3^1.2^1 + P_3^2.1^1 - P_3^3.0^1\} \\
&+ P_k^2\{P_3^0.3^2 - P_3^1.2^2 + P_3^2.1^2 - P_3^3.0^2\} \\
= &P_3^0\{P_k^0.3^0 + P_k^1.3^1 + P_k^2.3^2\} \\
&- P_3^1\{P_k^0.2^0 + P_k^1.2^1 + P_k^2.2^2\} \\
&+ P_3^2\{P_k^0.1^0 + P_k^1.1^1 + P_k^2.1^2\} \\
&- P_3^3 P_k^0 \\
= &P_3^0 \sum_{\mu=0}^{\mu=2} P_k^\mu.3^\mu - P_3^1 \sum P_k^\mu.2^\mu + P_3^2 \sum P_k^\mu.1^\mu - P_3^3 P_k^0
\end{aligned}$$

und offenbar

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=2} P_k^\mu .3^\mu + \sum_{\mu=3}^{\mu=k} P_k^\mu .3^\mu = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu .3^\mu,$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=2} P_k^\mu .2^\mu + \sum_{\mu=3}^{\mu=k} P_k^\mu .2^\mu = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu .2^\mu,$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=2} P_k^\mu .1^\mu + \sum_{\mu=3}^{\mu=k} P_k^\mu .1^\mu = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu .1^\mu$$

ist, so ist auch

$$1.2.3.\overset{k+1}{C}_4 = P_3^0 \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu .3^\mu - P_3^1 \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu .2^\mu + P_3^2 \sum_{\mu=0}^{\mu=k} P_k^\mu .1^\mu - P_3^3 P_k^0,$$

und folglich, auf ganz ähnliche Art wie oben,

$$1.2.3.\overset{k+1}{C}_4 = P_3^0 .4^k - P_3^1 .3^k + P_3^2 .2^k - P_3^3 .1^k.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hieraus schon deutlich genug, und es ist also allgemein

$$1.2.3....(n-1)\overset{k+1}{C}_n = P_{n-1}^0 .n^k - P_{n-1}^1 .(n-1)^k + P_{n-1}^2 .(n-2)^k - ....$$
$$.... + (-1)^{n-2} P_{n-1}^{n-2} .2^k + (-1)^{n-1} P_{n-1}^{n-1} .1^k;$$

oder, wenn wir mit *Gaufs*

$$1.2.3....(n-1) = \Pi(n-1)$$

und $k-1$ für k setzen,

$$\Pi(n-1).\overset{k}{C}_n = P_{n-1}^0 .n^{k-1} - P_{n-1}^1 .(n-1)^{k-1} + P_{n-1}^2 .(n-2)^{k-1} - ...$$
$$... + (-1)^{n-2} P_{n-1}^{n-2} .2^{k-1} + (-1)^{n-1} P_{n-1}^{n-1} .1^{k-1};$$

oder auch, wie leicht erhellen wird,

$$\Pi(n-1).\overset{k}{C}_n$$
$$= (-1)^{n-1} \{P_{n-1}^0 .1^{k-1} - P_{n-1}^1 .2^{k-1} + P_{n-1}^2 .3^{k-1} - .... + (-1)^{n-1} P_{n-1}^{n-1} .n^{k-1}\},$$

und folglich

$$\overset{k}{C}_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\Pi(n-1)} \{P_{n-1}^0 .1^{k-1} - P_{n-1}^1 .2^{k-1} + P_{n-1}^2 .3^{k-1} - .... + (-1)^{n-1} P_{n-1}^{n-1} .n^{k-1}\}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\Pi(n-1)} \{P_{n-1}^0 .1^{k-1} - P_{n-1}^1 .2^{k-1} + P_{n-1}^2 .3^{k-1} - .... + (-1)^{n-1} P_{n-1}^{n-1} .n^{k-1}\}$$
$$= \frac{(n-1)^n}{\Pi(n-1)} \{(-1) P_{n-1}^0 .1^{k-1} + (-1)^2 P_{n-1}^1 .2^{k-1} + (-1)^3 P_{n-1}^2 .3^{k-1}$$
$$+ (-1)^4 P_{n-1}^3 .4^{k-1} + ... + (-1)^n P_{n-1}^{n-1} .n^{k-1}\};$$

also

$$\overset{k}{C}_n = \frac{(-1)^n}{\Pi(n-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (-1)^\mu P_{n-1}^{\mu-1} \mu^{k-1}.$$

Dafs diese Formel für $n = 1$ nicht gilt, ist klar. Wir wissen aber aus dem Obigen, dafs immer

$$\overset{k}{C}_1 = 1 \text{ ist.}$$

§. 10.

Man kann auf sehr einfache Weise für C_n noch einen andern independenten Ausdruck finden.

Bezeichnet nämlich $\overset{a}{K}_\lambda$ die $a$te Classe der Combinationen mit Wiederholungen für die Elemente

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ \lambda;$$

so hat man, wie leicht zu finden, die Relation

$$\overset{a}{K}_\lambda = \overset{a}{K}_{\lambda-1} + \lambda \overset{a-1}{K}_\lambda,$$

wobei aber zu bemerken ist, dafs, wenn diese Relation allgemein Statt finden soll,

$$\overset{0}{K}_\lambda = 1,\quad \overset{a}{K}_0 = 0$$

gesetzt werden mufs.

Dies vorausgesetzt, hat man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\overset{k}{K}_1 &= \overset{k-1}{K}_1,\\
\overset{k-1}{K}_2 &= \overset{k-1}{K}_1 + 2\overset{k-2}{K}_2,\\
\overset{k-2}{K}_3 &= \overset{k-2}{K}_2 + 3\overset{k-3}{K}_3,\\
\overset{k-3}{K}_4 &= \overset{k-3}{K}_3 + 4\overset{k-4}{K}_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\overset{1}{K}_k &= \overset{1}{K}_{k-1} + k\overset{0}{K}_k,\\
\overset{0}{K}_{k+1} &= \overset{0}{K}_k.
\end{aligned}$$

In §. 5. sind aber die folgenden Gleichungen bewiesen worden.

$$\begin{aligned}
\overset{k+1}{C}_1 &= \overset{k}{C}_1,\\
\overset{k+1}{C}_2 &= \overset{k}{C}_1 + 2\overset{k}{C}_2,\\
\overset{k+1}{C}_3 &= \overset{k}{C}_2 + 3\overset{k}{C}_3,\\
\overset{k+1}{C}_4 &= \overset{k}{C}_3 + 4\overset{k}{C}_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\overset{k+1}{C}_k &= \overset{k}{C}_{k-1} + k\overset{k}{C}_k,\\
\overset{k+1}{C}_{k+1} &= \overset{k}{C}_k.
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Reihen von Gleichungen erhellet, dafs, wenn die über einander stehenden Glieder der beiden Reihen

$$\overset{k}{C}_1,\ \overset{k}{C}_2,\ \overset{k}{C}_3,\ \overset{k}{C}_4,\ \ldots\ldots\ \overset{k}{C}_k,$$
$$\overset{k-1}{K}_1,\ \overset{k-2}{K}_2,\ \overset{k-3}{K}_3,\ \overset{k-4}{K}_4,\ \ldots\ldots\ \overset{0}{K}_k$$

einander gleich sind, dies jederzeit auch von den übereinander stehenden Gliedern der beiden Reihen

$$\overset{k+1}{C}_1,\ \overset{k+1}{C}_2,\ \overset{k+1}{C}_3,\ \overset{k+1}{C}_4,\ \ldots\ldots\ \overset{k+1}{C}_{k+1},$$
$$\overset{k}{K}_1,\ \overset{k-1}{K}_2,\ \overset{k-2}{K}_3,\ \overset{k-3}{K}_4,\ \ldots\ldots\ \overset{0}{K}_{k+1}$$

gilt. Da nun die beiden Gröfsen

$$\overset{1}{C}_1, \text{ [illegible] nach §. 8. [illegible]}$$
$$\overset{0}{K}_1$$

in der That einander gleich sind, so folgt aus dem Vorhergehenden, dafs überhaupt jede zwei über einander stehende Glieder der beiden Reihen

$$\overset{k}{C}_1,\ \overset{k}{C}_2,\ \overset{k}{C}_3,\ \overset{k}{C}_4,\ \ldots\ldots\ \overset{k}{C}_k,$$
$$\overset{k-1}{K}_1,\ \overset{k-2}{K}_2,\ \overset{k-3}{K}_3,\ \overset{k-4}{K}_4,\ \ldots\ldots\ \overset{0}{K}_k$$

einander gleich sind, d. h. dafs allgemein

$$\overset{k}{C}_n = \overset{k-n}{K}_n$$

ist; wo nach dem Obigen $\overset{k-n}{K}_n$ die $(k-n)$te Classe der Combinationen mit Wiederholungen für die Elemente

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots\ n$$

bezeichnet.

Nach §. 9. hat man also auch die Gleichung

$$\overset{k-n}{K}_n = \frac{(-1)^n}{\Pi(n-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (-1)^\mu P_{n-1}^{\mu-1} \mu^{k-1},$$

oder, wenn man $k-n=m$, $k=m+n$ setzt, die Gleichung

$$\overset{m}{K}_n = \frac{(-1)^n}{\Pi(n-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (-1)^\mu P_{n-1}^{\mu-1} \mu^{m+n-1}.$$

§. 11.

Nach §. 7. ist nun

$$\left\{\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}\right\} = \overset{k}{C}_1 x f'(x) + \overset{k}{C}_2 x^2 f''(x) + \overset{k}{C}_3 x^3 f'''(x) + \ldots\ldots + \overset{k}{C}_k x^k f^{(k)}(x).$$

Also ist nach §. 9., wenn man für die von x unabhängigen Coëfficienten ihre dort gefundenen Ausdrücke setzt:

$$\left\{\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}\right\} = x f'(x)$$
$$+ x^2 f''(x) \frac{(-1)^2}{\Pi 1} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^\mu P_1^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$+ x^3 f'''(x) \frac{(-1)^3}{\Pi 2} \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^\mu P_2^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$+ x^4 f^{\text{IV}}(x) \frac{(-1)^4}{\Pi 3} \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu P_3^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ x^k f^{(k)}(x) \frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1} \mu^{k-1}.$$

Setzen wir aber $\Pi 0 = 1$, so ist, weil nach §. 8. auch $P_0^0 = 1$ zu setzen ist, offenbar

$$1 = \frac{(-1)^1}{\Pi 0} \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^\mu P_0^{\mu-1} \mu^{k-1},$$

und wir können also, dies vorausgesetzt, die obige Gleichung auch unter der Form

$$\left\{\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}\right\} = x f'(x) \frac{(-1)^1}{\Pi 0} \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^\mu P_0^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$+ x^2 f''(x) \frac{(-1)^2}{\Pi 1} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^\mu P_1^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$+ x^3 f'''(x) \frac{(-1)^3}{\Pi 2} \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^\mu P_2^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$+ x^4 f^{\text{IV}}(x) \frac{(-1)^4}{\Pi 3} \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu P_3^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ x^k f^{(k)}(x) \frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1} \mu^{k-1},$$

oder, wenn wir wieder die gewöhnlichen Symbole der Differentialquotienten einführen, unter der Form

$$\left\{\frac{\partial^k f(\theta)}{\partial u^k}\right\} = x \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \frac{(-1)^1}{\Pi 0} \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^\mu P_0^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$+ x^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{(-1)^2}{\Pi 1} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^\mu P_1^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$+ x^3 \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \cdot \frac{(-1)^3}{\Pi 2} \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^\mu P_2^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$+ x^4 \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} \cdot \frac{(-1)^4}{\Pi 3} \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu P_3^{\mu-1} \mu^{k-1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ x^k \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k} \cdot \frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1} \mu^{k-1}$$

schreiben.

§. 12.

Aus §. 7. und §. 11. ergiebt sich nun folgendes Theorem:

Wenn für jedes x zwischen zwei bestimmten Grenzen

$$f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

ist, so ist für jedes x zwischen denselben Grenzen, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet:

$$\begin{aligned} & A + 1^k A_1 x + 2^k A_2 x^2 + 3^k A_3 x^3 + \ldots + n^k A_n x^n + \ldots \\ = \; & A + x f'(x) \frac{(-1)^1}{\Pi 0} \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^\mu P_0^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ & + x^2 f''(x) \frac{(-1)^2}{\Pi 1} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^\mu P_1^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ & + x^3 f'''(x) \frac{(-1)^3}{\Pi 2} \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^\mu P_2^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ & + x^4 f^{\text{IV}}(x) \frac{(-1)^4}{\Pi 3} \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu P_3^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ & + x^k f^{(k)}(x) \frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1} \mu^{k-1}, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist, mittels der gewöhnlichen Bezeichnung der Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} & A + 1^k A_1 x + 2^k A_2 x^2 + 3^k A_3 x^3 + \ldots + n^k A_n x^n + \ldots \\ = \; & A + x \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \frac{(-1)^1}{\Pi 0} \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^\mu P_0^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ & + x^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{(-1)^2}{\Pi 1} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^\mu P_1^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ & + x^3 \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \cdot \frac{(-1)^3}{\Pi 2} \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^\mu P_2^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ & + x^4 \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} \cdot \frac{(-1)^4}{\Pi 3} \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu P_3^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ & + x^k \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k} \cdot \frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1} \mu^{k-1}. \end{aligned}$$

Dafs man für die von x unabhängigen Coëfficienten auch die in §. 10. gefundenen combinatorischen Ausdrücke derselben einführen könnte, versteht sich von selbst. Es mag aber hier diese allgemeine Bemerkung genügen.

Wir wollen nun die obige allgemeine Formel auf einige specielle Fälle anwenden.

§. 13.

Bekanntlich ist für jedes x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$

Da nun allgemein

$$\frac{\partial^n e^x}{\partial x^n} = e^x$$

ist, so ist nach §. 12., wenn k immer eine positive ganze Zahl bezeichnet, für jedes x

$$1 + \frac{1^k x}{1} + \frac{2^k x^2}{1.2} + \frac{3^k x^3}{1.2.3} + \frac{4^k x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$

$$= 1 + xe^x \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^1}{\Pi 0} \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^\mu P_0^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ + x \frac{(-1)^2}{\Pi 1} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^\mu P_1^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ + x^2 \frac{(-1)^3}{\Pi 2} \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^\mu P_2^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ + x^3 \frac{(-1)^4}{\Pi 4} \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu P_3^{\mu-1} \mu^{k-1} \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + x^{k-1} \frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1} \mu^{k-1} \end{array} \right\}$$

Also ist z. B. für jedes x

$$1 + \frac{1x}{1} + \frac{2x^2}{1.2} + \frac{3x^3}{1.2.3} + \frac{4x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$
$$= 1 + xe^x,$$

$$1 + \frac{1^2 x}{1} + \frac{2^2 x^2}{1.2} + \frac{3^2 x^3}{1.2.3} + \frac{4^2 x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$
$$= 1 + xe^x(1 + x),$$

$$1 + \frac{1^3 x}{1} + \frac{2^3 x^2}{1.2} + \frac{3^3 x^3}{1.2.3} + \frac{4^3 x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$
$$= 1 + xe^x(1 + 3x + x^2),$$

$$1 + \frac{1^4 x}{1} + \frac{2^4 x^2}{1.2} + \frac{3^4 x^3}{1.2.3} + \frac{4^4 x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$
$$= 1 + xe^x(1 + 7x + 6x^2 + x^3),$$

$$1 + \frac{1^5 x}{1} + \frac{2^5 x^2}{1.2} + \frac{3^5 x^3}{1.2.3} + \frac{4^5 x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$
$$= 1 + xe^x(1 + 15x + 25x^2 + 10x^3 + x^4),$$

$$1 + \frac{1^6 x}{1} + \frac{2^6 x^2}{1.2} + \frac{3^6 x^3}{1.2.3} + \frac{4^6 x^4}{1\ldots 4} + \ldots$$
$$= 1 + xe^x(1 + 31x + 90x^2 + 65x^3 + 15x^4 + x^5)$$

§. 14.

Unter der Voraussetzung, dafs

$$-1 < x < +1$$

ist, ist bekanntlich für jedes α

$$(1+x)^\alpha = P^0_\alpha + P^1_\alpha x + P^2_\alpha x^2 + P^3_\alpha x^3 + P^4_\alpha x^4 + \ldots\ldots$$

Da nun

$$\frac{\partial^n.(1+x)^\alpha}{\partial x^n} = \alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

ist, so ist nach §. 12., wie man leicht findet, unter der Voraussetzung, dafs

$$-1 < x < +1$$

ist,

$$\begin{aligned}
&P^0_\alpha + 1^k P^1_\alpha x + 2^k P^2_\alpha x^2 + 3^k P^3_\alpha x^3 + 4^k P^4_\alpha x^4 + \ldots\ldots \\
&= 1 + 1x\,(1+x)^{\alpha-1}(-1)^1 P^1_\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^\mu P^{\mu-1}_0 \mu^{k-1} \\
&\quad + 2x^2(1+x)^{\alpha-2}(-1)^2 P^2_\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^\mu P^{\mu-1}_1 \mu^{k-1} \\
&\quad + 3x^3(1+x)^{\alpha-3}(-1)^3 P^3_\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^\mu P^{\mu-1}_2 \mu^{k-1} \\
&\quad + 4x^4(1+x)^{\alpha-4}(-1)^4 P^4_\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu P^{\mu-1}_3 \mu^{k-1} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + kx^k(1+x)^{\alpha-k}(-1)^k P^k_\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^\mu P^{\mu-1}_{k-1} \mu^{k-1}.
\end{aligned}$$

Setzt man $-x$ statt x und $\alpha = -1$, so erhält man

$$\begin{aligned}
&1 + 1^k x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + 4^k x^4 + \ldots\ldots \\
&= 1 + 1x\,(1-x)^{-2}(-1)^1 \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^\mu P^{\mu-1}_0 \mu^{k-1} \\
&\quad + 2x^2(1-x)^{-3}(-1)^2 \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^\mu P^{\mu-1}_1 \mu^{k-1} \\
&\quad + 3x^3(1-x)^{-4}(-1)^3 \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^\mu P^{\mu-1}_2 \mu^{k-1} \\
&\quad + 4x^4(1-x)^{-5}(-1)^4 \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu P^{\mu-1}_3 \mu^{k-1} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + kx^k(1-x)^{-(k+1)}(-1)^k \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^\mu P^{\mu-1}_{k-1} \mu^{k-1},
\end{aligned}$$

wobei aber immer die Voraussetzung fest zu halten ist, dafs

$$-1 < x < +1,$$

d. h. der absolute Werth von x kleiner als die Einheit sein mufs.

§. 15.

Wir wollen jetzt zunächst die beiden Functionen

$$f(x)=e^{ax}\cos bx \quad \text{und} \quad \varphi(x)=e^{ax}\sin bx$$

in Reihen zu entwickeln suchen.

Für die erste dieser beiden Functionen, so erhalten wir durch Differentiation:

$$f'(x)=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx).$$

Setzen wir aber

$$\theta=\operatorname{arc}\cos\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=\operatorname{arc}\sin\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

so ist

$$a=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cos\theta,\qquad b=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\sin\theta,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}=\lambda$$

setzt,

$$a=\lambda\cos\theta,\qquad b=\lambda\sin\theta,$$

und folglich

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lambda e^{ax}(\cos\theta\cos bx-\sin\theta\sin bx)\\&=\lambda e^{ax}\cos(\theta+bx).\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich durch fernere Differentiation:

$$\begin{aligned}f''(x)&=\lambda e^{ax}\{a\cos(\theta+bx)-b\sin(\theta+bx)\}\\&=\lambda^2e^{ax}\{\cos\theta\cos(\theta+bx)-\sin\theta\sin(\theta+bx)\}\\&=\lambda^2e^{ax}\cos(2\theta+bx),\\f'''(x)&=\lambda^2e^{ax}\{a\cos(2\theta+bx)-b\sin(2\theta+bx)\}\\&=\lambda^3e^{ax}\{\cos\theta\cos(2\theta+bx)-\sin\theta\sin(2\theta+bx)\}\\&=\lambda^3e^{ax}\cos(3\theta+bx)\end{aligned}$$

u. s. w.

Also ist allgemein

$$f^{(n)}(x)=\lambda^n e^{ax}\cos(n\theta+bx).$$

Auf ganz ähnliche Art erhält man

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=e^{ax}(b\cos bx+a\sin bx)\\&=\lambda e^{ax}(\sin\theta\cos bx+\cos\theta\sin bx)\\&=\lambda e^{ax}\sin(\theta+bx),\\\varphi''(x)&=\lambda e^{ax}\{b\cos(\theta+bx)+a\sin(\theta+bx)\}\\&=\lambda^2e^{ax}\{\sin\theta\cos(\theta+bx)+\cos\theta\sin(\theta+bx)\}\\&=\lambda^2e^{ax}\sin(2\theta+bx),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'''(x) &= \lambda^2 e^{ax}\{b\cos(2\theta+bx)+a\sin(2\theta+bx)\}\\ &= \lambda^3 e^{ax}\{\sin\theta\cos(2\theta+bx)+\cos\theta\sin(2\theta+bx)\}\\ &= \lambda^3 e^{ax}\sin(3\theta+bx)\end{aligned}$$

u. s. w.

Also ist allgemein

$$\varphi^{(n)}(x) = \lambda^n e^{ax}\sin(n\theta+bx).$$

Folglich ist

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}f^{(n)}(\varrho x) = \frac{e^{a\varrho x}(\lambda x)^n\cos(n\theta+b\varrho x)}{1.2.3\ldots.n},$$

$$\frac{n^n}{1.2.3\ldots.x}\varphi^{(n)}(\varrho x) = \frac{e^{a\varrho x}(\lambda x)^n\sin(n\theta+b\varrho x)}{1.2.3\ldots.n},$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnen soll.

Der gröfste absolute Werth von

$$\cos(n\theta+b\varrho x) \quad \text{und} \quad \sin(n\theta+b\varrho x)$$

ist die Einheit.

Da ferner bekanntlich $e>1$ ist, so ist, wenn ax positiv ist,

$$e^{a\varrho x}<e^{ax},$$

und, wenn ax negativ ist,

$$e^{a\varrho x}<1.$$

Ist also n nur erst gröfser als der absolute Werth von λx geworden, so werden sich, wenn dann n fernerhin wächst, die Gröfsen

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}f^{(n)}(\varrho x), \qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}\varphi^{(n)}(\varrho x)$$

offenbar der Null immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, und es ist folglich, wegen

$$f^{(n)}(0) = \lambda^n\cos n\theta, \qquad \varphi^{(n)}(0) = \lambda^n\sin n\theta,$$

nach dem Maclaurinschen Satze, für jedes x:

$$e^{ax}\cos bx = 1+\frac{\lambda x\cos\theta}{1}+\frac{\lambda^2x^2\cos2\theta}{1.2}+\frac{\lambda^3x^3\cos3\theta}{1.2.3}+\frac{\lambda^4x^4\cos4\theta}{1.2.3.4}+\ldots.,$$

$$e^{ax}\sin bx = \frac{\lambda x\sin\theta}{1}+\frac{\lambda^2x^2\sin2\theta}{1.2}+\frac{\lambda^3x^3\sin3\theta}{1.2.3}+\frac{\lambda^4x^4\sin4\theta}{1.2.3.4}+\ldots.$$

§. 16.

Die beiden Reihen

$$1,\quad \frac{x\cos\alpha}{1},\quad \frac{x^2\cos2\alpha}{1.2},\quad \frac{x^3\cos3\alpha}{1.2.3},\quad \frac{x^4\cos4x}{1.2.3.4},\quad \ldots.,$$

$$\frac{x\sin\alpha}{1},\quad \frac{x^2\sin2\alpha}{1.2},\quad \frac{x^3\sin3\alpha}{1.2.3},\quad \frac{x^4\sin4\alpha}{1.2.3.4},\quad \ldots.,$$

lassen sich nun auf folgende Art summiren.

Man setze im vorigen Paragraphen $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, so ist

$$\lambda = (\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

und folglich

$$\theta = \operatorname{arc}\cos(\cos\alpha) = \operatorname{arc}\sin(\sin\alpha), \quad \text{d. i.} \quad \theta = \alpha.$$

Also ist nach §. 15. für jedes x:

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = 1 + \frac{x\cos\alpha}{1} + \frac{x^2\cos2\alpha}{1.2} + \frac{x^3\cos3\alpha}{1.2.3} + \frac{x^4\cos4\alpha}{1.2.3.4} + \ldots \text{ und}$$

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha) = \frac{x\sin\alpha}{1} + \frac{x^2\sin2\alpha}{1.2} + \frac{x^3\sin3\alpha}{1.2.3} + \frac{x^4\sin4\alpha}{1.2.3.4} + \ldots$$

Auch ergiebt sich aus §. 15. unmittelbar, dafs, wenn wir jetzt

$$f(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha), \qquad \varphi(x) = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha) \text{ setzen,}$$

$$f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(n\alpha + x\sin\alpha), \quad \varphi^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\sin(n\alpha + x\sin\alpha) \text{ ist.}$$

Dies vorausgesetzt, ergiebt sich nun aus §. 12. für jedes x und jedes positive ganze k:

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1^k x\cos\alpha}{1} + \frac{2^k x^2\cos2\alpha}{1.2} + \frac{3^k x^3\cos3\alpha}{1.2.3} + \ldots \\
= {} & 1 + x\,e^{x\cos\alpha}\cos(\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^1}{\Pi 0}\sum_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu P_0^{\mu-1}\mu^{k-1} \\
&+ x^2 e^{x\cos\alpha}\cos(2\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^2}{\Pi 1}\sum_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu P_1^{\mu-1}\mu^{k-1} \\
&+ x^3 e^{x\cos\alpha}\cos(3\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^3}{\Pi 2}\sum_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu P_2^{\mu-1}\mu^{k-1} \\
&+ x^4 e^{x\cos\alpha}\cos(4\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^4}{\Pi 3}\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu P_3^{\mu-1}\mu^{k-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ x^k e^{x\cos\alpha}\cos(k\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)}\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1}\mu^{k-1},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{1^k x\sin\alpha}{1} + \frac{2^k x^2\sin2\alpha}{1.2} + \frac{3^k x^3\sin3\alpha}{1.2.3} + \ldots \\
= {} & x\,e^{x\cos\alpha}\sin(\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^1}{\Pi 0}\sum_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu P_0^{\mu-1}\mu^{k-1} \\
&+ x^2 e^{x\cos\alpha}\sin(2\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^2}{\Pi 1}\sum_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu P_1^{\mu-1}\mu^{k-1} \\
&+ x^3 e^{x\cos\alpha}\sin(3\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^3}{\Pi 2}\sum_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu P_2^{\mu-1}\mu^{k-1} \\
&+ x^4 e^{x\cos\alpha}\sin(4\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^4}{\Pi 3}\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu P_3^{\mu-1}\mu^{k-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ x^k e^{x\cos\alpha}\sin(k\alpha + x\sin\alpha)\frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)}\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1}\mu^{k-1}.
\end{aligned}$$

§. 17.

Wir wollen ferner die beiden Reihen

$$1,\quad x\cos\alpha,\quad x^2\cos 2\alpha,\quad x^3\cos 3\alpha,\quad x^4\cos 4\alpha,\quad \ldots\ldots$$
$$x\sin\alpha,\quad x^2\sin 2\alpha,\quad x^3\sin 3\alpha,\quad x^4\sin 4\alpha,\quad \ldots\ldots$$

zu summiren suchen.

Nach bekannten goniometrischen Formeln ist

$$\begin{aligned}
x\cos\alpha &= x\cos\alpha,\\
x^2\cos 2\alpha &= 2x^2\cos\alpha\cos\alpha - x^2,\\
x^3\cos 3\alpha &= 2x^3\cos 2\alpha\cos\alpha - x^3\cos\alpha,\\
x^4\cos 4\alpha &= 2x^4\cos 3\alpha\cos\alpha - x^4\cos 2\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^n\cos n\alpha &= 2x^n\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - x^n\cos(n-2)\alpha.
\end{aligned}$$

Also ist, wenn man addirt und

$$S_n = 1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + x^3\cos 3\alpha + \ldots + x^n\cos n\alpha$$

setzt:

$$S_n = 1 + x\cos\alpha + 2(S_n - 1 - x^n\cos n\alpha)x\cos\alpha$$
$$-\{S_n - x^{n-1}\cos(n-1)\alpha - x^n\cos n\alpha\}x^2.$$

Hieraus folgt, wenn man

$$2\cos n\alpha\cos\alpha = \cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$$

setzt, ohne Schwierigkeit:

$$(1-2x\cos\alpha + x^2)S_n = 1 - x\cos\alpha - \{\cos(n+1)\alpha - x\cos n\alpha\}x^{n+1},$$

und folglich

$$S_n = \frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} - \frac{\cos(n+1)\alpha - x\cos n\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}x^{n+1}.$$

Da nun der gröfste absolute Werth von $\cos n\alpha$ und $\cos(n+1)\alpha$ die Einheit ist, so nähert sich, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist, die Gröfse

$$\frac{\cos(n+1)\alpha - x\cos n\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}x^{n+1},$$

wenn n wächst, offenbar der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n grofs genug annimmt. Daher nähert sich, vorausgesetzt dafs

$$-1 < x < +1$$

ist, die Gröfse S_n, wenn n wächst, der Grenze

$$\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2},$$

und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n grofs

genug nimmt. Also ist

$$\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=1+x\cos\alpha+x^2\cos2\alpha+x^3\cos3\alpha+\ldots\{-1<x<+1\}.$$

Ferner ist nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned}
x\sin\alpha &= x\sin\alpha\\
x^2\sin2\alpha &= 2x^2\sin\alpha\cos\alpha\\
x^3\sin3\alpha &= 2x^3\sin2\alpha\cos\alpha-x^3\sin\alpha\\
x^4\sin4\alpha &= 2x^4\sin3\alpha\cos\alpha-x^4\sin2\alpha\\
x^5\sin5\alpha &= 2x^5\sin4\alpha\cos\alpha-x^5\sin3\alpha\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^n\sin n\alpha &= 2x^n\sin(n-1)\alpha\cos\alpha-x^n\sin(n-2)\alpha.
\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$s_n = x\sin\alpha+x^2\sin2\alpha+x^3\sin3\alpha+\ldots+x^n\sin n\alpha,$$

so erhält man, wenn man die obigen Gleichungen zu einander addirt:

$$s_n=x\sin\alpha+2(s_n-x^n\sin n\alpha)x\cos\alpha-\{s_n-x^{n-1}\sin(n-1)\alpha-x^n\sin n\alpha\}x^2,$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man

$$2\sin n\alpha\cos\alpha=\sin(n+1)\alpha+\sin(n-1)\alpha$$

setzt, leicht

$$(1-2x\cos\alpha+x^2)s_n=x\sin\alpha-\{\sin(n+1)\alpha-x\sin n\alpha\}x^{n+1},$$

oder

$$s_n=\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}-\frac{\sin(n+1)\alpha-x\sin n\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}x^{n+1}.$$

Hieraus schliefst man auf ganz ähnliche Art wie vorher, dafs

$$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=x\sin\alpha+x^2\sin2\alpha+x^3\sin3\alpha+x^4\sin4\alpha+\ldots\quad\{-1<x<+1\}$$

ist.

§. 18.

Wir wollen nun

$$f(x)=\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

setzen und die Differentialquotienten dieser Function zu entwickeln suchen.

Dazu gelangt man am leichtesten mittels der imaginären Gröfsen.

Es ist nämlich, wenn man der Kürze wegen $\sqrt{(-1)}=i$ setzt, wie leicht zu finden:

$$2f(x)=(1-e^{\alpha i}x)^{-1}+(1-e^{-\alpha i}x)^{-1},$$

und folglich, wenn man differentiirt,

$$2f'(x) = 1.(1-e^{ai}x)^{-2}.e^{ai} + 1.(1-e^{-ai}x)^{-2}.e^{-ai},$$
$$2f''(x) = 1.2(1-e^{ai}x)^{-3}.e^{2ai} + 1.2(1-e^{-ai}x)^{-3}.e^{-2ai},$$
$$2f'''(x) = 1.2.3(1-e^{ai}x)^{-4}.e^{3ai} + 1.2.3(1-e^{-ai}x)^{-4}.e^{-3ai},$$
u. s. w.

Also ist allgemein

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(1-e^{ai}x)^{-(n+1)}e^{nai}}{2} + \frac{(1-e^{-ai}x)^{-(n+1)}e^{-nai}}{2}$$
$$= \frac{e^{nai}}{2(1-e^{ai}x)^{n+1}} + \frac{e^{-nai}}{2(1-e^{-ai}x)^{n+1}}$$
$$= \frac{e^{nai}(1-e^{-ai}x)^{n+1} + e^{-nai}(1-e^{ai}x)^{n+1}}{2[1-(e^{ai}+e^{-ai})x+x^2]^{n+1}}$$
$$= \frac{e^{nai}(1-e^{-ai}x)^{n+1} + e^{-nai}(1-e^{ai}x)^{n+1}}{2(1-2x\cos a+x^2)^{n+1}}.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber

$$e^{nai}(1-e^{-ai}x)^{n+1} + e^{-nai}(1-e^{ai}x)^{n+1}$$

$$\begin{array}{lll}
= & P^0_{n+1}e^{nai} & + P^0_{n+1}e^{-nai} \\
& - P^1_{n+1}e^{(n-1)ai}x & - P^1_{n+1}e^{-(n-1)ai} \\
& + P^2_{n+1}e^{(n-2)ai}x^2 & + P^2_{n+1}e^{-(n-2)ai}x^2 \\
& - P^3_{n+1}e^{(n-3)ai}x^3 & - P^3_{n+1}e^{-(n-3)ai}x^3 \\
& \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
& + (-1)^{n-1}P^{n-1}_{n+1}e^{ai}x^{n-1} & + (-1)^{n-1}P^{n-1}_{n+1}e^{-ai}x^{n-1} \\
& + (-1)^n P^n_{n+1}x^n & + (-1)^n P^n_{n+1}x^n \\
& + (-1)^{n+1}P^{n+1}_{n+1}e^{-ai}x^{n+1} & + (-1)^{n+1}P^{n+1}_{n+1}e^{ai}x^{n+1}
\end{array}$$

$$= 2P^0_{n+1}.\frac{e^{nai}+e^{-nai}}{2} - 2P^1_{n+1}.\frac{e^{(n-1)ai}+e^{-(n-1)ai}}{2}x$$
$$+ 2P^2_{n+1}.\frac{e^{(n-2)ai}+e^{-(n-2)ai}}{2}x^2 - 2P^3_{n+1}.\frac{e^{(n-3)ai}+e^{-(n-3)a}}{2}x^3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 2(-1)^{n-1}P^{n-1}_{n+1}.\frac{e^{ai}+e^{-ai}}{2}x^{n-1} + 2(-1)^n P^n_{n+1}.x^n$$
$$+ 2(-1)^{n+1}P^{n+1}_{n+1}\frac{e^{-ai}+e^{ai}}{2}x^{n+1}$$

$$= 2(-1)^0P^0_{n+1}x^0\cos(n-0)a + 2(-1)^1P^1_{n+1}x^1\cos(n-1)a$$
$$+ 2(-1)^2P^2_{n+1}x^2\cos(n-2)a + 2(-1)^3P^3_{n+1}x^3\cos(n-3)a$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 2(-1)^{n-1}P^{n-1}_{n+1}x^{n-1}\cos(n-(n-1))a + 2(-1)^n P^n_{n+1}x^n\cos(n-n)a$$
$$+ 2(-1)^{n+1}P^{n+1}_{n+1}x^{n+1}\cos(n-(n+1))a$$
$$= 2\sum_{\mu=0}^{\mu=n+1}(-1)^\mu P^\mu_{n+1}x^\mu\cos(n-\mu)a,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{\Pi(n)} = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1} (-1)^{\mu} P_{n+1}^{\mu} x^{\mu} \cos(n-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{n+1}};$$

also

$$\frac{f^{(n)}(x)}{\Pi(n-1)} = n\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1} (-1)^{\mu} P_{n+1}^{\mu} x^{\mu} \cos(n-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{n+1}}.$$

Nach §. 12. und §. 17. ist nun, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit oder

$$-1 < x < +1$$

ist, und k immer eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$\begin{aligned}
&1 + 1^k x\cos\alpha + 2^k x^2 \cos 2\alpha + 3^k x^3 \cos 3\alpha + 4^k x^4 \cos 4\alpha + \ldots\\
= \;& 1\\
&+ 1(-1)^1 x \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=2} (-1)^{\mu} P_2^{\mu} x^{\mu} \cos(1-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=1} (-1)^{\mu} P_0^{\mu-1} \mu^{k-1}\\
&+ 2(-1)^2 x^2 \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=3} (-1)^{\mu} P_3^{\mu} x^{\mu} \cos(2-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^3} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} (-1)^{\mu} P_1^{\mu} \mu^{k-1}\\
&+ 3(-1)^3 x^3 \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=4} (-1)^{\mu} P_4^{\mu} x^{\mu} \cos(3-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^4} \sum_{\mu=1}^{\mu=3} (-1)^{\mu} P_2^{\mu-1} \mu^{k-1}\\
&+ 4(-1)^4 x^4 \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=5} (-1)^{\mu} P_5^{\mu} x^{\mu} \cos(4-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^5} \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^{\mu} P_3^{\mu-1} \mu^{k-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ k(-1)^k x^k \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=k+1} (-1)^{\mu} P_{k+1}^{\mu} x^{\mu} \cos(k-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{k+1}} \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^{\mu} P_{k-1}^{\mu-1} \mu^{k-1}.
\end{aligned}$$

§. 19.

Wir wollen ferner

$$\Phi(x) = \frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

setzen und die Differentialquotienten dieser Function zu entwickeln suchen.

Durch eine leichte Rechnung überzeugt man sich, dafs

$$2i\Phi(x) = (1-e^{\alpha i}x)^{-1} - (1-e^{-\alpha i}x)^{-1}$$

ist. Hieraus erhält man durch Differentiation

$$2i\varphi'(x) = 1(1-e^{\alpha i}x)^{-2}e^{\alpha i} - 1(1-e^{-\alpha i}x)^{-2}e^{-\alpha i},$$

$$2i\varphi''(x) = 1.2(1-e^{\alpha i}x)^{-3}e^{2\alpha i} - 1.2(1-e^{-\alpha i}x)^{-3}e^{-2\alpha i},$$

$$2i\varphi'''(x) = 1.2.3(1-e^{\alpha i}x)^{-4}e^{3\alpha i} - 1.2.3(1-e^{-\alpha i}x)^{-4}e^{-3\alpha i},$$

u. s. w., so daſs allgemein

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(1-e^{\alpha i}x)^{-(n+1)}e^{n\alpha i}}{2i} - \frac{(1-e^{-\alpha i}x)^{-(n+1)}e^{-n\alpha i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{n\alpha i}}{2i(1-e^{\alpha i}x)^{n+1}} - \frac{e^{-n\alpha i}}{2i(1-e^{-\alpha i}x)^{n+1}}$$

$$= \frac{e^{n\alpha i}(1-e^{-\alpha i}x)^{n+1} - e^{-n\alpha i}(1-e^{\alpha i}x)^{n+1}}{2i[1-(e^{\alpha i}+e^{-\alpha i})x+x^2]^{n+1}}$$

$$= \frac{e^{n\alpha i}(1-e^{-\alpha i}x)^{n+1} - e^{-n\alpha i}(1-e^{\alpha i}x)^{n+1}}{2i(1-2x\cos\alpha+x^2)^{n+1}}$$

ist.

Ganz auf ähnliche Art wie vorher findet man nun

$$e^{n\alpha i}(1-e^{-\alpha i}x)^{n+1} - e^{-n\alpha i}(1-e^{\alpha i}x)^{n+1} = 2i\sum_{\mu=0}^{\mu=n+1}(-1)^{\mu}P_{n+1}^{\mu}x^{\mu}\sin(n-\mu)\alpha,$$

und es ist also

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\Pi(n)} = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1}(-1)^{\mu}P_{n+1}^{\mu}x^{\mu}\sin(n-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{n+1}},$$ oder

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\Pi(n-1)} = n\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1}(-1)^{\mu}P_{n+1}^{\mu}x^{\mu}\sin(n-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{n+1}}.$$

Folglich ist nach §. 12. und §. 17., wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit, d. i.

$$-1 < x < +1$$

ist und k eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$1^k x\sin\alpha + 2^k x^2\sin 2\alpha + 3^k x^3\sin 3\alpha + 4^k x^4\sin 4\alpha + \ldots$$

$$= 1(-1)^1 x\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=2}(-1)^{\mu}P_2^{\mu}x^{\mu}\sin(1-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^{\mu}P_0^{\mu-1}\mu^{k-1}$$

$$+ 2(-1)^2 x^2\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=3}(-1)^{\mu}P_3^{\mu}x^{\mu}\sin(2-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^3}\sum_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^{\mu}P_1^{\mu-1}\mu^{k-1}$$

$$+ 3(-1)^3 x^3\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=4}(-1)^{\mu}P_4^{\mu}x^{\mu}\sin(3-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^4}\sum_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^{\mu}P_2^{\mu-1}\mu^{k-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ k(-1)^k x^k\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=k+1}(-1)^{\mu}P_{k+1}^{\mu}x^{\mu}\sin(k-\mu)\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{k+1}}\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^{\mu}P_{k-1}^{\mu-1}\mu^{k-1}.$$

§. 20.

Es hat nun nach dem Bisherigen, unter der Voraussetzung, dafs sich die Reihe $A,\ A_1x,\ A_2x^2,\ A_3x^3,\ A_4x^4,\ \ldots$ summiren läfst, wenn

$$\varphi(n) = a + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \ldots + a_k n^k$$

ist, auch gar keine Schwierigkeit, die Reihe

$$A\varphi(0),\ A_1\varphi(1)x,\ A_2\varphi(2)x^2,\ \ldots,\ A_n\varphi(n)x^n,\ \ldots$$ zu summiren.

Man gelangt nämlich mittels des in §. 12. bewiesenen Theorems sehr leicht zu dem folgenden Satze:

Wenn für jedes x, zwischen zwei bestimmten Grenzen,

$$f(x) = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots$$

und, indem k eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\varphi(n) = a + a_1n + a_2n^2 + a_3n^3 + \ldots + a_kn^k$$

ist, so ist für jedes x zwischen denselben Grenzen:

$$A\varphi(0) + A_1\varphi(1)x + A_2\varphi(2)x^2 + A_3\varphi(3)x^3 + \ldots + A_n\varphi(n)x^n + \ldots$$

$$= af(x) + xf'(x)\frac{(-1)^1}{\Pi 0}\sum_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu(a_1\mu^0 + a_2\mu^1 + a_3\mu^2 + a_4\mu^3 + \ldots + a_k\mu^{k-1})P_0^{\mu-1}$$

$$+ x^2f''(x)\frac{(-1)^2}{\Pi 1}\sum_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu(a_2\mu^1 + a_3\mu^2 + a_4\mu^3 + \ldots + a_k\mu^{k-1})P_1^{\mu-1}$$

$$+ x^3f'''(x)\frac{(-1)^3}{\Pi 2}\sum_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu(a_3\mu^2 + a_4\mu^3 + \ldots + a_k\mu^{k-1})P_2^{\mu-1}$$

$$+ x^4f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{(-1)^4}{\Pi 3}\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu(a_4\mu^3 + \ldots + a_k\mu^{k-1})P_3^{\mu-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ x^kf^{(k)}(x)\frac{(-1)^k}{\Pi(k-1)}\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu a_k\mu^{k-1}P_{k-1}^{\mu-1}.$$

Wenn also z. B. der absolute Werth von x kleiner als die Einheit, d. i. wenn $-1 < x < +1$ ist, so ist, wie aus §. 14. hervorgeht,

$$\varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \varphi(3)x^3 + \ldots + \varphi(n)x^n + \ldots$$

$$= a(1-x)^{-1} + 1x(1-x)^{-2}(-1)^1\sum_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu(a_1\mu^0 + a_2\mu^1 + a_3\mu^2 + a_4\mu^3 + \ldots$$
$$\ldots + a_k\mu^{k-1})P_0^{\mu-1}$$

$$+ 2x^2(1-x)^{-3}(-1)^2\sum_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu(a_2\mu^1 + a_3\mu^2 + a_4\mu^3 + \ldots$$
$$\ldots + a_k\mu^{k-1})P_1^{\mu-1}$$

$$+ 3x^3(1-x)^{-4}(-1)^3\sum_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu(a_3\mu^2 + a_4\mu^3 + \ldots + a_k\mu^{k-1})P_2^{\mu-1}$$

$$+ 4x^4(1-x)^{-5}(-1)^4\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu(a_4\mu^3 + \ldots + a_k\mu^{k-1})P_3^{\mu-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ kx^k(1-x)^{-(k+1)}(-1)^k\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu a_k\mu^{k-1}P_{k-1}^{\mu-1}.$$

§. 21.

Wir wollen nun auch die Summation der imaginären Reihe

$$1,\quad 1^k(x+y\sqrt{-1}),\quad 2^k(x+y\sqrt{-1})^2,\quad 3^k(x+y\sqrt{-1})^3,\quad \ldots$$

in den Fällen, wo dieselbe möglich ist, versuchen.

Man setze

$$x+y\sqrt{-1} = \varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1}),$$

so hat man zur Bestimmung von ϱ und θ die beiden Gleichungen

$$x = \varrho\cos\theta,\quad y = \varrho\sin\theta.$$

Quadrirt man diese beiden Gleichungen und addirt die Quadrate dann zu einander, so erhält man

$$\varrho^2 = x^2+y^2,\quad \varrho = \sqrt{(x^2+y^2)},$$

und zur Bestimmung von θ hat man dann ferner

$$\theta = \operatorname{arc}\cos\frac{x}{\varrho} = \operatorname{arc}\sin\frac{y}{\varrho}.$$

Unter der Voraussetzung, dafs

$$x^2+y^2<1,$$

ist nun nach §. 18. und §. 19.

$$\begin{aligned}
&1+1^k\varrho\cos\theta+2^k\varrho^2\cos2\theta+3^k\varrho^3\cos3\theta+\ldots\\
&=1\\
&+1(-1)^1\varrho\,\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=2}(-1)^\mu P_2^\mu\varrho^\mu\cos(1-\mu)\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu P_0^{\mu-1}\mu^{k-1}\\
&+2(-1)^2\varrho^2\,\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=3}(-1)^\mu P_3^\mu\varrho^\mu\cos(2-\mu)\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^3}\sum_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu P_1^{\mu-1}\mu^{k-1}\\
&+3(-1)^3\varrho^3\,\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=4}(-1)^\mu P_4^\mu\varrho^\mu\cos(3-\mu)\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^4}\sum_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu P_2^{\mu-1}\mu^{k-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+k(-1)^k\varrho^k\,\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=k+1}(-1)^\mu P_{k+1}^\mu\varrho^\mu\cos(k-\mu)\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{k+1}}\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1}\mu^{k-1},
\end{aligned}$$

$$1^k\varrho\sin\theta+2^k\varrho^2\sin2\theta+3^k\varrho^3\sin3\theta+\ldots.$$

$$=1(-1)^1\varrho\,\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=2}(-1)^\mu P_2^\mu\varrho^\mu\sin(1-\mu)\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^2}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu P_0^{\mu-1}\mu^{k-1}$$

$$+2(-1)^2\varrho^2\,\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=3}(-1)^\mu P_3^\mu\varrho^\mu\sin(2-\mu)\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^3}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu P_1^{\mu-1}\mu^{k-1}$$

$$+3(-1)^3\varrho^3\,\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=4}(-1)^\mu P_4^\mu\varrho^\mu\sin(3-\mu)\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^4}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu P_2^{\mu-1}\mu^{k-1}$$

$$+k(-1)^k\varrho^k\,\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=k+1}(-1)^\mu P_{k+1}^\mu\varrho^\mu\sin(k-\mu)\theta}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{k+1}}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1}\mu^{k-1}.$$

Also ist, immer unter der Voraussetzung, daſs $x^2+y^2<1$ ist, offenbar

$$1+1^k\varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})+2^k\varrho^2(\cos2\theta+\sin2\theta\sqrt{-1})$$
$$+3^k\varrho^3(\cos3\theta+\sin3\theta\sqrt{-1})+\ldots$$

$$=1+1^k(x+y\sqrt{-1})+2^k(x+y\sqrt{-1})^2+3^k(x+y\sqrt{-1})^3+4^k(x+y\sqrt{-1})^4+\ldots$$

$$=1$$

$$+1(-1)^1\varrho\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu P_0^{\mu-1}\mu^{k-1}.\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=2}(-1)^\mu P_2^\mu\varrho^\mu[\cos(1-\mu)\theta+\sin(1-\mu)\theta\sqrt{-1}]}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^2}$$

$$+2(-1)^2\varrho^2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu P_1^{\mu-1}\mu^{k-1}.\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=3}(-1)^\mu P_3^\mu\varrho^\mu[\cos(2-\mu)\theta+\sin(2-\mu)\theta\sqrt{-1}]}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^3}$$

$$+3(-1)^3\varrho^3\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu P_2^{\mu-1}\mu^{k-1}.\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=4}(-1)^\mu P_4^\mu\varrho^\mu[\cos(3-\mu)\theta+\sin(3-\mu)\theta\sqrt{-1}]}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+k(-1)^k\varrho^k\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1}\mu^{k-1}.\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=k+1}(-1)^\mu P_{k+1}^\mu\varrho^\mu[\cos(k-\mu)\theta+\sin(k-\mu)\theta\sqrt{-1}]}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{k+1}}$$

Es ist aber allgemein

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n+1}(-1)^\mu P_{n+1}^\mu \varrho^\mu \{\cos(n-\mu)\theta + \sin(n-\mu)\theta\sqrt{-1}\}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=n+1}(-1)^\mu P_{n+1}^\mu \varrho^\mu (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{n-\mu}$$

$$\begin{aligned}= \quad & (-1)^0 P_{n+1}^0 \varrho^0 (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^n \\ & + (-1)^1 P_{n+1}^1 \varrho^1 (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{n-1} \\ & + (-1)^2 P_{n+1}^2 \varrho^2 (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{n-2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^{n+1} P_{n+1}^{n+1} \varrho^{n+1} (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^n \{ & (-1)^0 P_{n+1}^0 \varrho^0 (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^0 \\ & + (-1)^1 P_{n+1}^1 \varrho^1 (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{-1} \\ & + (-1)^2 P_{n+1}^2 \varrho^2 (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{-2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^{n+1} P_{n+1}^{n+1} \varrho^{n+1} (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{-(n+1)}\}\end{aligned}$$

$$= (\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^n \{1 - \varrho(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})^{-1}\}^{n+1},$$

nach dem binomischen Lehrsatze. Also ist

$$\varrho^n \frac{\sum_{\mu=0}^{\mu=n+1}(-1)^\mu P_{n+1}^\mu \varrho^\mu \{\cos(n-\mu)\theta + \sin(n-\mu)\theta\sqrt{-1}\}}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{\varrho^n(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})^n\,[1-\varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})^{-1}]^{n+1}}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{n+1}}$$

$$= (x+y\sqrt{-1})^n \left\{\frac{1-\varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})^{-1}}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2}\right\}^{n+1}$$

Nun ist aber

$$1-\varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})^{-1} = 1-\varrho\left(\frac{x+y\sqrt{-1}}{\varrho}\right)^{-1}$$

$$= 1-\varrho^2(x+y\sqrt{-1})^{-1} = 1-\varrho^2\frac{x-y\sqrt{-1}}{(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})}$$

$$= 1-\varrho^2\frac{x-y\sqrt{-1}}{x^2+y^2} = 1-x+y\sqrt{-1}.$$

Ferner ist

$$1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2 = 1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2(\cos\theta^2+\sin\theta^2)$$

$$= 1-2x+x^2+y^2 = (1-x)^2+y^2,$$

uud folglich

$$\frac{1-\varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})^{-1}}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2} = \frac{1-x+y\sqrt{-1}}{(1-x)^2+y^2}.$$

Da aber

$$(1-x+y\sqrt{-1})(1-x-y\sqrt{-1}) = (1-x)^2+y^2$$

ist, so ist
$$\frac{(1-x)^2+y^2}{1-x+y\sqrt{-1}}=1-x-y\sqrt{-1} \text{ oder}$$
$$\frac{1-x+y\sqrt{-1}}{(1-x)^2+y^2}=(1-x-y\sqrt{-1})^{-1},$$
und folglich
$$\left\{\frac{1-\varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})^{-1}}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2}\right\}^{n+1}=(1-x-y\sqrt{-1})^{-(n+1)}.$$
Also ist nach dem Obigen
$$\varrho^n\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=n+1}(-1)^\mu P^\mu_{n+1}\varrho^\mu\{\cos(n-\mu)\theta+\sin(n-\mu)\theta\sqrt{-1}\}}{(1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2)^{n+1}}$$
$$=(x+y\sqrt{-1})^n(1-x-y\sqrt{-1})^{-(n+1)}$$
und folglich, wenn
$$x^2+y^2<1$$
ist,
$$1+1^k(x+y\sqrt{-1})+2^k(x+y\sqrt{-1})^2+3^k(x+y\sqrt{-1})^3+\ldots.$$
$$=1$$
$$+1(x+y\sqrt{-1})(1-x-y\sqrt{-1})^{-2}(-1)^1\sum_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu P_0^{\mu-1}\mu^{k-1}$$
$$+2(x+y\sqrt{-1})^2(1-x-y\sqrt{-1})^{-3}(-1)^2\sum_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu P_1^{\mu-1}\mu^{k-1}$$
$$+3(x+y\sqrt{-1})^3(1-x-y\sqrt{-1})^{-4}(-1)^3\sum_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu P_2^{\mu-1}\mu^{k-1}$$
$$+4(x+y\sqrt{-1})^4(1-x-y\sqrt{-1})^{-5}(-1)^4\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu P_3^{\mu-1}\mu^{k-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+k(x+y\sqrt{-1})^k(1-x-y\sqrt{-1})^{-(k+1)}(-1)^k\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu P_{k-1}^{\mu-1}\mu^{k-1},$$
womit §. 14. zu vergleichen ist.

Der Fall, wenn $k=0$ ist, mufs noch besonders betrachtet werden.

Wenn $x^2+y^2<1$ ist, so ist nach §. 17.
$$1+\varrho\cos\theta+\varrho^2\cos2\theta+\varrho^3\cos3\theta+\ldots.=\frac{1-\varrho\cos\theta}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2},$$
$$\varrho\sin\theta+\varrho^2\sin2\theta+\varrho^3\sin3\theta+\ldots.=\frac{\varrho\sin\theta}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2}.$$
Also ist, wenn $x^2+y^2<1$ ist,
$$1+\varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})+\varrho^2(\cos2\theta+\sin2\theta\sqrt{-1})+\ldots.$$
$$=1+(x+y\sqrt{-1})+(x+y\sqrt{-1})^2+(x+y\sqrt{-1})^3+\ldots.$$
$$=\frac{1-\varrho(\cos\theta-\sin\theta\sqrt{-1})}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2}.$$

Aber

$$1-\varrho(\cos\theta-\sin\theta\sqrt{-1}) = 1-(x-y\sqrt{-1}),$$
$$1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2 = (1-x)^2+y^2.$$

Also

$$\frac{1-\varrho(\cos\theta-\sin\theta\sqrt{-1})}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2} = \frac{1-x+y\sqrt{-1}}{(1-x)^2+y^2}$$
$$= \frac{1-x+y\sqrt{-1}}{(1-x+y\sqrt{-1})(1-x-y\sqrt{-1})} = (1-x-y\sqrt{-1})^{-1}.$$

Folglich ist, unter der Voraussetzung, dafs $x^2+y^2<1$ ist,

$$(1-x-y\sqrt{-1})^{-1}$$
$$= 1+(x+y\sqrt{-1})+(x+y\sqrt{-1})^2+(x+y\sqrt{-1})^3+\ldots.$$

§. 22.

Setzen wir nun wieder

$$\Phi(n) = a+a_1n+a_2n^2+a_3n^3+\ldots.+a_kn^k,$$

so ergiebt sich auf ganz ähnliche Art wie in §. 20., unter der Voraussetzung, dafs

$$x^2+y^2<1$$

ist:

$$\Phi(0)+\Phi(1)(x+y\sqrt{-1})+\Phi(2)(x+y\sqrt{-1})^2+\Phi(3)(x+y\sqrt{-1})^3+\ldots.$$
$$= a(1-x-y\sqrt{-1})^{-1}$$
$$+1(x+y\sqrt{1-})(1-x-y\sqrt{-1})^{-2}(-1)^1\sum_{\mu=1}^{\mu=1}(-1)^\mu(a_1\mu^0+a_2\mu^1+a_3\mu^2+a_4\mu^3+\ldots$$
$$\ldots+a_k\mu^{k-1})P_0^{\mu-1}$$
$$+2(x+y\sqrt{-1})^2(1-x-y\sqrt{-1})^{-3}(-1)^2\sum_{\mu=1}^{\mu=2}(-1)^\mu(a_2\mu^1+a_3\mu^2+a_4\mu^3+\ldots$$
$$\ldots+a_k\mu^{k-1})P_1^{\mu-1}$$
$$+3(x+y\sqrt{-1})^3(1-x-y\sqrt{-1})^{-4}(-1)^3\sum_{\mu=1}^{\mu=3}(-1)^\mu(a_3\mu^2+a_4\mu^3+\ldots.$$
$$\ldots+a_k\mu^{k-1})P_2^{\mu-1}$$
$$+4(x+y\sqrt{-1})^4(1-x-y\sqrt{-1})^{-5}(-1)^4\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu(a_4\mu^3+\ldots.+a_k\mu^{k-1})P_3^{\mu-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+k(x+y\sqrt{-1})^k(1-x-y\sqrt{-1})^{-(k+1)}(-1)^k\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(-1)^\mu a_k\mu^{k-1}P_{k-1}^{\mu-1}.$$

§. 23.

Um die Nothwendigkeit der bei den vorigen Summationen gemachten Einschränkungen in noch helleres Licht zu setzen, wollen wir noch den folgenden Satz beweisen:

Wenn die Reihe

$$A,\ A_1x,\ A_2x^2,\ A_3x^3,\ \ldots\ A_nx^n,\ \ldots$$

divergirt, so divergirt, vorausgesetzt, dafs k eine positive ganze Zahl ist, jederzeit auch die Reihe

$$A,\ 1^kA_1x,\ 2^kA_2x^2,\ 3^kA_3x^3,\ \ldots\ n^kA_nx^n,\ \ldots$$

Um diesen Satz zu beweisen, sei

$$A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n = S_n,$$
$$A+1^kA_1x+2^kA_2x^2+3^kA_3x^3+\ldots+n^kA_nx^n = S_n',$$

so ist

$$S_{n+m}-S_n$$
$$= (A_{n+1}+A_{n+2}x+A_{n+3}x^2+\ldots+A_{n+m}x^{m-1})x^{n+1}$$

und

$$S'_{n+m}-S'_n$$
$$= \{(n+1)^kA_{n+1}+(n+2)^kA_{n+2}x+\ldots+(n+m)^kA_{n+m}x^{m-1}\}x^{n+1}$$

oder

$$S'_{n+m}-S'_n$$
$$= \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^kA_{n+1}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^kA_{n+2}x+\ldots+\left(1+\frac{m}{n}\right)^kA_{n+m}x^{m-1}\right\}n^kx^{n+1}.$$

Da nun

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^kA_{n+1}}{A_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k,$$

$$\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^kA_{n+2}x}{A_{n+2}x} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^k,$$

$$\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^kA_{n+3}x^2}{A_{n+3}x^2} = \left(1+\frac{3}{n}\right)^k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\left(1+\frac{m}{n}\right)^kA_{n+m}x^{m-1}}{A_{n+m}x^{m-1}} = \left(1+\frac{m}{n}\right)^k$$

ist, und die Gröfsen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k,\quad \left(1+\frac{2}{n}\right)^k,\quad \left(1+\frac{3}{n}\right)^k,\quad \ldots\quad \left(1+\frac{m}{n}\right)^k$$

sich, wenn n wächst, der Einheit immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, so kommen, wenn n wächst, die Gröfsen

$$A_{n+1} \text{ und } \left(1+\frac{1}{n}\right)^k A_{n+1},$$

$$A_{n+2}x \text{ und } \left(1+\frac{2}{n}\right)^k A_{n+2}x,$$

$$A_{n+3}x^2 \text{ und } \left(1+\frac{3}{n}\right)^k A_{n+3}x^2,$$

$$A_{n+m}x^{m-1} \text{ und } \left(1+\frac{m}{n}\right)^k A_{n+m}x^{m-1}$$

offenbar einander immer näher und näher und können, wenn man nur n grofs genug werden läfst, einander bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden.

Also nähern sich, wenn n wächst, auch die Gröfsen

$$A_{n+1}+A_{n+2}x+A_{n+3}x^2+\ldots+A_{n+m}x^{m-1}$$

und

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k A_{n+1}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^k A_{n+2}x+\ldots+\left(1+\frac{m}{n}\right)^k A_{n+m}x^{m-1},$$

die wir der Kürze wegen durch P_{n+1} und Q_{n+1} bezeichnen wollen, offenbar immer mehr und mehr und können, wenn man nur n grofs genug werden läfst, einander bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden. Daher nähert sich, wenn n wächst, der Bruch

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},$$

und folglich auch der Bruch

$$\frac{P_{n+1}x^{n+1}}{Q_{n+1}x^{n+1}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

der Einheit immer mehr und mehr und kann derselben, wenn man nur n grofs genug werden läfst, beliebig nahe gebracht werden. Folglich nähert sich die Gröfse $Q_{n+1}x^{n+1}$, d. i. die Gröfse

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k A_{n+1}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^k A_{n+2}x+\ldots+\left(1+\frac{m}{n}\right)^k A_{n+m}x^{m-1}\right\}x^{n+1},$$

wenn n wächst, der Gröfse $P_{n+1}x^{n+1}$, d. i. der Gröfse

$$(A_{n+1}+A_{n+2}x+A_{n+3}x^2+\ldots+A_{n+m}x^{m-1})x^{n+1}$$

oder der Gröfse

$$S_{n+m}-S_n$$

immer mehr und mehr und kann derselben, wenn man nur n grofs genug werden läfst, beliebig nahe gebracht werden. Da nun nach der Voraussetzung die Reihe

$$A, \quad A_1x, \quad A_2x^2, \quad A_3x^3, \quad \ldots \quad A_nx^n, \quad \ldots$$

divergirt, so nähert sich die Gröfse

$$S_{n+m} - S_n,$$

wenn n wächst, der Null nicht immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade (*Cauchy cours d'analyse de l'école royale polytechnique, 1*[re] *partie, Paris 1821, p. 125.* und *Exercices de mathématiques, 20*[me] *livraison, p. 221.*). Also nähert sich nach dem Obigen offenbar auch die Gröfse

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k A_{n+1} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^k A_{n+2}\, x + \ldots + \left(1+\frac{m}{n}\right)^k A_{n+m}\, x^{m-1}\right\} x^{n+1},$$

und folglich augenscheinlich auch die Gröfse

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k A_{n+1} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^k A_{n+2}\, x + \ldots + \left(1+\frac{m}{n}\right)^k A_{n+m}\, x^{m-1}\right\} n^k x^{n+1}$$

oder die Gröfse

$$S'_{n+m} - S'_n,$$

wenn n wächst, der Null nicht immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade; woraus nach dem allgemeinen Begriffe der Divergenz der Reihen (a. a. O.) unmittelbar folgt, dafs die Reihe

$$A, \quad 1^k A_1 x, \quad 2^k A_2 x^2, \quad 3^k A_3 x^3, \quad \ldots \quad n^k A_n x^n, \quad \ldots$$

divergirt; wie bewiesen werden sollte.

§. 24.

Die Reihe

$$1, \quad \pm 1, \quad 1, \quad \pm 1, \quad 1, \quad \pm 1, \quad 1, \quad \ldots$$

ist offenbar eine divergente Reihe.

Da ferner

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

ist und, wenn der absolute Werth von x gröfser als die Einheit ist, der absolute Werth von

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

offenbar in's Unendliche wächst, wenn n in's Unendliche wächst, so ist klar, dafs die Reihe

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \quad x^5, \quad \ldots$$

auch jederzeit divergirt, wenn der absolute Werth von x gröfser als die Einheit ist.

Folglich divergirt nach §. 23., wenn der absolute Werth von x nicht kleiner als die Einheit ist, auch jederzeit die Reihe

$$1,\ 1^k x,\ 2^k x^2,\ 3^k x^3,\ 4^k x^4,\ 5^k x^5\ \ldots .$$

und ist daher in dem in Rede stehenden Falle keiner Summation fähig.

Dafs, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit oder

$$-1 < x < +1$$

ist, die vorstehende Reihe jederzeit summirt werden kann, ist in §. 14. gezeigt worden.

Tafel für C_n^k.

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
3			1	6	25	90	301	966	3025	9330	28501	86526
4				1	10	65	350	1701	7770	34105	145750	611501
5					1	15	140	1050	6951	42525	246730	1379400
6						1	21	266	2646	22827	179487	1323652
7							1	28	462	5880	63987	627396
8								1	36	750	11880	159027
9									1	45	1155	22275
10										1	55	1705
11											1	66
12												1

Beme

Im 18te
von mir
zu beme

Nun ist,
$\frac{1}{(2+x)^{4+}}$
der For
Summe
Dieses
mathém.
kungen

dular-

4ten Hefte
, No. 9. im
'anzigsten

ıctionen
n

Berech-
Es giebt
:ntwick-
Functio-
ers aus-
sind das
nd statt
derselben ihre Amplituden bekannt, woraus jene Gröfsen und der Werth des Integrals selbst zu berechnen sind. In diesen Fällen führt die Benutzung der nun zu entwickelnden Reihen, welche im Allgemeinen einen hohen Grad der Convergenz haben, ziemlich schnell zur Ermittelung des

Beme

Im 18te
von mir
zu beme

Nun ist,

$$\frac{1}{(2+x)^{4+}}$$

der For

Summe

Dieses
mathém.
kungen



$$2.\quad\begin{cases}
\Phi_1 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi, \\
\Phi_2 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\sin^2 a}, \\
\Phi_3 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a}, \\
\Phi_4 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\sin^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{snc}^6 a}, \\
\Phi_5 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{snc}^6 a} \\
\qquad\qquad - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\lambda^4(\varphi)}{\operatorname{snc}^8 a} \\
\text{u. s. w.}
\end{cases}$$

Hat man eine Tabelle, aus welcher man die Werthe von $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$, $\lambda^4(\varphi)$ u. s. w. für jeden Werth von φ entnehmen kann, so ist die Berechnung der Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 etc. so einfach, als sie nur gewünscht werden kann.

Mit Bezug auf die vorstehenden Werthe haben wir nun die schnell convergirende Reihe

$$3.\quad '\mathfrak{S}(u,a) = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\Big(\Phi_1 + \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a.\Phi_2 + \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a.\Phi_3 + \frac{1.3.5}{2.4.4}k^6 \operatorname{snc}^6 a.\Phi_4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}k^8 \operatorname{snc}^8 a.\Phi_5 + \ldots\Big),$$

nach welcher man das Integral $'\mathfrak{S}(u,a)$ schon sehr leicht berechnen kann. Wir formen diese Reihe noch um, indem wir die Werthe von Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. substituiren. Der hyperbolische Arcus ψ erhält dann zum Coëfficienten

$$\operatorname{dnc} a\Big(1 + \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a + \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a + \ldots\Big),$$

und da die eingeklammerte Reihe $= \frac{1}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{snc}^2 a)}} = \frac{1}{\operatorname{dnc} a}$ ist, so ist der Coëfficient von ψ gleich Eins, und die neue Reihe hat überhaupt die Form

$$4.\quad '\mathfrak{S}(u,a) = \psi - \overset{0}{\varDelta}.\varphi - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi) - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi) - \ldots$$

Man findet aber

$$\overset{0}{\varDelta} = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\Big(1 + \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a + \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a + \ldots\Big),$$

$$\overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}.\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.\frac{1}{\operatorname{snc}^2 a}\Big(\tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a + \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a + \ldots\Big),$$

$$\overset{2}{\varDelta} = \frac{1.3}{2.4}.\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.\frac{1}{\operatorname{snc}^4 a}\Big(\frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a + \ldots\Big)$$

u. s. w.

Die eingeklammerten Factoren lassen sich sämmtlich summiren, wodurch wir erhalten:

$$5.\quad\begin{cases}
\overset{0}{\Delta} = \dfrac{1}{\mathrm{tnc}\,a}, \\[2mm]
\overset{1}{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{snc}^2 a}\left(\dfrac{1}{\mathrm{dnc}\,a} - 1\right)\dfrac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}, \\[2mm]
\overset{2}{\Delta} = \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{snc}^4 a}\left(\dfrac{1}{\mathrm{dnc}\,a} - 1 - \frac{1}{2}k^2\,\mathrm{snc}^2 a\right)\dfrac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a} \\[2mm]
\overset{3}{\Delta} = \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{snc}^6 a}\left(\dfrac{1}{\mathrm{dnc}\,a} - 1 - \frac{1}{2}k^2\,\mathrm{snc}^2 a - \dfrac{1.3}{2.4}k^4\,\mathrm{snc}^4 a\right)\dfrac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}, \\[2mm]
\overset{4}{\Delta} = \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{snc}^8 a}\left(\dfrac{1}{\mathrm{dnc}\,a} - 1 - \frac{1}{2}k^2\,\mathrm{snc}^2 a - \dfrac{1.3}{2.4}k^4\,\mathrm{snc}^4 a\right. \\
\qquad\qquad\left. - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}k^6\,\mathrm{snc}^6 a\right)\dfrac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a} \\
\qquad \text{u. s. w.}
\end{cases}$$

Diese Ausdrücke schreiten nach einem einfachen Gesetze fort; ihre Berechnung ist leicht; auch convergiren sie gegen die Grenze Null, und da die Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$ etc. ebenfalls gegen die Grenze Null convergiren, so hat die Reihe (4.) eine überaus rasche Convergenz; ihr Anfangsglied ψ wird unendlich, wenn $\tan\!\mathrm{g}\,\varphi = \mathrm{tnc}\,a$ oder $u + a = k$ ist. Man hat übrigens auch

$$6.\quad\begin{cases}
\overset{0}{\Delta} = \dfrac{1}{\mathrm{tnc}\,a}, \\[2mm]
\overset{1}{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{\overset{0}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1}{2}\cdot\dfrac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a}, \\[2mm]
\overset{2}{\Delta} = \frac{3}{4}\cdot\dfrac{\overset{1}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.k^2.\dfrac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a}, \\[2mm]
\overset{3}{\Delta} = \frac{5}{6}\cdot\dfrac{\overset{2}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}k^4.\dfrac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a}, \\[2mm]
\overset{4}{\Delta} = \frac{7}{8}\cdot\dfrac{\overset{3}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.k^6.\dfrac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a}, \\[2mm]
\overset{5}{\Delta} = \frac{9}{10}\cdot\dfrac{\overset{4}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \dfrac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.k^8.\dfrac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a}, \\
\qquad \text{u. s. w.}
\end{cases}$$

und hiernach können die Coëfficienten $\overset{1}{\Delta}$, $\overset{2}{\Delta}$, $\overset{3}{\Delta}$, $\overset{4}{\Delta}$ etc. auch bequem recurrirend berechnet werden. Hat man keine Tabelle für die Werthe der Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$ etc., so erhält man, wenn man die Werthe (5. §. 101.) substituirt und

$$\Delta = \overset{0}{\Delta} + \overset{1}{\Delta} + \overset{2}{\Delta} + \overset{3}{\Delta} + \overset{4}{\Delta} + \text{ etc.}$$

setzt, auch noch die Reihe

$$7.\quad '\mathfrak{S}(u,a) = \psi - \Delta.\Phi + (\Delta - \overset{0}{\Delta}).\sin\Phi\cos\Phi + \tfrac{2}{3}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta}).\sin^3\Phi\cos\Phi$$
$$+ \frac{2.4}{3.5}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta}).\sin^5\Phi\cos\Phi + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta} - \overset{3}{\Delta}).\sin^7\Phi\cos\Phi + \ldots\ldots$$

Substituirt man aber die in §. 100. gefundenen Werthe, so erhält man

$$'\mathfrak{S}(u,a) =$$

$$\psi - \Delta.\Phi + (\tfrac{1}{2}\overset{1}{\Delta} + \tfrac{2}{3}\overset{2}{\Delta} + \tfrac{3}{4}\overset{3}{\Delta} + \tfrac{4}{5}\overset{4}{\Delta} + \tfrac{5}{6}\overset{5}{\Delta} + \ldots\ldots).\sin 2\Phi$$
$$- \left(\frac{2.1}{3.4}\overset{2}{\Delta} + \frac{3.2}{4.5}\overset{3}{\Delta} + \frac{4.3}{5.6}\overset{4}{\Delta} + \frac{5.4}{6.7}\overset{5}{\Delta}\ldots\ldots\right).\frac{\sin 4\varphi}{2}$$
$$+ \left(\frac{3.2.1}{4.5.6}\overset{3}{\Delta} + \frac{4.3.2}{5.6.7}\overset{4}{\Delta} + \frac{5.4.3}{6.7.8}\overset{5}{\Delta} + \frac{6.5.4}{7.8.9}\overset{6}{\Delta} + \ldots\ldots\right).\frac{\sin 6\varphi}{3}$$
$$+ \left(\frac{4.3.2.1}{5.6.7.8}\overset{4}{\Delta} + \frac{5.4.3.2}{6.7.8.9}\overset{5}{\Delta} + \frac{6.5.4.3}{7.8.9.10}\overset{6}{\Delta} + \frac{7.6.5.4}{8.9.10.11}\overset{7}{\Delta} + \ldots\ldots\right).\frac{\sin 8\varphi}{4}$$
$$+ \;.$$
$$- \;.$$

Es ist indessen die Rechnung nach dieser Reihe nicht so bequem, als nach den Reihen 3, 4 und 7; zumal dann, wenn man eine Hülfstabelle für die Werthe der Functionen $\lambda^1(\Phi)$, $\lambda^2(\Phi)$, $\lambda^3(\Phi)$ etc. hat.

§. 255.

Reihen für das Integral $'\mathfrak{E}(u,a)$.

Das Integral $'\mathfrak{E}(u,a) = \int_0 \frac{\text{dnc}\,a}{\text{tnc}\,a}.\frac{\partial u}{1 - \frac{\sin^2 u}{\text{snc}^2 a}}$ kann auf ähnliche Art entwickelt werden; indessen lassen sich die Reihen für dasselbe noch leichter aus den Reihen für $'\mathfrak{S}(u,a)$ herleiten. Beachtet man, dafs

$$'\mathfrak{E}(u,a) = {}'\mathfrak{S}(u,a) + \frac{\text{dnc}\,a}{\text{tnc}\,a}.u$$

ist, und nimmt man für u die Reihe $\Phi + \frac{1^2}{2^2}k^2\lambda^1(\Phi) + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4\lambda^2(\Phi) + \ldots$, so hat man

$$'\mathfrak{E}(u,a) = {}'\mathfrak{S}(u,a) + \frac{\text{dnc}\,a}{\text{tnc}\,a}\left(\Phi + \tfrac{1}{2}k^2\,\text{snc}^2 a.\tfrac{1}{2}\frac{\lambda^1(\varphi)}{\text{snc}^2 a} + \frac{1.3}{2.4}k^4\,\text{snc}^4 a\,\frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\text{snc}^4 a}\right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\,\text{snc}^6 a\,\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\text{snc}^6 a} + \ldots\right),$$

d. h. man mufs in der Reihe (3. §. 254.) zu den Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 etc. der Reihe nach die Gröfsen Φ, $\tfrac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\text{snc}^2 a}$, $\frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\text{snc}^4 a}$, $\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\text{snc}^6 a}$ etc.

addiren. Bezeichnen wir nach dieser Abänderung die Functionen durch Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc., so haben wir, wenn wir aus $\varphi = am\,u$ wieder

$$1.\quad \mathfrak{Tang}\,\psi = \frac{\tan\varphi}{\operatorname{tnc} a}$$

berechnen, zunächst $\Phi_0 = \operatorname{tnc} a.\psi$ und dann weiter

$$2.\quad \begin{cases} \Phi_1 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi, \\ \Phi_2 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a}, \\ \Phi_3 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a}, \\ \Phi_4 = \operatorname{tnc} a.\psi - \varphi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{snc}^6 a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Mit Beziehung auf diese Werthe erhalten wir die Reihe

$$3.\quad {}'\mathfrak{E}(u,a) = \operatorname{dnc} a.\psi + \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\Big(\tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a.\Phi_1 + \frac{1.3}{2.4}.k^4 \operatorname{snc}^4 a.\Phi_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.k^6 \operatorname{snc}^6 a.\Phi_3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.k^8 \operatorname{snc}^8 a.\Phi_4 + \ldots\Big).$$

Die Ausdrücke Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. aber sind wieder dieselben, wie in §. 254. Werden sie substituirt, so erhalten wir eine Reihe von der Form

$$4.\quad {}'\mathfrak{E}(u,a) = \psi - \overset{0}{\varDelta}.\varphi - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi) - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi) - \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varphi) - \ldots$$

und die Ausdrücke der Coëfficienten in ihr sind

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = \Big(\frac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1\Big).\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\ \overset{1}{\varDelta} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{snc}^2 a}\Big(\frac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \frac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a\Big).\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \\ \overset{2}{\varDelta} = \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{snc}^4 a}\Big(\frac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \frac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a - \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a\Big).\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}. \\ \overset{3}{\varDelta} = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{snc}^6 a}\Big(\frac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \frac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a - \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a\Big).\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Sie sind verschieden von denen im §. 254.; indessen lassen sich ihre Werthe eben so leicht berechnen. Es ist

$$6.\quad\begin{cases}
\overset{1}{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overset{0}{\Delta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1^2}{2^2}k^2\cdot\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\
\overset{2}{\Delta} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\overset{1}{\Delta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4\cdot\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\
\overset{3}{\Delta} = \frac{5}{6}\cdot\frac{\overset{2}{\Delta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6\cdot\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\
\overset{4}{\Delta} = \frac{7}{8}\cdot\frac{\overset{3}{\Delta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8\cdot\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \\
\text{u. s. w.}
\end{cases}$$

Setzen wir immer $\Delta = \overset{0}{\Delta} + \overset{1}{\Delta} + \overset{2}{\Delta} + \overset{3}{\Delta} + \ldots.$, so erhalten wir durch eine neue Umformung

$$7.\quad '\mathfrak{E}(u, a) = \psi - \Delta.\varphi + (\Delta - \overset{0}{\Delta}).\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{2}{3}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta}).\sin^3\varphi\cos\varphi$$
$$+ \frac{2.4}{3.5}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta}).\sin^5\varphi\cos\varphi + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta} - \overset{3}{\Delta}).\sin^7\varphi\cos\varphi + \ldots.$$

§. 256.

Reihen für das Integral $'\mathfrak{D}(u, a)$.

Es ist $'\mathfrak{D}(u, a) = \int \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a . \partial\varphi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}}{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}}$, wenn $\varphi = am\, u$ gesetzt wird. Da

$$\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}k^8\sin^8\varphi - \ldots.$$

ist, so müssen die Glieder dieser Reihe mit $\frac{\operatorname{tn} a.\operatorname{dn} a.\partial\varphi}{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}}$ multiplicirt und dann integrirt werden. Dadurch erhält man, wenn wieder die Ausdrücke (2. §. 254.) benutzt werden:

$$1.\quad '\mathfrak{D}(u, a) =$$
$$\frac{\psi}{\operatorname{dnc} a} - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \Big(\tfrac{1}{2}k^2\operatorname{snc}^2 a.\Phi_1 + \frac{1}{2.4}k^4\operatorname{snc}^4 a.\Phi_2 + \frac{1.3}{2.4.6}k^6\operatorname{snc}^6 a.\Phi_3$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6.8}k^8\operatorname{snc}^8 a.\Phi_4 + \ldots.\Big).$$

Werden die Werthe von Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. selbst gesetzt, so erhält man eine Reihe, in welcher ψ die Gröfse

$$\frac{1}{\operatorname{dnc} a}\Big(1 - \tfrac{1}{2}k^2\operatorname{snc}^2 a - \frac{1}{2.4}k^4\operatorname{snc}^4 a - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\operatorname{snc}^6 a - \ldots.\Big) = 1,$$

zum Coëfficienten hat; daher haben wir die Reihe

$$2.\quad '\mathfrak{D}(u,a) = \psi + \overset{0}{\varDelta}.\Phi + \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\Phi) + \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\Phi) + \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\Phi) + \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\Phi) + \dots$$

und für die Coëfficienten in ihr die Ausdrücke

$$3.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = (1-\mathrm{dnc}\,a).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{1}{\varDelta} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\mathrm{snc}^2 a}(1-\frac{1}{2}k^2\,\mathrm{snc}^2 a - \mathrm{dnc}\,a).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{2}{\varDelta} = \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\mathrm{snc}^4 a}\left(1-\frac{1}{2}k^2\,\mathrm{snc}^2 a - \frac{1}{2.4}k^4\,\mathrm{snc}^4 a - \mathrm{dnc}\,a\right).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{3}{\varDelta} = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\mathrm{snc}^6 a}\Big(1-\frac{1}{2}k^2\,\mathrm{snc}^2 a - \frac{1}{2.4}k^4\,\mathrm{snc}^4 a \\ \qquad\qquad - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\,\mathrm{snc}^6 a - \mathrm{dnc}\,a\Big).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{4}{\varDelta} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{1}{\mathrm{snc}^8 a}\Big(1-\frac{1}{2}k^2\,\mathrm{snc}^2 a - \frac{1}{2.4}k^4\,\mathrm{snc}^4 a - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\,\mathrm{snc}^6 a \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}k^8\,\mathrm{snc}^8 a - \mathrm{dnc}\,a\Big).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche sich auch recurrirend berechnen lassen, nach den Formeln:

$$4.\quad \begin{cases} \overset{1}{\varDelta} = \frac{1}{2}.\frac{\overset{0}{\varDelta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1^2}{2^2}k^2.\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{2}{\varDelta} = \frac{3}{4}.\frac{\overset{1}{\varDelta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4.\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{3}{\varDelta} = \frac{5}{6}.\frac{\overset{2}{\varDelta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6.\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{4}{\varDelta} = \frac{7}{8}.\frac{\overset{3}{\varDelta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Durch eine neue Umordnung verwandelt sich die Reihe (2.) in

$$5.\quad '\mathfrak{D}(u,a) = \psi + \varDelta.\Phi - (\varDelta - \overset{0}{\varDelta})\sin\Phi\cos\Phi - \frac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta})\sin^3\Phi\cos\Phi \\ - \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta})\sin^5\Phi\cos\Phi - \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta})\sin^7\Phi\cos\Phi \\ - \dots$$

und das Anfangsglied ψ ist wieder bestimmt durch die Formel

$$\mathfrak{Tang}\,\psi = \frac{\mathrm{tang}\,\varphi}{\mathrm{tnc}\,a}.$$

§. 257.

Reihe für das Integral $\mathfrak{S}(u, a)$.

Wird immer $\text{am}\, u = \varphi$ gesetzt, so ist

$$\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{k^2 \,\text{sn}\, a \,\text{cn}\, a \,\text{dn}\, a \sin^2\varphi . \partial\varphi}{(1 - k^2 \,\text{sn}^2 a \sin^2\varphi)\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}}.$$

Es mufs nun jedes Glied der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = 1 + \tfrac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4} k^4 \sin^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 \sin^6\varphi + \dots$$

mit $\frac{k^2 \,\text{sn}\, a \,\text{cn}\, a \,\text{dn}\, a \sin^2\varphi . \partial\varphi}{1 - k^2 \,\text{sn}^2 a \sin^2\varphi}$ multiplicirt und integrirt werden. Setzen wir jetzt

$$1. \quad \text{tang}\,\psi = \text{dn}\, a . \text{tang}\,\varphi,$$

so findet sich $\partial\psi = \frac{\text{dn}\, a . \partial\varphi}{1 - k^2 \,\text{sn}^2 a \sin^2\varphi}$, also rückwärts $\frac{\partial\varphi}{1 - k^2 \,\text{sn}^2 a \sin^2\varphi} = \frac{\partial\psi}{\text{dn}\, a}$. Ferner ist

$$\int_0 \frac{\sin^{2r+2}\varphi . \partial\varphi}{1 - k^2 \,\text{sn}^2 a \sin^2\varphi} = \frac{1}{k^2 \,\text{sn}^2 a} . \int_0 \frac{\sin^{2r}\varphi . \partial\varphi}{1 - k^2 \,\text{sn}^2 a \sin^2\varphi} - \frac{1}{k^2 \,\text{sn}^2 a} . \int_0 \sin^{2r}\varphi . \partial\varphi.$$

Setzen wir nun

$$\int_0 \frac{\sin^{2r}\varphi . \partial\varphi}{1 - k^2 \,\text{sn}^2 a \sin^2\varphi} = \frac{1}{k^{2r} \,\text{sn}^{2r} a} . \Phi_r,$$

so verwandelt sich die vorige Relation in

$$\Phi_{r+1} = \Phi_r - \frac{1.3.5 \dots (2r-1)}{2.4.6 \dots (2r)} . (k \,\text{sn}\, a)^{2r} . \lambda^r(\varphi)$$

und ihr gemäfs findet man

$$2. \quad \begin{cases} \Phi_1 = \frac{\psi}{\text{dn}\, a} - \varphi, \\ \Phi_2 = \frac{\psi}{\text{dn}\, a} - \varphi - \tfrac{1}{2}(k \,\text{sn}\, a)^2 . \lambda^1(\varphi), \\ \Phi_3 = \frac{\psi}{\text{dn}\, a} - \varphi - \tfrac{1}{2}(k \,\text{sn}\, a)^2 . \lambda^1(\varphi) - \frac{1.3}{2.4}(k \,\text{sn}\, a)^4 \lambda^2(\varphi), \\ \Phi_4 = \frac{\psi}{\text{dn}\, a} - \varphi - \tfrac{1}{2}(k \,\text{sn}\, a)^2 . \lambda^1(\varphi) - \frac{1.3}{2.4}(k \,\text{sn}\, a)^4 . \lambda^2(\varphi) \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6}(k \,\text{sn}\, a)^6 . \lambda^3(\varphi), \\ \Phi_5 = \frac{\psi}{\text{dn}\, a} - \varphi - \tfrac{1}{2}(k \,\text{sn}\, a)^2 . \lambda^1(\varphi) - \frac{1.3}{2.4}(k \,\text{sn}\, a)^4 . \lambda^2(\varphi) \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6}(k \,\text{sn}\, a)^6 . \lambda^3(\varphi) - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(k \,\text{sn}\, a)^8 . \lambda^4(\varphi) \end{cases}$$

u. s. w.

Mit Beziehung auf diese Werthe haben wir die Reihe

$$3.\quad \mathfrak{S}(u,a)=\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\left(\Phi_1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_2}{\mathrm{sn}^2a}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\Phi_3}{\mathrm{sn}^4a}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\Phi_4}{\mathrm{sn}^6a}\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\Phi_5}{\mathrm{sn}^8a}+\dots\right),$$

welche, da sich die Gröfsen Φ_1, $\frac{\Phi_2}{\mathrm{sn}^2a}$, $\frac{\Phi_3}{\mathrm{sn}^4a}$, $\frac{\Phi_4}{\mathrm{sn}^6a}$ etc. rasch der Grenze Null nähern, sehr schnell convergirt, aber nicht weiter auf ähnliche Art wie vorhin umgeformt werden kann, so lange der Parameter a reell ist, weil die dabei sich ergebenden unendlichen Reihen divergiren und, wenn man sie summirt, imaginäre Summen gefunden werden.

§. 258.

Reihen für die Integrale $\mathfrak{E}(u,a)$ und $\mathfrak{D}(u,a)$.

Aus der Reihe für $\mathfrak{S}(u,a)$ läfst sich die Reihe für $\mathfrak{E}(u,a)$ herleiten, da $\mathfrak{E}(u,a)=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.u-\mathfrak{S}(u,a)$, oder auch, wegen $\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2a}{\mathrm{dn}^2a}=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a$,

$$\mathfrak{E}(u,a)=$$
$$\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\left[\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2a}{\mathrm{dn}^2a}\cdot\varphi+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{sn}^2a}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\frac{k^4\,\mathrm{sn}^4a}{\mathrm{dn}^2a}\right)\lambda^1(\varphi)+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{\mathrm{sn}^4a}\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{k^6\,\mathrm{sn}^6a}{\mathrm{dn}^2a}\lambda^2(\varphi)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{\mathrm{sn}^6a}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{k^8\,\mathrm{sn}^8a}{\mathrm{dn}^2a}\lambda^3(\varphi)\right)+\dots\right]-\mathfrak{S}(u,a)$$

ist. Wird die vorhin gefundene Reihe für $\mathfrak{S}(u,a)$ substituirt, so erhält man, wenn man zur Abkürzung

$$1.\quad\begin{cases}\Phi_1=-\frac{\psi}{\mathrm{dn}\,a}+\frac{\varphi}{\mathrm{dn}^2a},\\ \Phi_2=-\frac{\psi}{\mathrm{dn}\,a}+\varphi+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(k\,\mathrm{sn}\,a)^2}{\mathrm{dn}^2a}.\lambda^1(\varphi),\\ \Phi_3=-\frac{\psi}{\mathrm{dn}\,a}+\varphi+\tfrac{1}{2}(k\,\mathrm{sn}\,a)^2.\lambda^1(\varphi)+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{(k\,\mathrm{sn}\,a)^4}{\mathrm{dn}^2a}.\lambda^2(\varphi),\\ \Phi_4=-\frac{\psi}{\mathrm{dn}\,a}+\varphi+\tfrac{1}{2}(k\,\mathrm{sn}\,a)^2.\lambda^1(\varphi)+\frac{1.3}{2.4}(k\,\mathrm{sn}\,a)^4.\lambda^2(\varphi)\\ \qquad+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{(k\,\mathrm{sn}\,a)^6}{\mathrm{dn}^2a}.\lambda^3(\varphi)\\ \qquad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

setzt, die rasch convergirende Reihe

$$2.\quad \mathfrak{E}(u,a)=\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\left(\Phi_1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_2}{\mathrm{sn}^2a}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\Phi_3}{\mathrm{sn}^4a}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\Phi_4}{\mathrm{sn}^6a}\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\Phi_5}{\mathrm{sn}^8a}+\dots\right)$$

in welcher die Coëfficienten recurrirend berechnet werden nach den Formeln

$$3.\quad \begin{cases} \Phi_2 = \Phi_1 - \dfrac{k^2 \operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{dn}^2 a}(\varphi - \tfrac{1}{2}\lambda^1(\varphi)), \\ \Phi_3 = \Phi_2 - \dfrac{k^4 \operatorname{sn}^4 a}{\operatorname{dn}^2 a}\left(\tfrac{1}{2}\lambda^1(\varphi) - \dfrac{1.3}{2.4}\lambda^2(\varphi)\right), \\ \Phi_4 = \Phi_3 - \dfrac{k^6 \operatorname{sn}^6 a}{\operatorname{dn}^2 a}\left(\dfrac{1.3}{2.4}\lambda^2(\varphi) - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\lambda^3(\varphi)\right), \\ \Phi_5 = \Phi_4 - \dfrac{k^8 \operatorname{sn}^8 a}{\operatorname{dn}^2 a}\left(\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\lambda^3(\varphi) - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\lambda^4(\varphi)\right) \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Es ist das Integral $\mathfrak{D}(u, a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a . \partial\varphi \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \sin^2\varphi}$, also mufs nun jedes Glied der Reihe $\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}k^8\sin^8\varphi - \ldots$ mit $\frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a . \partial\varphi}{1-k^2\sin^2 a \sin^2\varphi}$ multiplicirt und integrirt werden, wodurch man die Reihe

$$4.\quad \mathfrak{D}(u, a) = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}\Big(\frac{\psi}{\operatorname{dn} u} - \tfrac{1}{2}.\frac{\Phi_1}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{1}{2.4}.\frac{\Phi_2}{\operatorname{sn}^4 a} - \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{\Phi_3}{\operatorname{sn}^6 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{\Phi_4}{\operatorname{sn}^8 a} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}.\frac{\Phi_5}{\operatorname{sn}^{10} a} - \ldots\Big)$$

erhält, in welcher die Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ etc. dieselben sind, wie in §. 257.

Setzt man in der Reihe (4.) ka statt a, ku statt u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, wodurch sich $\operatorname{am} u = \varphi$ in $\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \varphi'$ verwandelt, so verwandelt sich $\mathfrak{D}(u, a)$ in $\mathfrak{C}(u, a)$.

Setzt man also wieder $\operatorname{am} u = \varphi$,

$$5.\quad \begin{cases} \sin\varphi' = k.\sin\varphi \quad \text{und} \\ \operatorname{tang}\psi' = \operatorname{cn} a.\operatorname{tang}\varphi' = \dfrac{k}{k'}\operatorname{cn} a.\operatorname{cnc} u = \dfrac{k \operatorname{cn} a.\sin\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}; \end{cases}$$

ferner

$$6.\quad \begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{\psi'}{\operatorname{cn} a} - \varphi', \\ \Phi_2 = \dfrac{\psi'}{\operatorname{cn} a} - \varphi' - \tfrac{1}{2}\operatorname{sn}^2 a.\lambda^1(\varphi'), \\ \Phi_3 = \dfrac{\psi'}{\operatorname{cn} a} - \varphi' - \tfrac{1}{2}\operatorname{sn}^2 a.\lambda^1(\varphi') - \dfrac{1.3}{2.4}\operatorname{sn}^4 a.\lambda^2(\varphi'), \\ \Phi_4 = \dfrac{\psi'}{\operatorname{cn} a} - \varphi' - \tfrac{1}{2}\operatorname{sn}^2 a.\lambda^1(\varphi') - \dfrac{1.3}{2.4}\operatorname{sn}^4 a.\lambda^2(\varphi') - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{sn}^6 a\lambda^3(\varphi') \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

so ist, mit Beziehung auf diese Werthe:

$$7.\quad \mathfrak{C}(u,a) = k\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\Big(\frac{\psi'}{\text{cn}\,a} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_1}{(k\,\text{sn}\,a)^2} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{\Phi_2}{(k\,\text{sn}\,a)^4} - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{\Phi_3}{(k\,\text{sn}\,a)^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{\Phi_4}{(k\,\text{sn}\,a)^8} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{\Phi_5}{(k\,\text{sn}\,a)^{10}} - \dots\Big).$$

§. 259.

Reihen für das Integral $S(u, a)$.

Setzen wir in den Formeln §. 257. ai statt a, so erhalten wir zunächst

$$1.\quad \text{tang}\,\psi = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{snc}'\,a},$$

wenn wieder $\text{am}\,u = \varphi$ gesetzt wird, und es ist jetzt also $\psi > \varphi$. Die Gröfsen Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. werden nun abwechselnd negativ und positiv. Setzen wir daher überhaupt $(-1)^r.\Phi_r$ statt Φ_r, so erhalten wir

$$2.\quad \begin{cases} -\Phi_1 = \psi.\text{snc}'a - \varphi, \\ +\Phi_2 = \psi.\text{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\text{tnc}'^2 a}, \\ -\Phi_3 = \psi.\text{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\text{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\text{tnc}'^4 a}, \\ +\Phi_4 = \psi.\text{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\text{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\text{tnc}'^4 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\text{tnc}'^6 a}, \\ -\Phi_5 = \psi.\text{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\text{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\text{tnc}'^4 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\text{tnc}'^6 a} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\lambda^4(\varphi)}{\text{tnc}'^8 a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und mit Beziehung auf diese Werthe verwandelt sich die Reihe (3.) in

$$3.\quad S(u,a) = \frac{1}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a}\Big(\Phi_1 + \tfrac{1}{2}.\frac{\Phi_2}{\text{tn}'^2 a} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\Phi_3}{\text{tn}'^4 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\Phi_4}{\text{tn}'^6 a} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\Phi_5}{\text{tn}'^8 a} + \dots\Big)$$

Es läfst sich diese Reihe noch auf eine zweckmäfsige Weise umformen. Setzt man die Werthe für Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, ..., so erhält ψ den Coëfficienten

$$-\frac{1}{\text{sn}'a}\Big(1 - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{\text{tn}'^2 a} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\text{tn}'^4 a} - \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\text{tn}'^6 a} + - \dots\Big)$$
$$= \frac{-1}{\text{sn}'a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\text{tn}'^2 a}\right)}} = -1:$$

daher erhält die umgeformte Reihe die Form

$$4.\quad S(u,a) = -\psi + \overset{0}{\varDelta}.\varphi + \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi) + \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi) + \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi) + \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varphi) + \dots$$

und für die darin enthaltenen Coëfficienten $\overset{0}{\varDelta}, \overset{1}{\varDelta}, \overset{2}{\varDelta}, \dots$ haben wir nun die Ausdrücke

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = \dfrac{1}{\text{sn}'a}, \\ \overset{1}{\varDelta} = -\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\text{tnc}'^2 a}(\text{sn}'a - 1)\cdot\dfrac{1}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a}, \\ \overset{2}{\varDelta} = \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\text{tnc}'^4 a}\left(\text{sn}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\text{tn}'^2 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a}, \\ \overset{3}{\varDelta} = -\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\text{tnc}'^6 a}\left(\text{sn}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\text{tn}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\text{tn}'^4 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a}, \\ \overset{4}{\varDelta} = \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\dfrac{1}{\text{tnc}'^8 a}\left(\text{sn}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\text{tn}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\text{tn}'^4 a}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\text{tn}'^6 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzen wir daher wieder $\varDelta = \overset{0}{\varDelta} + \overset{1}{\varDelta} + \overset{2}{\varDelta} + \overset{3}{\varDelta} + \dots$, so haben wir auch noch

$$6.\quad S(u,a) = -\psi + \varDelta.\varphi - (\varDelta - \overset{0}{\varDelta})\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta})\sin^3\varphi\cos\varphi$$
$$- \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta})\sin^5\varphi\cos\varphi - \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta}).\sin^7\varphi\cos\varphi - \dots$$

§. 260.

Reihen für das Integral $C(u, a)$.

Setzen wir auch in den sich auf $\mathfrak{C}(u, a)$ beziehenden Formeln §. 258. jetzt ai statt a, so erhalten wir wieder

$$1.\quad \text{tang}\,\psi = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{snc}'a},$$

und setzen wir nun

$$2.\quad \begin{cases} \Phi_1 = \psi.\text{snc}'a - \varphi.\text{snc}'^2 a, \\ \Phi_2 = \psi.\text{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\text{snc}'^2 a}{\text{tnc}'^2 a}\lambda^1(\varphi), \\ \Phi_3 = \psi.\text{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\text{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{\text{snc}'^2 a}{\text{tnc}'^2 a}.\lambda^2(\varphi), \\ \Phi_4 = \psi.\text{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\text{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{\lambda^2(\varphi)}{\text{tnc}'^4 a} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{\text{snc}'^2 a}{\text{tnc}'^2 a}.\lambda^3(\varphi), \\ \Phi_5 = \psi.\text{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\text{tnc}'^2 a} - \dfrac{\lambda^2(\varphi)}{\text{tnc}'^4 a} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{\lambda^3(\varphi)}{\text{tnc}'^6 a} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\dfrac{\text{snc}'^2 a}{\text{tnc}'^8 a}.\lambda^4(\varphi) \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

so haben wir die Reihe

$$3.\quad C(u,a) =$$

$$\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\left(\Phi_1-\tfrac{1}{2}.\frac{\Phi_2}{\mathrm{tn}'^2 a}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{\Phi_3}{\mathrm{tn}'^4 a}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\Phi_4}{\mathrm{tn}'^6 a}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\Phi_5}{\mathrm{tn}'^8 a}-+\ldots\right).$$

Werden für $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots.$ die Ausdrücke selbst substituirt, so erhält man

$$4.\quad C(u,a) =$$

$$\psi+\overset{0}{\varDelta}.\varphi+\overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi)+\overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi)+\overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi)+\overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varphi)+\overset{5}{\varDelta}.\lambda^5(\varphi)+\ldots.$$

und für die Coëfficienten in dieser Reihe die Ausdrücke

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = -(\mathrm{sn}'a-\mathrm{cnc}'^2 a).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{1}{\varDelta} = +\tfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a}\left(\mathrm{sn}'a-1+\tfrac{1}{2}.\dfrac{\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{tn}'^2 a}\right).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{2}{\varDelta} = -\dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\left(\mathrm{sn}'a-1+\tfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}-\dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{tn}'^4 a}\right).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{3}{\varDelta} = +\dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^6 a}\left(\mathrm{sn}'a-1+\tfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}-\dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\right. \\ \qquad\qquad \left.+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{tn}'^6 a}\right).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{4}{\varDelta} = -\dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^8 a}\left(\mathrm{sn}'a-1+\tfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}-\dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\right. \\ \qquad\qquad \left.+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^6 a}-\dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\dfrac{\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{tn}'^8 a}\right).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Durch eine neue Umordnung der Reihe (4.) verwandelt sich dieselbe in

$$6.\quad C(u,a) =$$

$$\begin{aligned} \psi+\varDelta.\varphi-(\varDelta-\overset{0}{\varDelta})\sin\varphi\cos\varphi-\tfrac{2}{3}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta}).\sin^3\varphi\cos\varphi \\ -\frac{2.4}{3.5}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta}-\overset{2}{\varDelta}).\sin^5\varphi\cos\varphi \\ -\frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta}-\overset{2}{\varDelta}-\overset{3}{\varDelta}).\sin^7\varphi\cos\varphi-\ldots., \end{aligned}$$

wenn wieder $\varDelta=\overset{0}{\varDelta}+\overset{1}{\varDelta}+\overset{2}{\varDelta}+\overset{3}{\varDelta}+$ etc. genommen wird.

Wir erhalten eine noch etwas gleichmäfsiger fortschreitende Reihe für $C(u,a)$, wenn wir in den Formeln (5. 6. und 7. §. 258.) ebenfalls ai statt a setzen. Berechnen wir nun aus $\mathrm{am}\,u=\varphi$

$$7.\quad \sin\varphi' = k\sin\varphi,\qquad \mathrm{tang}\,\psi' = \frac{\mathrm{tang}\,\varphi'}{\mathrm{cn}'a} = \frac{k\sin\varphi}{\mathrm{cn}'a\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

und noch die Gröfsen

$$8.\quad\begin{cases}
-\Phi_1 = \psi'.\mathrm{cn}'a-\varphi',\\
+\Phi_2 = \psi'.\mathrm{cn}'a-\varphi'+\frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2a.\lambda^1(\varphi),\\
-\Phi_3 = \psi'.\mathrm{cn}'a-\varphi'+\frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2a.\lambda^1(\varphi')-\frac{1.3}{2.4}\mathrm{tn}'^4a.\lambda^2(\varphi'),\\
+\Phi_4 = \psi'.\mathrm{cn}'a-\varphi'+\frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2a.\lambda^1(\varphi')-\frac{1.3}{2.4}\mathrm{tn}'^4a.\lambda^2(\varphi')\\
\qquad\qquad+\frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{tn}'^6a.\lambda^3(\varphi'),\\
-\Phi_5 = \psi'.\mathrm{cn}'a-\varphi'+\frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2a.\lambda^1(\varphi')-\frac{1.3}{2.4}\mathrm{tn}'^4a.\lambda^2(\varphi')\\
\qquad\qquad+\frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{tn}'^6a.\lambda^3(\varphi')-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathrm{tn}'^8a.\lambda^4(\varphi')\\
\qquad\text{u. s. w.,}
\end{cases}$$

so erhalten wir, mit Beziehung auf diese Werthe, zunächst die Reihe

$$9.\quad C(u,a)=\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}\Big(\psi'.\mathrm{cn}'a-\tfrac{1}{2}.\mathrm{tnc}'^2a.\Phi_1-\frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4a.\Phi_2$$
$$-\frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{tnc}'^6a.\Phi_3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\mathrm{tnc}'^8a.\Phi_4-\dots\Big).$$

Werden die Ausdrücke (8.) selbst substituirt, so erhält ψ' den Coëfficienten

$$\mathrm{cnc}'a.\Big(1+\tfrac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2a-\frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4a+\frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{tnc}'^6a-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\mathrm{tnc}'^8a+-\dots\Big)=1,$$

und die Reihe für $C(u,a)$ erhält überhaupt die Form

$$10.\quad C(u,a)=\psi'-\overset{0}{\Delta}.\varphi'-\overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\varphi')-\overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\varphi')-\overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\varphi')-\overset{4}{\Delta}.\lambda^4(\varphi')-\dots$$

Für die Coëfficienten in dieser Reihe finden sich folgende Werthe:

$$11.\quad\begin{cases}
\overset{0}{\Delta}=+\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a}-1\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a},\\
\overset{1}{\Delta}=-\frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2a\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a}-1-\frac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2a\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a},\\
\overset{2}{\Delta}=+\frac{1.3}{2.4}\mathrm{tn}'^4a\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a}-1-\frac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2a+\frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4a\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a},\\
\overset{3}{\Delta}=-\frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{tn}'^6a\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a}-1-\frac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2a+\frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4a-\frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{tnc}'^6a\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a},\\
\overset{4}{\Delta}=+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathrm{tn}'^8a\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a}-1-\frac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2a+\frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4a-\frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{tnc}'^6a\\
\qquad\qquad+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\mathrm{tnc}'^8a\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}\\
\qquad\text{u. s. w.}
\end{cases}$$

Auch hat man noch

$$12.\quad C(u,a)=\psi'-\Delta.\varphi'+(\Delta-\overset{0}{\Delta})\sin\varphi'\cos\varphi'+\tfrac{2}{3}(\Delta-\overset{0}{\Delta}-\overset{1}{\Delta})\sin^3\varphi'\cos\varphi'$$
$$+\frac{2.4}{3.5}(\Delta-\overset{0}{\Delta}-\overset{1}{\Delta}-\overset{2}{\Delta})\sin^5\varphi'\cos\varphi'+\frac{2.4.6}{3.5.7}(\Delta-\overset{0}{\Delta}-\overset{1}{\Delta}-\overset{2}{\Delta}-\overset{3}{\Delta}).\sin^7\varphi'\cos\varphi'+\dots,$$

wenn zur Abkürzung $\varDelta = \overset{0}{\varDelta} + \overset{1}{\varDelta} + \overset{2}{\varDelta} + \overset{3}{\varDelta} + \dots$ gesetzt wird. Indessen convergiren die Reihen (9. 10. 11.) nicht so rasch als die Reihen (3. 4. 6.).

§. 261.

Reihe für das Integral $D(u, a)$.

Da $\mathfrak{D}(u, ai) = i.D(u, a)$ ist, so erhält man, wenn man in der Reihe (4. §. 258.) ai statt a setzt, und aus $\operatorname{am} u = \varPhi$,

$$1. \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{snc}' a}$$

und ferner

$$2. \quad \begin{cases} -\varPhi_1 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varPhi, \\ \varPhi_2 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varPhi + \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^2 a}, \\ -\varPhi_3 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varPhi + \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^4 a}, \\ \varPhi_4 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varPhi + \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^4 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^6 a}, \\ -\varPhi_5 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varPhi + \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^4 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^6 a} \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\lambda^4(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^8 a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

berechnet, die Reihe

$$3. \quad D(u, a) = \frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a}\Big(\psi.\operatorname{snc}'a - \frac{1}{2}.\frac{\varPhi_1}{\operatorname{tn}'^2 a} - \frac{1}{2.4}.\frac{\varPhi_2}{\operatorname{tn}'^4 a} - \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{\varPhi_3}{\operatorname{tn}'^6 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{\varPhi_4}{\operatorname{tn}'^8 a} - \dots\Big).$$

Werden für die Coëfficienten ihre Ausdrücke selbst substituirt, so entsteht eine Reihe, in welcher der Coëfficient von ψ

$$\operatorname{sn}'a\Big(1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2 a} - \frac{1}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^4 a} + \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^6 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^8 a} + - \dots\Big) = 1$$

ist und welche also die Form

$$4. \quad D(u, a) =$$
$$\psi - \overset{0}{\varDelta}.\varPhi - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varPhi) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varPhi) - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varPhi) - \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varPhi) - \overset{5}{\varDelta}.\lambda$$

hat. Die Ausdrücke der Coëfficienten in dieser Reihe sind

$$5.\quad\begin{cases}
\overset{0}{\varDelta} = +\left(\frac{1}{\operatorname{sn}'a}-1\right).\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a},\\
\overset{1}{\varDelta} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^2a}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}'a}-1-\frac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2a}\right).\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a},\\
\overset{2}{\varDelta} = +\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^4a}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}'a}-1-\frac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2a}+\frac{1}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^4a}\right).\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a},\\
\overset{3}{\varDelta} = -\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^6a}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}'a}-1-\frac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2a}+\frac{1}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^4a}\right.\\
\qquad\qquad\left.-\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^6a}\right).\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a},\\
\overset{4}{\varDelta} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^8a}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}'a}-1-\frac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2a}+\frac{1}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^4a}\right.\\
\qquad\qquad\left.-\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^6a}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^8a}\right).\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a}\\
\text{u. s. w.}
\end{cases}$$

Durch eine neue Umordnung verwandelt sich die Reihe in

$$6.\quad D(u,a) = \psi-\varDelta.\varphi+(\varDelta-\overset{0}{\varDelta})\sin\varphi\cos\varphi+\tfrac{2}{3}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta})\sin^3\varphi\cos\varphi$$
$$+\frac{2.4}{3.5}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta}-\overset{2}{\varDelta})\sin^5\varphi\cos\varphi+\frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta}-\overset{2}{\varDelta}-\overset{3}{\varDelta})\sin^7\varphi\cos\varphi+\dots,$$

wenn wieder $\varDelta$ die mehrfach erwähnte Bedeutung hat.

§. 262.

Reihen für das Integral $'S(u,a)$.

Setzt man nun auch in den Formeln §. 254. ai statt a, beachtend dafs $'\mathfrak{S}(u,ai) = i.'S(u,a)$ sei, so erhält man, wenn man zugleich ψi statt ψ setzt,

$$1.\quad \operatorname{tang}\psi = k'\operatorname{sn}'a.\operatorname{tang}\varphi.$$

Berechnet man ferner aus $\operatorname{am}u=\varphi$ die Gröfsen

$$2.\quad\begin{cases}
\varPhi_1 = \frac{\psi}{k'\operatorname{sn}'a}-\varphi,\\
\varPhi_2 = \frac{\psi}{k'\operatorname{sn}'a}-\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{dn}'^2a.\lambda'(\varphi),\\
\varPhi_3 = \frac{\psi}{k'\operatorname{sn}'a}-\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{dn}'^2a.\lambda'(\varphi)-\frac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4a.\lambda^2(\varphi),\\
\varPhi_4 = \frac{\psi}{k'\operatorname{sn}'a}-\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{dn}'^2a.\lambda'(\varphi)-\frac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4a.\lambda^2(\varphi)-\frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dn}'^6a.\lambda^3(\varphi)\\
\text{u. s. w.},
\end{cases}$$

so hat man die Reihe

3. $$'S(u,a) = k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a . \Big(\Phi_1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a . \Phi_2 + \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a . \Phi_3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} . \operatorname{dnc}'^6 a . \Phi_4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{dnc}'^8 a . \Phi_5 + \ldots\Big).$$

Beachtet man nun, dafs $1 + \frac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a + \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dnc}'^6 a + \ldots = \frac{1}{k' \operatorname{snc}' a}$ ist, so läfst sich die vorige Reihe auch also darstellen:

4. $$'S(u,a) = \psi - \overset{0}{A} . \Phi - \overset{1}{A} . \lambda^1(\Phi) - \overset{2}{A} . \lambda^2(\Phi) - \overset{3}{A} . \lambda^3(\Phi) - \overset{4}{A} . \lambda^4(\Phi) - \ldots$$

und für die Coëfficienten in dieser neuen Reihe hat man die Ausdrücke

5. $$\begin{cases} \overset{0}{A} = k' \operatorname{sn}' a, \\ \overset{1}{A} = \frac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a\Big(\frac{1}{k'\operatorname{snc}'a} - 1\Big) . k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a, \\ \overset{2}{A} = \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4 a\Big(\frac{1}{k'\operatorname{snc}'a} - 1 - \frac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a\Big) . k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a, \\ \overset{3}{A} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dn}'^6 a\Big(\frac{1}{k'\operatorname{snc}'a} - 1 - \frac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a - \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a\Big) . k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a, \\ \overset{4}{A} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{dn}'^8 a\Big(\frac{1}{k'\operatorname{snc}'a} - 1 - \frac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a - \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a \\ \qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dnc}'^6 a\Big) . k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Durch eine neue Umordnung verwandelt sich die Reihe (4.) in

6. $$'S(u,a) = \psi - A . \Phi + (A - \overset{0}{A}) \sin\Phi\cos\Phi + \tfrac{2}{3}(A - \overset{0}{A} - \overset{1}{A}) \sin^3\Phi\cos\Phi + \frac{2.4}{3.5}(A - \overset{0}{A} - \overset{1}{A} - \overset{2}{A}) \sin^5\Phi\cos\Phi + \frac{2.4.6}{3.5.7}(A - \overset{0}{A} - \overset{1}{A} - \overset{2}{A} - \overset{3}{A}) \sin^7\Phi\cos\Phi + \ldots$$

§. 263.

Reihen für das Integral $'C(u,a)$.

Setzen wir in den Formeln §. 255. ai statt a und ψi statt ψ, so erhalten wir die sich auf den Ausdruck von $'C(u,a)$ beziehenden Reihen. Berechnen wir aus $\Phi = \operatorname{am} u$ zunächst

1. $$\operatorname{tang}\psi = k' \operatorname{sn}'a . \operatorname{tang}\Phi,$$

und dann weiter

2. $$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{u}{k'\operatorname{sn}'a} - \Phi, \\ \Phi_2 = \frac{u}{k'\operatorname{sn}'a} - \Phi - \frac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a . \lambda^1(\Phi), \\ \Phi_3 = \frac{u}{k'\operatorname{sn}'a} - \Phi - \frac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a . \lambda^1(\Phi) - \frac{1.3}{2.4} . \operatorname{dn}'^4 a . \lambda^2(\Phi), \\ \Phi_4 = \frac{u}{k'\operatorname{sn}'a} - \Phi - \frac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a . \lambda^1(\Phi) - \frac{1.3}{2.4} . \operatorname{dn}'^4 a . \lambda^2(\Phi) - \frac{1.3.5}{2.4.6} . \operatorname{dn}'^6 a . \lambda^3(\Phi) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

so haben wir sofort die Reihe

$$3.\quad {}'C(u,a) = k'\operatorname{snc}'a.\psi + k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2a.\Phi_1 + \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4a.\Phi_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dnc}'^6a.\Phi_3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{dnc}'^8a.\Phi_4 + \ldots\right).$$

Die nächste Umordnung der Glieder giebt die Reihe

$$4.\quad {}'C(u,a) = \psi - \overset{0}{\varDelta}.\varphi - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi) - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi) - \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varphi) - \ldots$$

und die Coëfficienten in ihr sind

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = \left(\dfrac{1}{k'\operatorname{snc}'a} - 1\right).k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a, \\ \overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2a.\left(\dfrac{1}{k'\operatorname{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2a\right).k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a, \\ \overset{2}{\varDelta} = \dfrac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4a.\left(\dfrac{1}{k'\operatorname{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2a - \dfrac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4a\right).k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a, \\ \overset{3}{\varDelta} = \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dn}'^6a.\left(\dfrac{1}{k'\operatorname{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2a - \dfrac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4a - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dnc}'^6a\right).k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und eine weitere Umordnung giebt

$$6.\quad C(u,a) = \psi - \varDelta.\varphi + (\varDelta - \overset{0}{\varDelta})\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta})\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta})\sin^5\varphi\cos\varphi + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta})\sin^7\varphi\cos\varphi + \ldots$$

§. 264.

Reihen für das Integral $'D(u,a)$.

Um die Reihen für das Integral $'D(u,a)$ zu erhalten, hat man in den Formeln §. 256. ai statt a und ψi statt ψ zu setzen. Man berechne also aus $\varphi = \operatorname{am} u$

$$1.\quad \operatorname{tang}\psi = k'\operatorname{sn}'a.\operatorname{tang}\varphi;$$

ferner wie in §. 262., die Gröfsen

$$2.\quad \begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{\psi}{k'\operatorname{sn}'a} - \varphi, \\ \Phi_2 = \dfrac{\psi}{k'\operatorname{sn}'a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2a.\lambda^1(\varphi), \\ \Phi_3 = \dfrac{\psi}{k'\operatorname{sn}'a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2a.\lambda^1(\varphi) - \dfrac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4a.\lambda^2(\varphi), \\ \Phi_4 = \dfrac{\psi}{k'\operatorname{sn}'a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2a.\lambda^1(\varphi) - \dfrac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4a.\lambda^2(\varphi) - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dn}'^6a.\lambda^3(\varphi) \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so ist

$$3.\quad {}'D(u,a) = \frac{\psi}{k' \operatorname{snc}' a} - \frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a}\Big(\tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a.\Phi_1 + \frac{1}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a.\Phi_2 + \frac{1.3}{2.4.6}\operatorname{dnc}'^6 a.\Phi_3 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\operatorname{dnc}'^8 a.\Phi_4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\operatorname{dnc}'^{10} a.\Phi_5 + \dots\Big).$$

Diese Reihe verwandelt sich in

$$4.\quad {}'D(u,a) = \psi + \overset{0}{\varDelta}.\varphi + \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi) + \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi) + \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi) + \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varphi) + \dots$$

und die Ausdrücke der Coëfficienten sind

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = (1 - k' \operatorname{snc}' a).\dfrac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a}, \\ \overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a - k' \operatorname{snc}' a).\dfrac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a}, \\ \overset{2}{\varDelta} = \dfrac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4 a\Big(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a - \dfrac{1}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a - k' \operatorname{snc}' a\Big).\dfrac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a}, \\ \overset{3}{\varDelta} = \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dn}'^6 a\Big(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a - \dfrac{1}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a - \dfrac{1.3}{2.4.6}\operatorname{dnc}'^6 a - k' \operatorname{snc}' a\Big).\dfrac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die weitere Umordnung giebt

$$6.\quad {}'D(u,a) = \psi + \varDelta.\varphi - (\varDelta - \overset{0}{\varDelta})\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta})\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta})\sin^5\varphi\cos\varphi - \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta})\sin^7\varphi\cos\varphi - \dots$$

Anmerkung. Alle vorhin entwickelten Reihen, mit Ausnahme der Reihen (9. 10. 12. §. 260.) convergiren desto rascher, je kleiner der Modul k ist; indessen convergiren sie doch für jeden zwischen den Grenzen 0 und 1 enthaltenen Modul k, für jeden Parameter a und für jede Amplitude $\varphi = \operatorname{am} u$.

Da nach §. 133.

$$-S(u,a) + {}'D(u,a) = C(u,a) + {}'C(u,a) = D(u,a) + {}'S(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\Big(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a}.\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\Big)$$

ist, so lassen sich die Integrale erster Classe auf die dritter, und umgekehrt diese auf jene zurückführen; was nach den Formeln §. 120. auch noch leichter von Statten geht.

§. 265.

Andere Reihen für die Integrale $S(u,a)$, $C(u,a)$; $D(u,a)$.

Setzen wir in den Formeln §. 262. $K' - a$ statt a, $K - u$ statt u und $\frac{1}{2}\pi - \psi$ statt ψ, so erhalten wir

$$1.\quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{snc}' a},$$

und berechnen wir noch

$$2.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = k' \operatorname{snc}' a, \\ \overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2} \operatorname{dnc}'^2 a \left(\frac{1}{k' \operatorname{sn}' a} - 1\right) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a, \\ \overset{2}{\varDelta} = \frac{1.3}{2.4} \operatorname{dnc}'^4 a \left(\frac{1}{k' \operatorname{sn}' a} - 1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{dn}'^2 a\right) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \\ \overset{3}{\varDelta} = \frac{1.3.5}{2.4.6} \operatorname{dnc}'^6 a \left(\frac{1}{k' \operatorname{sn}' a} - 1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{dn}'^2 a - \frac{1.3}{2.4} \operatorname{dn}'^4 a\right) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a, \\ \overset{4}{\varDelta} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \operatorname{dnc}'^8 a \left(\frac{1}{k' \operatorname{sn}' a} - 1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{dn}'^2 a - \frac{1.3}{2.4} \operatorname{dn}'^4 a \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1.3.5}{2.4.6} \operatorname{dn}'^6 a\right) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \\ \qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so haben wir zunächst

$$'S(K-u, K'-a)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \psi - \overset{0}{\varDelta}.\operatorname{amc} u - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\operatorname{amc} u) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\operatorname{amc} u) - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\operatorname{amc} u) - \ldots.$$

und also für $u = 0$

$$'S(K, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{1}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{2}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{3}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi \ldots. = \tfrac{1}{2}\pi - \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Da nun aber nach §. 120. $'S(K, K'-a) - 'S(K-u, K'-a) = C(u, a)$ ist, so ist

$$3.\quad \begin{cases} C(u,a) = \psi - \overset{0}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) - \overset{1}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc} u)) - \overset{2}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc} u)) \\ \qquad\qquad - \overset{3}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc} u)) \ldots. \text{ oder} \\ C(u,a) = \psi - \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\varDelta}.\operatorname{amc} u + \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\operatorname{amc} u) + \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\operatorname{amc} u) \\ \qquad\qquad + \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\operatorname{amc} u) + \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\operatorname{amc} u) + \ldots. \end{cases}$$

und es können diese Reihen auf die bekannte Weise noch umgeordnet werden. Die zweite Reihe convergirt im allgemeinen rascher als die erste. Setzt man nun $\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u = \varphi$, so haben wir

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u &= \varphi, \\ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc} u) &= \varphi + \cos\varphi \sin\varphi, \\ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc} u) &= \varphi + \cos\varphi \sin\varphi + \tfrac{2}{3}\cos^3\varphi \sin\varphi, \\ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc} u) &= \varphi + \cos\varphi \sin\varphi + \tfrac{2}{3}\cos^3\varphi \sin\varphi + \frac{2.4}{3.5}\cos^5\varphi \sin\varphi, \\ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda^4(\operatorname{amc} u) &= \varphi + \cos\varphi \sin\varphi + \tfrac{2}{3}\cos^3\varphi \sin\varphi + \frac{2.4}{3.5}\cos^5\varphi \sin\varphi \\ &\qquad + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cos^7\varphi \sin\varphi, \end{aligned}$$

Die Werthe dieser auf einander folgenden Ausdrücke nähern sich der Grenze $\frac{1}{2}\pi$; die Coëfficienten $\lambda^1(\mathrm{amc}\,u)$, $\lambda^2(\mathrm{amc}\,u)$, $\lambda^3(\mathrm{amc}\,u)$ etc. hingegen nähern sich der Grenze Null, und zwar desto rascher, je gröfser u, d. h. je kleiner $\mathrm{amc}\,u$ ist.

Berechnen wir aber, indem wir in den Formeln §. 263. $K'-a$ statt a und $K'-u$ statt u setzen, nach einander die Gröfsen

$$4.\quad\begin{cases}\overset{0}{\Delta}=\left(\frac{1}{k'\,\mathrm{sn}'a}-1\right).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a,\\ \overset{1}{\Delta}=\frac{1}{2}\mathrm{dnc}'^2a\left(\frac{1}{k'\,\mathrm{sn}'a}-1-\frac{1}{2}\mathrm{dn}'^2a\right).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a,\\ \overset{2}{\Delta}=\frac{1.3}{2.4}\mathrm{dnc}'^4a\left(\frac{1}{k'\,\mathrm{sn}'a}-1-\frac{1}{2}\mathrm{dn}'^2a-\frac{1.3}{2.4}\mathrm{dn}'^4a\right).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a,\\ \overset{3}{\Delta}=\frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{dnc}'^6a\left(\frac{1}{k'\,\mathrm{sn}'a}-1-\frac{1}{2}\mathrm{dn}'^2a-\frac{1.3}{2.4}\mathrm{dn}'^4a\right.\\ \qquad\qquad\left.-\frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{dn}'^6a\right).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\\ \qquad\text{u. s. w.,}\end{cases}$$

so ist

$$'C(K-u,K'-a)=\tfrac{1}{2}\pi-\psi-\overset{0}{\Delta}.\mathrm{amc}\,u-\overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u)-\overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u)-\ldots.$$

und

$$'C(K,K'-a)=\tfrac{1}{2}\pi-\overset{0}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi-\overset{1}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi-\overset{2}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi-\ldots.=\tfrac{1}{2}\pi-\Delta.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Da ferner $'C(K,K'-a)-'C(K-u,K'-a)=D(u,a)$ ist, so haben wir, mit Beziehung auf die Ausdrücke (4.), die Reihe

$$5.\quad\begin{cases}D(u,a)=\psi-\overset{0}{\Delta}\,(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)-\overset{1}{\Delta}.(\tfrac{1}{2}\pi-\lambda^1(\mathrm{amc}\,u))-\overset{2}{\Delta}.(\tfrac{1}{2}\pi-\lambda^2(\mathrm{amc}\,u))\\ \qquad\qquad-\overset{3}{\Delta}.(\tfrac{1}{2}\pi-\lambda^3(\mathrm{amc}\,u))-\ldots.\ \text{oder}\\ D(u,a)=\psi-\Delta.\tfrac{1}{2}\pi+\overset{0}{\Delta}.\mathrm{amc}\,u+\overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u)+\overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u)\\ \qquad\qquad+\overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\mathrm{amc}\,u)+\ldots.\end{cases}$$

Eine Reihe für $S(u,a)$ giebt die Formel

$$'D(u,K'-a)-S(K-u,a)=\frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}-S(K,a),$$

welche sich, da $'D(u,K'-a)-'C(u,K'-a)=\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.u$ ist, umformen läfst in

$$'C(u,K'-a)-S(K-u,a)=\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}.u-S(K,a).$$

Hieraus folgt $S(K,a)-S(u,a)=\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}.(K-u)-'C(K-u,K'-a)$; es ist aber $\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}=(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).\frac{1}{k'^2\,\mathrm{snc}'a}$, also

$$\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a}(K-u) = \Big(\frac{\operatorname{amc}u}{k'^2\operatorname{snc}'^2a} + \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2a.\tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2a.\frac{\lambda^1(\operatorname{amc}u)}{k'^2\operatorname{snc}'^2a}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4a.\frac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4a.\frac{\lambda^2(\operatorname{amc}u)}{k'^2\operatorname{snc}'^2a}\dots\Big)k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{sn}'a.$$

Setzt man daher

$$6.\begin{cases} \overset{0}{\Delta} = \Big(\frac{1}{k'\operatorname{sn}'a} - \frac{\operatorname{dnc}'^2a}{k'^2\operatorname{snc}'^2a}\Big).k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a, \\ \overset{1}{\Delta} = \tfrac{1}{2}.\operatorname{dnc}'^2a\Big(\frac{1}{k'\operatorname{sn}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}.\frac{\operatorname{dn}'^2a.\operatorname{dnc}'^2a}{k'^2\operatorname{snc}'^2a}\Big).k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a, \\ \overset{2}{\Delta} = \frac{1.3}{2.4}.\operatorname{dnc}'^4a\Big(\frac{1}{k'\operatorname{sn}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}.\operatorname{dn}'^2a - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\operatorname{dn}'^4a.\operatorname{dnc}'^2a}{k'^2\operatorname{snc}'^2a}\Big).k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a, \\ \overset{3}{\Delta} = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\operatorname{dnc}'^6a\Big(\frac{1}{k'\operatorname{sn}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}.\operatorname{dn}'^2a - \frac{1.3}{2.4}.\operatorname{dn}'^4a \\ \qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\operatorname{dn}'^6a.\operatorname{dnc}'^2a}{k'^2\operatorname{snc}'^2a}\Big).k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a, \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so hat man zunächst die Reihe

$$S(K,a) - S(u,a)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\pi + \psi + \overset{0}{\Delta}.\operatorname{amc}u + \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\operatorname{amc}u) + \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\operatorname{amc}u) + \dots$$

Setzt man hierin $u = 0$, so hat man

$$S(k,a) = -\tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{1}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{2}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi + \dots = -\tfrac{1}{2}\pi + \Delta.\tfrac{1}{2}\pi;$$

und wird hiervon die vorige Reihe subtrahirt, so hat man endlich

$$7.\begin{cases} S(u,a) = -\psi + \overset{0}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc}u) + \overset{1}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc}u)) + \overset{2}{\Delta}((\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc}u)) \\ \qquad + \overset{3}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc}u)) + \overset{4}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^4(\operatorname{amc}u)) + \dots \quad \text{oder} \\ S(u,a) = -\psi + \Delta.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\Delta}.\operatorname{amc}u - \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\operatorname{amc}u) - \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\operatorname{amc}u) - \dots \\ \qquad - \overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\operatorname{amc}u) - \dots \end{cases}$$

§. 266.

Andere Reihen für die Integrale $'S(u,a)$, $'C(u,a)$, $'D(u,a)$.

Setzt man in den Formeln §. 260. $K'-a$ statt a, $K-u$ statt u und $\tfrac{1}{2}\pi-\psi$ statt ψ, so verwandelt sich die Gleichung $\operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{snc}'a}$ in

$$1. \quad \operatorname{tang}\psi = k'\operatorname{sn}'a.\operatorname{tn}u.$$

Berechnet man aufserdem die Gröfsen

$$
2. \quad \left\{ \begin{aligned}
\overset{0}{\varDelta} &= -(\mathrm{snc}'a - \mathrm{cn}'^2 a) \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\
\overset{1}{\varDelta} &= +\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}\left(\mathrm{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{cn}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^2 a}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\
\overset{2}{\varDelta} &= -\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\left(\mathrm{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\mathrm{cn}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^4 a}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\
\overset{3}{\varDelta} &= +\frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{\mathrm{tn}'^6 a}\left(\mathrm{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\mathrm{cn}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^6 a}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} \\
&\qquad \text{u. s. w.,}
\end{aligned} \right.
$$

so ist, §. 260 gemäfs,

$$C(K-u, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi - \psi + \overset{0}{\varDelta}.\mathrm{amc}\,u + \overset{1}{\varDelta}\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) + \overset{2}{\varDelta}\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) + \dots$$

und

$$C(K, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{1}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{2}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \dots = \tfrac{1}{2}\pi + \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Da ferner $'S(u, a) = C(K, K'-a) - C(K-u, K'-a)$ ist, so haben wir die Reihe

$$
3. \quad \left\{ \begin{aligned}
'S(u, a) &= \psi + \overset{0}{\varDelta}.(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) + \overset{1}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\mathrm{amc}\,u)) \\
&\quad + \overset{2}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\mathrm{amc}\,u)) + \overset{3}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\mathrm{amc}\,u)) + \dots \text{ oder} \\
'S(u, a) &= \psi + \varDelta\,\tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\varDelta}.\mathrm{amc}\,u - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) \\
&\quad - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\mathrm{amc}\,u) - \dots
\end{aligned} \right.
$$

Setzen wir auch in den Formeln §. 261. $K'-a$ statt a, $K-u$ statt u und $\frac{1}{2}\pi - \psi$ statt ψ, so ist wieder $\operatorname{tang}\psi = k'\,\mathrm{sn}'a.\mathrm{tn}\,u$. Berechnen wir ferner nach einander die Gröfsen

$$
4. \quad \left\{ \begin{aligned}
\overset{0}{\varDelta} &= +\left(\frac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1\right) \cdot \frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}, \\
\overset{1}{\varDelta} &= -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{tn}'^2 a} \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a}\right) \cdot \frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}, \\
\overset{2}{\varDelta} &= +\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\left(\frac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a} + \frac{1}{2.4} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\right) \cdot \frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}, \\
\overset{3}{\varDelta} &= -\frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{\mathrm{tn}'^6 a}\left(\frac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a} + \frac{1}{2.4} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}'^6 a}\right) \cdot \frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a} \\
&\qquad \text{u. s. w.,}
\end{aligned} \right.
$$

so haben wir zunächst

$$D(K-u, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi - \psi - \overset{0}{\varDelta}.\mathrm{amc}\,u - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) - \dots$$

und also

$$D(K, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{1}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{2}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi - \ldots = \tfrac{1}{2}\pi - \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Da ferner $'C(u, a) = D(K, K'-a) - D(K-u, K'-a)$ ist, so haben wir

$$5.\ \begin{cases} 'C(u,a) = \psi - \overset{0}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) - \overset{1}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc} u)) - \overset{2}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc} u)) \\ \qquad - \overset{3}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc} u)) - \ldots \text{ oder} \\ 'C(u, a) = \psi - \varDelta\tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\varDelta}.\operatorname{amc} u + \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\operatorname{amc} u) + \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\operatorname{amc} u) \\ \qquad + \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\operatorname{amc} u) + \ldots \end{cases}$$

Nach §. 180. ist $'D(K,a) - 'D(u,a) = \frac{K-u}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a} - S(K-u, K'-a)$; ferner ist

$$\begin{aligned} K-u = \operatorname{amc} u &+ \left(-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2 a}\right)\left(-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^2 a}\right).\lambda'(\operatorname{amc} u) \\ &+ \left(\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^4 a}\right)\left(\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^4 a}\right).\lambda^2(\operatorname{amc} u) \\ &+ \left(-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^6 a}\right)\left(-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^6 a}\right).\lambda^3(\operatorname{amc} u) + \ldots; \end{aligned}$$

setzt man nun auch in der Reihe (4. §. 259.) $K'-a$ statt a, $K-u$ statt u und $\frac{1}{2}\pi - \psi$ statt ψ, so erhält man, wenn man

$$6.\ \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = -(\operatorname{snc}'a - 1).\frac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a}, \\ \overset{1}{\varDelta} = +\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2 a}\left(\operatorname{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^2 a}\right).\frac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a}, \\ \overset{2}{\varDelta} = -\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^4 a}\left(\operatorname{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^4 a}\right).\frac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a}, \\ \overset{3}{\varDelta} = +\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^6 a}\left(\operatorname{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^4 a} \right. \\ \qquad \left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^6 a}\right).\frac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a} \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

setzt, zunächst die Reihe

$$'D(K,a) - 'D(u, a) = \tfrac{1}{2}\pi - \psi + \overset{0}{\varDelta}.\operatorname{amc} u + \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\operatorname{amc} u) + \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\operatorname{amc} u) + \ldots,$$

also $\quad 'D(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{1}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{2}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \ldots = \tfrac{1}{2}\pi + \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi.$

Wird hiervon die vorige Reihe subtrahirt, so erhält man endlich

$$7.\ \begin{cases} 'D(u,a) = \psi + \overset{0}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) + \overset{1}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc} u)) + \overset{2}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc} u)) \\ \qquad + \overset{3}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc} u)) + \overset{4}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^4(\operatorname{amc} u)) + \ldots, \text{ oder} \\ 'D(u,a) = \psi + \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\varDelta}.\operatorname{amc} u - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\operatorname{amc} u) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\operatorname{amc} u) \\ \qquad - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\operatorname{amc} u) - \ldots \end{cases}$$

Die Reihen im §. 265., so wie auch die so eben entwickelten Reihen, können leicht umgeordnet werden. Setzt man $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \text{amc}\,u$, so hat man z. B.

$$'D(u,a) = \psi + \varDelta.\varphi + (\varDelta - \overset{0}{\varDelta}).\cos\varphi\sin\varphi + \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta}).\cos^3\varphi\sin\varphi$$
$$+ \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta})\cos^5\varphi\sin\varphi + \dots$$

und in dieser Reihe ist $\text{tang}\,\psi = \text{sn}'a.\text{tang}\,\varphi$, da $\text{tang}\,\varphi = \frac{1}{\text{tnc}\,u} = k'\,\text{tn}\,u$ ist.

Anmerkung. Setzt man in den vorstehenden Reihen k' statt a, $k'u$ statt u, und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, also $\frac{1}{k'}$ statt des Moduls k', und beachtet, dafs

$$'S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = 'S(u,a),$$
$$'C\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = 'D(u,a),$$
$$'D\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = 'C(u,a),$$
$$S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -C(K,a) + C(K-u,a),$$
$$S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -S(K,a) + S(K-u,a),$$
$$D\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = +D(K,a) - D(K-u,a)$$

ist, so erhält man noch eben so viele neue Reihen, welche ebenfalls desto rascher convergiren, je kleiner der Modul k ist. Es schreiten diese Reihen nach Functionen der Amplituden $\frac{1}{2}\pi - \text{amc}\,u$ und $\frac{1}{2}\pi - \text{am}\,u$ fort, da sich jetzt $\text{am}\,u$ in $\frac{1}{2}\pi - \text{amc}\,u$ und $\text{amc}\,u$ in $\frac{1}{2}\pi - \text{am}\,u$ verwandelt. Setzt man endlich ai statt a und ui statt u, indem man zugleich den Modul mit dem conjugirten vertauscht, so erhält man Reihen, in welchen die Coëfficienten desto rascher convergiren, je gröfser der Modul k ist. Die vollständige Aufführung aller dieser Reihen hat keine Schwierigkeit, und aus diesem Grunde verzichten wir hier darauf. Wenn die zuletzt erwähnten Reihen eine leichte Anwendbarkeit haben sollen, so mufs die Tabelle der Werthe der Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$, $\lambda^4(\varphi)$, ... auch auf imaginäre Werthe von φ ausgedehnt werden. Setzen wir aber allgemein

$$\lambda^r(\varphi i) = (-1)^r.i.\overset{1}{\lambda^r}(\varphi),$$

so haben wir die Werthe

$$\overset{1}{\lambda}{}^0(\varphi) = \varphi,$$

$$\overset{1}{\lambda}{}^1(\varphi) = \mathfrak{Sin}\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi - \varphi,$$

$$\overset{1}{\lambda}{}^2(\varphi) = \tfrac{2}{3}\mathfrak{Sin}^3\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi - \mathfrak{Sin}\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi + \varphi,$$

$$\overset{1}{\lambda}{}^3(\varphi) = \frac{2.4}{3.5}\mathfrak{Sin}^5\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi - \tfrac{2}{3}\mathfrak{Sin}^3\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi + \mathfrak{Sin}\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi - \varphi,$$

$$\overset{1}{\lambda}{}^4(\varphi) = \frac{2.4.6}{3.5.7}\mathfrak{Sin}^7\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi - \frac{2.4}{3.5}\mathfrak{Sin}^5\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi + \tfrac{2}{3}\mathfrak{Sin}^3\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi - \mathfrak{Sin}\varphi\,\mathfrak{Cos}\varphi + \varphi$$

u. s. w.

oder auch

$$\overset{1}{\lambda}{}^r\varphi = \frac{2.4.6\ldots.(2r)}{1.3\;5\ldots\;(2r-1)}.\int_0 \partial\varphi.\mathfrak{Sin}^{2r}\varphi.$$

§. 267.

Reihen für die Integrale $\int_0 u\,\partial\,\mathrm{am}\,u$ und $\int_0 u\,\partial\,\mathrm{amc}\,u$.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\overset{1}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2,$$

$$\overset{2}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4,$$

$$\overset{3}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6,$$

$$\overset{4}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8$$

u. s. w.,

so ist $\frac{1}{\eta}$ oder $\frac{2K}{\pi}$ die Grenze der Gröfsen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \ldots.$ und nach §. 107. ist

$$u = \frac{1}{\eta}.\mathrm{am}\,u - \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{1}{a}\right)\mathrm{sn}^3u\;\mathrm{cn}\,u$$
$$- \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{2}{a}\right)\mathrm{sn}^5u\;\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{3}{a}\right)\mathrm{sn}^7u\;\mathrm{cn}\,u - \ldots.$$

Wird diese Reihe mit $\partial\,\mathrm{am}\,u$ multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$1.\quad \int_0 u\,\partial\,\mathrm{am}\,u$$

$$= \frac{1}{2\eta}.(\mathrm{am}\,u)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\mathrm{sn}^2u - \frac{1}{4}.\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{1}{a}\right)\mathrm{sn}^4u - \frac{1}{6}.\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{2}{a}\right)\mathrm{sn}^6u$$
$$- \frac{1}{8}.\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{3}{a}\right)\mathrm{sn}^8u - \frac{1}{10}.\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}.\left(\frac{1}{\eta} - \overset{4}{a}\right)\mathrm{sn}^{10}u - \ldots.$$

Setzt man in dieser Reihe $K-u$ statt u, so erhält man

$$2. \quad \int_0 u\,\partial\,\mathrm{amc}\,u$$

$$= K.\mathrm{amc}\,u - \frac{1}{2\eta}(\mathrm{amc}\,u)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}-1\right)\mathrm{snc}^2 u + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta}-\overset{1}{a}\right)\mathrm{snc}^4 u$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{\eta}-\overset{2}{a}\right)\mathrm{snc}^6 u + \frac{1}{8}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{\eta}-\overset{3}{a}\right)\mathrm{snc}^8 u + \ldots.$$

Vertauscht man in der Reihe für u die conjugirten Modul, indem man zugleich ui statt u setzt, so erhält man

$$u = \frac{1}{\eta'}.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u - \left(\frac{1}{\eta'}-1\right)\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta'}-\overset{1}{a'}\right)\frac{\mathrm{tn}^3 u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{\eta'}-\overset{2}{a'}\right)\frac{\mathrm{tn}^5 u}{\mathrm{cn}\,u}$$
$$+\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{\eta'}-\overset{3}{a'}\right)\frac{\mathrm{tn}^7 u}{\mathrm{cn}\,u} - + \ldots.$$

und in dieser Reihe haben $\overset{1}{a'}, \overset{2}{a'}, \overset{3}{a'}, \overset{4}{a'}, \ldots.$ dieselbe Bedeutung, wie $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \ldots.$; nur dafs jene Gröfsen ebenso von dem Modul k' abhängen, wie diese von dem Modul k; auch ist $\frac{1}{\eta'} = \frac{2K}{\pi}$ und zugleich die Grenze, welcher sich die Gröfsen $\overset{1}{a'}, \overset{2}{a'}, \overset{3}{a'}, \overset{4}{a'}, \ldots.$ immer mehr nähern.

Soll auch diese Reihe mit $\partial\,\mathrm{am}\,u$ multiplicirt und integrirt werden, so haben wir zunächst das Integral

$$U = \int_0 \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u$$

in Betracht zu ziehen. Bekanntlich ist

$$\varphi = \mathfrak{Sin}\,\varphi\,\mathfrak{Cos}\,\varphi - \tfrac{2}{3}\mathfrak{Sin}^3\varphi\,\mathfrak{Cos}\,\varphi + \frac{2.4}{3.5}\mathfrak{Sin}^5\varphi\,\mathfrak{Cos}\,\varphi - \frac{2.4.6}{3.5.7}\mathfrak{Sin}^7\varphi\,\mathfrak{Cos}\,\varphi \ldots,$$

also

$$\mathfrak{L}\varphi = \frac{\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{tang}^3\varphi}{\cos\varphi} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\mathrm{tang}^5\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{\mathrm{tang}^7\varphi}{\cos\varphi} + - \ldots.,$$

oder auch

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{tn}^3 u}{\mathrm{cn}\,u} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\mathrm{tn}^5 u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{\mathrm{tn}^7 u}{\mathrm{cn}\,u} + - \ldots.$$

Diese Gleichung mufs mit $\partial\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{dn}\,u.\partial\,u$ multiplicirt und dann integrirt werden. Es ist aber $\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u.\partial\,u}{\mathrm{cn}\,u}$, und $\mathrm{tn}\,u = \mathfrak{Sin}(\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u)$, also haben wir

$$U = \int_0 \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u - \frac{2}{3}\int_0 \mathfrak{Sin}^3\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u$$
$$+\frac{2.4}{3.5}\int_0 \mathfrak{Sin}^5\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u - + \ldots.$$

Setzt man nun der Kürze wegen



$$\overset{0}{\Phi} = \frac{1}{\operatorname{cn} u} - 1,$$

$$\overset{1}{\Phi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{\operatorname{cn} u} + 1,$$

$$\overset{2}{\Phi} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\operatorname{tn}^4 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{cn} u} + \frac{1}{\operatorname{cn} u} - 1,$$

$$\overset{3}{\Phi} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\operatorname{tn}^6 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\operatorname{tn}^4 u}{\operatorname{cn} u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{\operatorname{cn} u} + 1,$$

$$\overset{4}{\Phi} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\operatorname{tn}^8 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\operatorname{tn}^6 u}{\operatorname{cn} u} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\operatorname{tn}^4 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{cn} u} + \frac{1}{\operatorname{cn} u} - 1$$

u. s. w.,

so dafs überhaupt $\overset{n}{\Phi} = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\cdot\frac{\operatorname{tn}^{2n} u}{\operatorname{cn} u} - \overset{n-1}{\Phi}$ ist, so haben wir

$$\int_0 \mathfrak{Sin}\, \mathfrak{L} \operatorname{am} u . \partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \int_0 \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{cn} u}\, \partial \operatorname{am} u = \overset{0}{\Phi},$$

$$\int_0 \mathfrak{Sin}^3 \mathfrak{L} \operatorname{am} u . \partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \int_0 \frac{\operatorname{tn}^3 u}{\operatorname{cn} u}\, \partial \operatorname{am} u = \frac{2}{3} \overset{1}{\Phi},$$

$$\int_0 \mathfrak{Sin}^5 \mathfrak{L} \operatorname{am} u . \partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \int_0 \frac{\operatorname{tn}^5 u}{\operatorname{cn} u}\, \partial \operatorname{am} u = \frac{2.4}{3.5} \overset{2}{\Phi},$$

$$\int_0 \mathfrak{Sin}^7 \mathfrak{L} \operatorname{am} u . \partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \int_0 \frac{\operatorname{tn}^7 u}{\operatorname{cn} u}\, \partial \operatorname{am} u = \frac{2.4.6}{3.5.7} \overset{3}{\Phi}$$

u. s. w.

Werden diese einfachen Formeln benutzt, so haben wir zunächst

$$3. \quad U = \overset{0}{\Phi} - \frac{2^2}{3^2}.\overset{1}{\Phi} + \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}.\overset{2}{\Phi} - \frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}.\overset{3}{\Phi} + \frac{2^2.4^2.6^2.8^2}{3^2.5^2.7^2.9^2}.\overset{4}{\Phi} - + \ldots.$$

Wird nun die Reihe für u mit $\partial \operatorname{am} u$ multiplicirt und dann integrirt, so erhalten wir

$$4. \quad \int_0 u\, \partial \operatorname{am} u = U + \frac{1^2}{2^2}(U - \overset{0}{\Phi})k'^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(U - \overset{0}{\Phi} + \frac{2^2}{3^2}\overset{1}{\Phi}\right)k'^4$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\left(U - \overset{1}{\Phi} + \frac{2^2}{3^2}\overset{1}{\Phi} - \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}\overset{2}{\Phi}\right)k'^6$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\left(U - \overset{0}{\Phi} + \frac{2^2}{3^2}\overset{1}{\Phi} - \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}\overset{2}{\Phi} + \frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}\overset{3}{\Phi}\right)k'^8 \ldots.$$

und es kann diese Reihe auch wie folgt dargestellt werden:

$$5. \quad \int_0 u\, \partial \operatorname{am} u = \frac{1}{\eta'}.U - \left(\frac{1}{\eta'} - 1\right).\overset{0}{\Phi} + \frac{2^2}{3^2}\left(\frac{1}{\eta'} - \overset{1}{a'}\right).\overset{1}{\Phi} - \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}\left(\frac{1}{\eta'} - \overset{2}{a'}\right).\overset{2}{\Phi}$$
$$+ \frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}\left(\frac{1}{\eta'} - \overset{3}{a'}\right).\overset{3}{\Phi} - \frac{2^2.4^2.6^2.8^2}{3^2.5^2.7^2.9^2}\left(\frac{1}{\eta'} - \overset{4}{a'}\right).\overset{4}{\Phi} + - \ldots.$$

§. 268.

Die Function U kann auf mehre andere Arten entwickelt werden. Da nämlich $\mathfrak{L}\,\text{am}\,u = \text{sn}\,u + \frac{1}{3}\text{sn}^3 u + \frac{1}{5}\text{sn}^5 u + \frac{1}{7}\text{sn}^7 u + \dots$ ist, so haben wir

$$U = 1 - \text{cn}\,u + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1 - \text{cn}\,u - \frac{1}{2}\text{sn}^2 u\,\text{cn}\,u\right)$$
$$+ \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{5.5}\left(1 - \text{cn}\,u - \frac{1}{2}\text{sn}^2 u\,\text{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\text{sn}^4 u\,\text{cn}\,u\right)$$
$$+ \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(1 - \text{cn}\,u - \frac{1}{2}\text{sn}^2 u\,\text{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\text{sn}^4 u\,\text{cn}\,u - \frac{1.3.5}{2.4.6}\text{sn}^6 u\,\text{cn}\,u\right)$$
$$+ \dots\dots\dots$$

Wird $\text{am}\,u = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so hat man

$$U = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{1}{9} + \dots$$

Multiplicirt man die Reihe

$$\mathfrak{L}\,\text{am}\,u = 2(\sin\text{am}\,u - \tfrac{1}{3}\sin 3\,\text{am}\,u + \tfrac{1}{5}\sin 5\,\text{am}\,u - \tfrac{1}{7}\sin 7\,\text{am}\,u + - \dots)$$

mit $\partial\,\text{am}\,u$, und integrirt, so erhält man

$$U = 2\Big[1 - \cos\text{am}\,u - \frac{1}{3^2}(1 - \cos 3\,\text{am}\,u) + \frac{1}{5^2}(1 - \cos 5\,\text{am}\,u)$$
$$- \frac{1}{7^2}(1 - \cos 7\,\text{am}\,u) + - \dots\Big]$$

und hieraus folgt für $\text{am}\,u = \frac{1}{2}\pi$ der Werth

$$U = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - + \dots\right).$$

Dieselbe Reihe wurde in §. 220. gefunden, und ihr Werth ist

$$\mu = 1{,}83193\ 11883\ 54438.$$

Nachdem dieser Werth bekannt geworden ist, kann die Reihe für U auch also dargestellt werden:

$$1.\quad U = \mu(1 - \text{cn}\,u) - \frac{1}{2}(\mu - 1)\text{sn}^2 u\,\text{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\text{sn}^4 u\,\text{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\right)\text{sn}^6 u\,\text{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\right)\text{sn}^8 u\,\text{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{9}\cdot\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\right)\text{sn}^{10} u\,\text{cn}\,u - \dots$$

Hiernach kann der Werth des Integrals $U = \int_0 \mathfrak{L}\,\text{am}\,u.\partial\,\text{am}\,u$ oder $U = \int_0 \mathfrak{L}\varphi.\partial\varphi$ am bequemsten berechnet werden, da diese Reihe am raschesten convergirt.

Die zweite Reihe kann also dargestellt werden:

$$2.\quad U = \mu - 2\cos\Phi + \frac{2}{3^2}\cos 3\Phi - \frac{2}{5^2}\cos 5\Phi + \frac{2}{7^2}\cos 7\Phi - \frac{2}{9^2}\cos 9\Phi + - \ldots,$$

wenn der Kürze wegen $\operatorname{am} u = \Phi$ gesetzt wird.

Da

$$\mathfrak{L}\Phi = \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi} = 2(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{7}\operatorname{tang}^7\tfrac{1}{2}\Phi + \ldots)$$

ist, so läfst sich das Integral U noch auf eine andere Art entwickeln. Es ist

$$\int_0 \operatorname{tang}^{n+1}\tfrac{1}{2}\Phi.\partial\Phi = \frac{2}{n}\operatorname{tang}^n\tfrac{1}{2}\Phi - \int_0 \operatorname{tang}^{n-1}\tfrac{1}{2}\Phi.\partial\Phi,$$

und da

$$\int_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi.\partial\Phi = \log\frac{2}{1+\cos\varphi} \text{ ist, so ist}$$

$$\int_0 \operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}\Phi.\partial\Phi = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi - \log\frac{2}{1+\cos\varphi},$$

$$\int_0 \operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}\Phi.\partial\Phi = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\Phi - \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi + \log\frac{1}{1+\cos\varphi},$$

$$\int_0 \operatorname{tang}^7\tfrac{1}{2}\Phi.\partial\Phi = \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\Phi + \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi - \log\frac{2}{1+\cos\varphi}$$

u. s. w.

Wir haben also, da $\frac{2}{1+\cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = 1 + \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi$ ist, die Reihe

$$\begin{aligned}3.\quad U = 2[&\log(1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi) + \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi - \log(1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi))\\ &+ \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\Phi - \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi + \log(1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi))\\ &+ \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\Phi + \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi - \log(1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi))\\ &+ \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^8\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\Phi - \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi\\ &\qquad + \log(1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi)) + \ldots].\end{aligned}$$

Durch Umordnung erhält man eine neue Reihe, in welcher der Coëfficient von $\log(1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Phi)$, $2(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots) = 2.\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$ ist: daher haben wir

$$\begin{aligned}4.\quad U = \tfrac{1}{2}\pi.\log(1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi) &+ (2-\tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}(2-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\Phi\\ &+ \tfrac{1}{3}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{tang}^6\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{4}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{7}-\tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{tang}^8\tfrac{1}{2}\Phi\\ &+ \tfrac{1}{5}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{7}+\tfrac{2}{9}-\tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{tang}^{10}\tfrac{1}{2}\Phi - + \ldots\end{aligned}$$

Anmerkung. Die vorstehende Reihe hat den Vortheil, dafs sie immer sehr rasch convergirt, es mag Φ reell oder imaginär sein. Setzen wir $U = \int_0 \mathfrak{L}\Phi.\partial\Phi = f(\Phi)$, so ist $\int_0 l\Phi.\partial\Phi = -f(\Phi i)$, daher haben wir für das schon in §. 220. behandelte Integral die Reihe

§. 268.

Die Function U kann auf mehre andere Arten entwickelt werden. Da nämlich $\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{sn}\,u + \frac{1}{3}\mathrm{sn}^3 u + \frac{1}{5}\mathrm{sn}^5 u + \frac{1}{7}\mathrm{sn}^7 u + \ldots$ ist, so haben wir

$$U = 1 - \mathrm{cn}\,u + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1 - \mathrm{cn}\,u - \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u\right)$$
$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{5.5}\left(1 - \mathrm{cn}\,u - \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\mathrm{sn}^4 u\,\mathrm{cn}\,u\right)$$
$$+\frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(1 - \mathrm{cn}\,u - \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\mathrm{sn}^4 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{sn}^6 u\,\mathrm{cn}\,u\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wird $\mathrm{am}\,u = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so hat man

$$U = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{1}{9} + \ldots$$

Multiplicirt man die Reihe

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = 2(\sin\mathrm{am}\,u - \tfrac{1}{3}\sin 3\,\mathrm{am}\,u + \tfrac{1}{5}\sin 5\,\mathrm{am}\,u - \tfrac{1}{7}\sin 7\,\mathrm{am}\,u + - \ldots)$$

mit $\partial\,\mathrm{am}\,u$, und integrirt, so erhält man

$$U = 2\Big[1 - \cos\mathrm{am}\,u - \frac{1}{3^2}(1 - \cos 3\,\mathrm{am}\,u) + \frac{1}{5^2}(1 - \cos 5\,\mathrm{am}\,u)$$
$$- \frac{1}{7^2}(1 - \cos 7\,\mathrm{am}\,u) + - \ldots\Big]$$

und hieraus folgt für $\mathrm{am}\,u = \frac{1}{2}\pi$ der Werth

$$U = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - + \ldots\right).$$

Dieselbe Reihe wurde in §. 220. gefunden, und ihr Werth ist

$$\mu = 1{,}83193\ 11883\ 54438.$$

Nachdem dieser Werth bekannt geworden ist, kann die Reihe für U auch also dargestellt werden:

$$1.\quad U = \mu(1 - \mathrm{cn}\,u) - \frac{1}{2}(\mu - 1)\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\mathrm{sn}^4 u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\right)\mathrm{sn}^6 u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\right)\mathrm{sn}^8 u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{9}\cdot\frac{2.4.6.8}{3.5\,[illegible]}\right)\mathrm{sn}^{10} u\,\mathrm{cn}\,u - \ldots$$

Hiernach kann der Werth des Integrals $U = \int_0 \mathfrak{L}$ am [illegible] oder $U = \int \mathfrak{L}\Phi.\partial\Phi$ am bequemsten berechnet werden, da diese [illegible]

$$\int_0 l\varphi.\partial\varphi = \pi.\log \mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi + (2-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}(2-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^4\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$+\tfrac{1}{3}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^6\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{7}-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^8\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$+\tfrac{1}{5}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{7}+\tfrac{2}{9}-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^{10}\tfrac{1}{2}\varphi + \ldots.$$

Die bekannte Reihe $\mathfrak{L}\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3'} + 5.\frac{\varphi^5}{5'} + 61.\frac{\varphi^7}{7'} + \ldots.$ giebt auf der Stelle die Reihen

$$\int_0 \mathfrak{L}\varphi.\partial\varphi = \frac{\varphi^2}{2'} + \frac{\varphi^4}{4'} + 5.\frac{\varphi^6}{6'} + 61.\frac{\varphi^8}{8'} + 1385.\frac{\varphi^{10}}{10'} + 50521.\frac{\varphi^{12}}{12'}$$
$$+ 2702765.\frac{\varphi^{14}}{14'} + 199360981.\frac{\varphi^{16}}{16'} + \ldots,$$

$$\int_0 l\varphi.\partial\varphi = \frac{\varphi^2}{2'} - \frac{\varphi^4}{4'} + 5.\frac{\varphi^6}{6'} - 61.\frac{\varphi^8}{8'} + 1385.\frac{\varphi^{10}}{10'} - 50521.\frac{\varphi^{12}}{12'}$$
$$+ 2702765.\frac{\varphi^{14}}{14'} - 199360981.\frac{\varphi^{16}}{16'} + - \ldots,$$

welche, wenn φ beträchtlich <1 ist, rasch genug convergiren.

Aus der bekannten Reihe

$$\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \log\frac{1+v}{1-v} - \log\frac{3+v}{3-v} + \log\frac{5+v}{5-v} - \log\frac{7+v}{7-v} + - \ldots.$$

erhält man, wenn man $\varphi = \frac{v.\pi}{2}$ setzt, und beachtet, dafs $\int_0 \frac{\log(\alpha+v)}{\log(\alpha-v)}\partial v = v.\log\frac{\alpha+v}{\alpha-v} - \alpha\log\left(1-\frac{v^2}{\alpha^2}\right)$ ist, zunächst

$$\int_0 \mathfrak{L}\varphi.\partial\varphi =$$
$$\varphi\log\frac{1+v}{1-v} - \varphi\log\frac{3+v}{3-v} + \varphi\log\frac{5+v}{5-v} - \varphi\log\frac{7+v}{7-v} + - \ldots.$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi\log(1-v^2) + \tfrac{3}{2}\pi\log\left(1-\frac{v^2}{3^2}\right) - \tfrac{5}{2}\pi\log\left(1-\frac{v^2}{5^2}\right) + \tfrac{7}{2}\pi\log\left(1-\frac{v^2}{7^2}\right) - + \ldots$$

und dieser Ausdruck ist einfacher

$$\int_0 \mathfrak{L}\varphi.\partial\varphi = \varphi.\mathfrak{L}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi\Big[\log(1-v^2) - 3\log\left(1-\frac{v^2}{3^2}\right) + 5\log\left(1-\frac{v^2}{5^2}\right)$$
$$-7\log\left(1-\frac{v^2}{7^2}\right) + 9\log\left(1-\frac{v^2}{9^2}\right) - + \ldots\Big]$$

$$\int_0 l\varphi.\partial\varphi = \varphi.l\varphi + \tfrac{1}{2}\pi\Big[\log(1+v^2) - 3\log\left(1+\frac{v^2}{3^2}\right) + 5\log\left(1+\frac{v^2}{5^2}\right)$$
$$-7\log\left(1+\frac{v^2}{7^2}\right) + 9\log\left(1+\frac{v^2}{9^2}\right) - + \ldots\Big].$$

Aus der Reihe (5. §. 267.) erhält man eine Reihe für das Integral $\int_0 u\,\partial\,\mathrm{am c}u$, wenn man $K-u$ statt u setzt. Noch andere Reihen erhält man, wenn

man in denen §. 267. $k'u$ statt u und $\frac{ik}{k}$ statt des Moduls k setzt, wodurch sich $\operatorname{am} u$ in $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u$ und $\operatorname{amc} u$ in $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{am} u$ verwandelt.

§. 269.

Reihen für die Integrale $\int_0 \operatorname{el} u.\partial \operatorname{am} u$ und $\int_0 \operatorname{elc} u.\partial \operatorname{am} u$.

Berechnen wir nach einander die Gröfsen

$$\overset{1}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2,$$

$$\overset{2}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4,$$

$$\overset{3}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6,$$

$$\overset{4}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8$$

u. s. w.,

so nähern sich dieselben rasch der Grenze $\varepsilon = \frac{2E}{\pi}$, wenn wieder E den zum Modul k gehörigen elliptischen Quadranten bezeichnet.

Da nun bekanntlich

$$\begin{aligned}\operatorname{el} u = \varepsilon.\operatorname{am} u + (1-\varepsilon)\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u + \tfrac{2}{3}(\overset{1}{c}-\varepsilon)\operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u + \frac{2.4}{3.5}(\overset{2}{c}-\varepsilon)\operatorname{sn}^5 u \operatorname{cn} u \\ + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\overset{3}{c}-\varepsilon)\operatorname{sn}^7 u \operatorname{cn} u + \ldots.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{elc} u = E + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u - \varepsilon \operatorname{am} u - (1-\varepsilon)\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u - \tfrac{2}{3}(\overset{1}{c}-\varepsilon)\operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u \\ - \frac{2.4}{3.5}(\overset{2}{c}-\varepsilon)\operatorname{sn}^5 u \operatorname{cn} u - \ldots.\end{aligned}$$

ist, so erhält man, wenn man diese Reihen mit $\partial \operatorname{am} u$ multiplicirt und integrirt, die neuen Reihen

$$\begin{aligned}1.\quad \int_0 \operatorname{el} u.\partial \operatorname{am} u = \tfrac{1}{2}\varepsilon(\operatorname{am} u)^2 + \frac{1-\varepsilon}{2}\operatorname{sn}^2 u + \tfrac{2}{3}\Big(\frac{\overset{1}{c}-\varepsilon}{4}\Big)\operatorname{sn}^4 u + \frac{2.4}{3.5}\Big(\frac{\overset{2}{c}-\varepsilon}{6}\Big)\operatorname{sn}^6 u \\ + \frac{2.4.6}{3.5.7}\Big(\frac{\overset{3}{c}-\varepsilon}{8}\Big)\operatorname{sn}^8 u + \ldots.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}2.\quad \int_0 \operatorname{elc} u.\partial \operatorname{am} u = E.\operatorname{am} u + (1-\operatorname{dn} u) - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\operatorname{am} u)^2 - \frac{1-\varepsilon}{2}.\operatorname{sn}^2 u \\ - \tfrac{2}{3}\Big(\frac{\overset{1}{c}-\varepsilon}{4}\Big)\operatorname{sn}^4 u - \frac{2.4}{3.5}\Big(\frac{\overset{2}{c}-\varepsilon}{6}\Big)\operatorname{sn}^6 u - \frac{2.4.6}{3.5.7}\Big(\frac{\overset{3}{c}-\varepsilon}{8}\Big)\operatorname{sn}^8 u - \ldots,\end{aligned}$$

welche für jeden Werth von $\operatorname{am} u$ und für jeden Modul convergiren. Die

letzte Reihe stellen wir noch auf eine andere Art dar. Es ist nach dem Zusatze zu §. 106.

$$\begin{aligned}\text{elc}\,u = E - k'^2 \Big[&\text{am}\,u + \frac{3}{2^2}k^2(\text{am}\,u - \text{sn}\,u\,\text{cn}\,u)\\ &+ \frac{3^2.5}{2^2.4^2}k^4(\text{am}\,u - \text{sn}\,u\,\text{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\,\text{sn}^3 u\,\text{cn}\,u)\\ &+ \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}k^6(\text{am}\,u - \text{sn}\,u\,\text{cn}\,u - \tfrac{4}{5}\,\text{sn}^3 u\,\text{cn}\,u\\ &\qquad - \frac{2.4}{3.5}\,\text{sn}^5 u\,\text{cn}\,u) + \ldots\Big].\end{aligned}$$

Wird diese Reihe mit $\partial\,\text{am}\,u$ multiplicirt und integrirt, so entsteht

$$3.\quad \int_0 \text{elc}\,u.\partial\,\text{am}\,u =$$

$$\begin{aligned}E.\text{am}\,u - k'^2\Big[&\tfrac{1}{2}(\text{am}\,u)^2 + \frac{3}{2^2}k^2(\tfrac{1}{2}(\text{am}\,u)^2 - \tfrac{1}{2}\text{sn}^2 u)\\ &+ \frac{3^2.5}{2^2.4^2}k^4(\tfrac{1}{2}(\text{am}\,u)^2 - \tfrac{1}{2}\text{sn}^2 u - \tfrac{1}{4}.\tfrac{2}{3}\text{sn}^4 u)\\ &+ \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}k^6\Big(\tfrac{1}{2}(\text{am}\,u)^2 - \tfrac{1}{2}\text{sn}^2 u - \tfrac{1}{4}.\tfrac{4}{5}\text{sn}^4 u\\ &\qquad - \frac{1}{6}.\frac{2.4}{3.5}\text{sn}^6 u\Big) + \ldots\Big].\end{aligned}$$

Berechnet man nun die Gröfsen

$$\begin{aligned}\overset{1}{\alpha} &= k'^2\Big(1 + \frac{3}{2^2}k^2\Big),\\ \overset{2}{\alpha} &= k'^2\Big(1 + \frac{3}{2^2}k^2 + \frac{3^2.5}{2^2.4^2}k^4\Big),\\ \overset{3}{\alpha} &= k'^2\Big(1 + \frac{3}{2^2}k^2 + \frac{3^2.5}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}k^6\Big),\\ \overset{4}{\alpha} &= k'^2\Big(1 + \frac{3}{2^2}k^2 + \frac{3^2.5}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8\Big)\end{aligned}$$

u. s. w.,

welche sich ebenfalls der Grenze $\varepsilon = \frac{2E}{\pi}$ nähern, so haben wir nach einer leichten Umordnung der vorigen Reihe die neue

$$\begin{aligned}4.\quad \int_0 \text{elc}\,u.\partial\,\text{am}\,u = E.\text{am}\,u - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\text{am}\,u)^2 + \Big(\frac{\varepsilon - k'^2}{2}\Big)\text{sn}^2 u + \tfrac{2}{3}\Big(\frac{\varepsilon - \overset{1}{\alpha}}{4}\Big)\text{sn}^4 u\\ + \frac{2.4}{3.5}\Big(\frac{\varepsilon - \overset{2}{\alpha}}{6}\Big)\text{sn}^6 u + \frac{2.4.6}{3.5.7}\Big(\frac{\varepsilon - \overset{3}{\alpha}}{8}\Big).\text{sn}^8 u + \ldots\end{aligned}$$

Es lassen sich auch leicht Reihen für die vorstehenden Integrale finden, welche desto rascher convergiren, je gröfser der Modul ist; womit wir uns jedoch hier nicht länger aufhalten.

§. 270.

Reihen zur Berechnung von u und v, wenn $\operatorname{am} u = \operatorname{am}' v = \varphi$ gegeben ist.

Es kann die Aufgabe vorgelegt werden, aus einer gegebenen Amplitude, welche auf die beiden conjugirten Modul k und k' zu beziehen ist, die ihnen entsprechenden Argumente u und v gleichzeitig zu berechnen. Wir setzen

$$\operatorname{am} u = \varphi \quad \text{und} \quad \operatorname{am}' v = \varphi.$$

Dann ist

$$u = \int_0 \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} \quad \text{und} \quad v = \int_0 \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k'^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Setzen wir nun, wie in §. 47.,

$$t = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{und} \quad k = \sin\theta, \quad \text{also} \quad k' = \cos\theta,$$

so findet sich $\operatorname{sn} u = \frac{2t}{1+t^2}$, $\operatorname{cn} u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}{1+t^2}$ und

$$1. \quad u = \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}.$$

Wird aber θ mit $\frac{1}{2}\pi - \theta$ vertauscht, wodurch nur das Vorzeichen von $\cos 2\theta$ abgeändert wird, so verwandelt sich u in v und v in u. Setzen wir

$$2. \quad (1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\overset{1}{\theta}}{1'} . t^2 + \frac{\overset{2}{\theta}}{2'} . t^4 - \frac{\overset{3}{\theta}}{3'} . t^6 + \frac{\overset{4}{\theta}}{4'} . t^8 - + \ldots,$$

so findet sich, in Anwendung des Polynomialtheorems, die einfache Relation

$$3. \quad \overset{r}{\theta} = (2r-1) . \cos 2\theta . \overset{r-1}{\theta} - (r-1)^2 . \overset{r-2}{\theta},$$

welche mit der §. 112. gefundenen Relation (8.) übereinstimmt, wenn man nur für das dortige v jetzt $\cos 2\theta$ setzt. Daher haben wir sofort die Ausdrücke

$$4. \quad \begin{cases} \overset{1}{\theta} = \cos 2\theta, \\ \overset{2}{\theta} = 3\cos^2 2\theta - 1, \\ \overset{3}{\theta} = 15\cos^3 2\theta - 9\cos 2\theta, \\ \overset{4}{\theta} = 105\cos^4 2\theta - 90\cos^2 2\theta + 9, \\ \overset{5}{\theta} = 945\cos^5 2\theta - 1050\cos^3 2\theta + 225\cos 2\theta, \\ \overset{6}{\theta} = 10395\cos^6 2\theta - 14175\cos^4 2\theta + 4725\cos^2 2\theta - 225 \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und im Allgemeinen ist $\overset{r}{\theta} = \frac{\partial^r (x^2-1)^r}{2^r . \partial x^r}$ für $x = \cos 2\theta$.

Setzt man $\theta = 0$, so wird

$$(1-2\cos 2\theta . t^2 + t^4)^{-\frac{1}{2}} = (1-t^2)^{-1} = 1+t^2+t^4+t^6+\ldots.$$

Setzt man $\theta = \frac{1}{4}\pi$, so wird

$$(1-2\cos 2\theta . t^2 + t^4)^{-\frac{1}{2}} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1-\tfrac{1}{2}t^4+\frac{1.3}{2.4}t^8-\frac{1.3.5}{2.4.6}.t^{12}+\ldots.$$

Setzt man $\theta = \frac{1}{2}\pi$, so wird

$$(1-2\cos 2\theta . t^2 + t^4)^{-\frac{1}{2}} = (1+t^2)^{-1} = 1-t^2+t^4-t^6+t^8-+\ldots.$$

Daher sind die Gröfsen

$$\frac{\overset{1}{\theta}}{1'},\quad \frac{\overset{2}{\theta}}{2'},\quad \frac{\overset{3}{\theta}}{3'},\quad \frac{\overset{4}{\theta}}{4'},\ \ldots.$$

immer ächte Brüche, wenn der Arcus θ reell ist.

Wird die Reihe (2.) mit $2\partial t$ multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$u = 2\left(t-\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}.\frac{t^3}{3}+\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}.\frac{t^5}{5}-\frac{\overset{3}{\theta}}{3'}.\frac{t^7}{7}+\frac{\overset{4}{\theta}}{4'}.\frac{t^9}{9}-\frac{\overset{5}{\theta}}{5'}.\frac{t^{11}}{11}+-\ldots\right).$$

Wird nun $\frac{1}{2}\pi-\theta$ statt θ gesetzt, so bleiben $\overset{2}{\theta}$, $\overset{4}{\theta}$, $\overset{6}{\theta}$, ... ungeändert, hingegen $\overset{1}{\theta}$, $\overset{3}{\theta}$, $\overset{5}{\theta}$, ... ändern nur ihr Vorzeichen; daher haben wir noch

$$v = 2\left(t+\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}.\frac{t^3}{3}+\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}.\frac{t^5}{5}+\frac{\overset{3}{\theta}}{3'}.\frac{t^7}{7}+\frac{\overset{4}{\theta}}{4'}.\frac{t^9}{9}+\ldots\right).$$

Aus den vorstehenden Reihen erhält man durch Addition und Subtraction

$$5.\quad \begin{cases} \dfrac{v+u}{4} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi+\dfrac{\overset{2}{\theta}}{2'}.\dfrac{\operatorname{tang}^5\frac{1}{2}\varphi}{5}+\dfrac{\overset{4}{\theta}}{4'}.\dfrac{\operatorname{tang}^9\frac{1}{2}\varphi}{9}+\dfrac{\overset{6}{\theta}}{6'}.\dfrac{\operatorname{tang}^{13}\frac{1}{2}\varphi}{13}+\ldots \\[2ex] \dfrac{v-u}{4} = \dfrac{\overset{1}{\theta}}{1'}.\dfrac{\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}\varphi}{3}+\dfrac{\overset{3}{\theta}}{3'}.\dfrac{\operatorname{tang}^7\frac{1}{2}\varphi}{7}+\dfrac{\overset{5}{\theta}}{5'}.\dfrac{\operatorname{tang}^{11}\frac{1}{2}\varphi}{11}+\dfrac{\overset{7}{\theta}}{7'}.\dfrac{\operatorname{tang}^{15}\frac{1}{2}\varphi}{15}+\ldots \end{cases}$$

und diese Reihen convergiren für jeden Modul und für jede Amplitude φ. Setzt man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, welcher Fall am ungünstigsten ist, so wird $u = K$ und $v = K'$, daher haben wir

$$6.\quad \begin{cases} \dfrac{K'+K}{4} = 1+\tfrac{1}{5}.\dfrac{\overset{2}{\theta}}{2'}+\tfrac{1}{9}.\dfrac{\overset{4}{\theta}}{4'}+\tfrac{1}{13}.\dfrac{\overset{6}{\theta}}{6'}+\tfrac{1}{17}.\dfrac{\overset{8}{\theta}}{8'}+\ldots, \\[2ex] \dfrac{K'-K}{4} = \tfrac{1}{3}.\dfrac{\overset{1}{\theta}}{1'}+\tfrac{1}{7}.\dfrac{\overset{3}{\theta}}{3'}+\tfrac{1}{11}.\dfrac{\overset{5}{\theta}}{5'}+\tfrac{1}{15}.\dfrac{\overset{7}{\theta}}{7'}+\ldots \end{cases}$$

Aufser der im §. 112. angegebenen independenten Bestimmung von $\overset{r}{\theta}$ geben wir noch einige andere. Es ist

$$\partial u = \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = S\underset{2^\alpha\,\alpha'}{\underline{[1,-2]}}^{\alpha}\,k^{2\alpha}\sin^{2\alpha}\varphi.\partial\varphi.$$

Ferner ist $\sin\varphi = \dfrac{2t}{1+t^2}$ und $\partial\varphi = \dfrac{2\partial t}{1+t^2}$, also

$$\partial u = 2.S\frac{[1,-2]^{\alpha}}{\alpha'}k^{2\alpha}.2^{\alpha}.t^{2\alpha}(1+t)^{-(2\alpha+1)}\partial t,$$

und da $(1+t^2)^{-(2\alpha+1)} = S\frac{[-(2\alpha+1)]^{\beta}}{\beta'}t^{2\beta}$ ist, so ist

$$\partial u = 2.S\frac{[1,-2]^{\alpha}}{\alpha'}\frac{[-(2\alpha+1)]^{\beta}}{\beta'}k^{2\alpha}.2^{\alpha}t^{2\gamma}.\partial t \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=\gamma).$$

Wird dieser Ausdruck mit dem vorigen verglichen, so hat man

$$(-1)^r.\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = S\left\{\frac{[1,-2]^{\alpha}}{\alpha'}\frac{[-(2\alpha+1)]^{\beta}}{\beta'}k^{2\alpha}.2^{\alpha}\right\} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Es ist aber $[-(2\alpha+1)]^{\beta} = (-1)^{\beta}[2\alpha+1,-1]^{\beta}$, $[1,-2] = \frac{[1,-1]^{2\alpha}}{2^{\alpha}\alpha'}$,

$[2\alpha+1,-1]^{\beta}[1,-1]^{2\alpha} = [1,-1]^{2\alpha+\beta} = (2\alpha+\beta)' = (r+\alpha)' = \beta'[r+\alpha]^{2\alpha}$, daher haben wir

$$7. \quad \frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = S(-1)^{\alpha}\frac{[r+\alpha]^{2\alpha}}{\alpha'\alpha'}\sin^{2\alpha}\theta,$$

also $(-1)^r.\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = S(-1)^{\alpha}\frac{[r+\alpha]^{2\alpha}}{\alpha'\alpha'}\cos^{2\alpha}\theta$, wenn noch $\frac{1}{2}\pi-\theta$ statt θ gesetzt wird; oder auch:

$$\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = 1-\frac{(r+1)r}{1^2}\sin^2\theta+\frac{(r+2)(r+1)(r)(r-1)}{1^2.2^2}\sin^4\theta$$
$$-\frac{(r+3)(r+2)(r+1)(r)(r-1)(r-2)}{1^2.2^2.3^2}\sin^6\theta+-\ldots,$$

$$(-1)^r.\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = 1-\frac{(r+1)r}{1^2}\cos^2\theta+\frac{(r+2)(r+1)(r)(r-1)}{1^2.2^2}\cos^4\theta$$
$$-\frac{(r+3)(r+2)(r+1)(r)(r-1)(r-2)}{1^2.2^2.3^2}\cos^6\theta+-\ldots$$

In §. 272. wird noch eine andere Formel für $\overset{r}{\Theta}$ hergeleitet werden, welche nach den Cosinus der Vielfachen von 2θ fortschreitet.

Zusatz. Setzt man $\varphi = \text{am}\,2u$, also $t = \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \text{tang}\,\frac{1}{2}\text{am}\,2u$ $= \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u = \frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}$, so hat man

$$u = t-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}.\frac{t^3}{3}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}.\frac{t^5}{5}-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}.\frac{t^7}{7}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}.\frac{t^9}{9}-+\ldots$$

und setzt man $t = \text{tang}\,\frac{1}{2}\text{am}'2v = \frac{\text{sn}'v}{\text{snc}'v}$, so hat man auch

$$v = t + \frac{\overset{1}{\theta}}{1'}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{\overset{2}{\theta}}{2'}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{\overset{3}{\theta}}{3'}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{\overset{4}{\theta}}{4'}\cdot\frac{t^9}{9} + \dots,$$

daher ist nun

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{v+u}{2} = t + \dfrac{\overset{2}{\theta}}{2'}\cdot\dfrac{t^5}{5} + \dfrac{\overset{4}{\theta}}{4'}\cdot\dfrac{t^9}{9} + \dfrac{\overset{6}{\theta}}{6'}\cdot\dfrac{t^{13}}{13} + \dfrac{\overset{8}{\theta}}{8'}\cdot\dfrac{t^{17}}{17} + \dots \text{ und} \\ \dfrac{v-u}{2} = \dfrac{\overset{1}{\theta}}{1'}\cdot\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{\overset{3}{\theta}}{3'}\cdot\dfrac{t^7}{7} + \dfrac{\overset{5}{\theta}}{5'}\cdot\dfrac{t^{11}}{11} + \dfrac{\overset{7}{\theta}}{7'}\cdot\dfrac{t^{15}}{15} + \dfrac{\overset{9}{\theta}}{9'}\cdot\dfrac{t^{19}}{19} + \dots \end{cases}$$

Setzt man in diesen Reihen $t = 1$, so ist $u = K - u$, also $u = \frac{1}{2}K$, und ebenso $v = \frac{1}{2}K'$, und man findet die obigen Reihen (6.) wieder; setzt man aber $\frac{1}{t}$ für t, so vertauscht man u mit $K - u$ und v mit $K' - v$; daher ist, wenn $K - u = u'$ und $K' - v = v'$ gesetzt wird,

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{v'+u'}{2} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{\overset{2}{\theta}}{2'}\cdot\dfrac{1}{5t^5} + \dfrac{\overset{4}{\theta}}{4'}\cdot\dfrac{1}{9t^9} + \dfrac{\overset{6}{\theta}}{6'}\cdot\dfrac{1}{13t^{13}} + \dots \\ \dfrac{v'-u'}{2} = \dfrac{\overset{1}{\theta}}{1'}\cdot\dfrac{1}{3t^3} + \dfrac{\overset{3}{\theta}}{3'}\cdot\dfrac{1}{7t^7} + \dfrac{\overset{5}{\theta}}{5'}\cdot\dfrac{1}{11t^{11}} + \dfrac{\overset{7}{\theta}}{7'}\cdot\dfrac{1}{15t^{15}} + \dots \end{cases}$$

Diese Reihen convergiren, wenn t oder die Brüche $\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}$ und $\frac{\text{sn}'\,v}{\text{snc}'\,v}$ gröfser als Eins sind; dann ist $u > \frac{1}{2}K$ und $v > \frac{1}{2}K'$. Daher sind nun $u' < \frac{1}{2}K$ und $v' > \frac{1}{2}K'$. Indem man aber u' und v' berechnet, findet man auch u und v, da die Quadranten K und K' als bekannt angesehen werden.

Anmerkung. Ist der Modul $k = \sin\frac{1}{4}\pi$, so wird $\overset{1}{\theta} = \overset{3}{\theta} = \overset{5}{\theta} \dots = 0$, daher ist nun $v = u$, und zwar

$$u = 2\left(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{2}\,\text{tang}^5\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}\,\text{tang}^9\,\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{13}\cdot\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{tang}^{13}\,\tfrac{1}{2}\varphi \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{17}\cdot\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\text{tang}^{17}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \dots\right),$$

wenn $\varphi = \text{am}\,u$ gesetzt wird. Bezeichnen wir den zu dem Modul $k = \sin\frac{1}{4}\pi$ gehörenden Modularquadranten mit I, so haben wir

$$I = 2 - \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{9}\cdot\tfrac{1.3}{2.4} - \tfrac{2}{13}\cdot\tfrac{1.3.5}{2.4.6} + \tfrac{2}{17}\cdot\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - + \dots \text{ oder}$$
$$I = 1{,}85407\ 46773\ 01.$$

§. 271.

Reihen zur Berechnung von $\text{el}\,u$ und $\text{el}\,v'$, wenn $\varphi = \text{am}\,u = \text{am}'\,v$ gegeben ist.

Setzen wir wieder $t = \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \text{tang}\,\frac{1}{2}\text{am}\,u = \text{tang}\,\frac{1}{2}\text{am}'v$, so ist

$$\partial u = \frac{2\,\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta.t^2+t^4)}} \quad\text{und}\quad \text{dn}^2 u = \frac{1+2\cos 2\theta.t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

da nun $\mathrm{el}\,u = \int_0 \mathrm{dn}^2 u.\partial u$ ist, so findet sich

$$\mathrm{el}\,u = \int_0 \frac{2\partial t\sqrt{(1+2\cos 2\theta.t^2+t^4)}}{(1+t^2)^2} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{el}'v = \int_0 \frac{2\partial t\sqrt{(1-2\cos\theta.t^2+t^4)}}{(1+t^2)^2}.$$

Wird die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta.t^2+t^4)}} = 1-\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}t^2+\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}t^4-\frac{\overset{3}{\theta}}{3'}t^6+\frac{\overset{4}{\theta}}{4'}t^8-\frac{\overset{5}{\theta}}{5'}t^{10} \text{ etc.}$$

mit $1+2\cos 2\theta.t^2+t^4$ multiplicirt, so erhält man für $\sqrt{(1+2\cos 2\theta.t^4+t^4)}$ zunächst die Reihe

$$\left.\begin{matrix}1-\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}\\+2\cos\theta\\ \\ \end{matrix}\right\}t^2\left.\begin{matrix}+\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}\\-2\cos 2\theta.\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}\\+1\end{matrix}\right\}t^4\left.\begin{matrix}-\frac{\overset{3}{\theta}}{3'}\\+2\cos 2\theta.\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}\\-\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}\end{matrix}\right\}t^6\left.\begin{matrix}+\frac{\overset{4}{\theta}}{4'}\\-2\cos 2\theta.\frac{\overset{3}{\theta}}{3'}\\+\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}\end{matrix}\right\}t^8 \text{ etc.}$$

Da aber $(2r-1)\cos 2\theta.\overset{r-1}{\theta} = \overset{r}{\theta}+(r-1)^2\overset{r-2}{\theta}$, also

$$2\cos 2\theta.\frac{\overset{r-1}{\theta}}{(r-1)'} = \frac{2r}{2r-1}.\frac{\overset{r}{\theta}}{r'}+\frac{2r-2}{2r-1}.\frac{\overset{r-2}{\theta}}{(r-2)'}$$

ist, so erhält man durch die Benutzung dieser Formel

$$\sqrt{(1+\cos 2\theta.t^2+t^4)}$$

$$= 1+\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}t^2+\tfrac{1}{3}\left(1-\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}\right)t^4+\tfrac{1}{5}\left(\frac{\overset{1}{\theta}}{1'}-\frac{\overset{3}{\theta}}{3'}\right)t^6+\tfrac{1}{7}\left(\frac{\overset{2}{\theta}}{2'}-\frac{\overset{4}{\theta}}{4'}\right)t^8+\tfrac{1}{9}\left(\frac{\overset{3}{\theta}}{3'}-\frac{\overset{4}{\theta}}{4'}\right)t^{10}$$

$$+\tfrac{1}{11}\left(\frac{\overset{4}{\theta}}{4'}-\frac{\overset{6}{\theta}}{6'}\right)t^{12}-\tfrac{1}{13}\left(\frac{\overset{5}{\theta}}{5'}-\frac{\overset{7}{\theta}}{7'}\right)t^{14}+- \text{ etc.}$$

Jedes Glied dieser Reihe ist noch mit $\frac{2\partial t}{(1+t^2)^2}$ zu multipliciren und zu integriren, um die Reihe für $\mathrm{el}\,u$ zu erhalten. Man findet aber leicht die Relation

$$(2n-1).\int_0 \frac{t^{2n+2}\partial t}{(1+t^2)^2} = \frac{t^{2n+1}}{1+t^2}-(2n+1)\int_0 \frac{t^{2n}\partial t}{(1+t^2)^2},$$

und setzt man zur Abkürzung allgemein

$$T_{(n)} = \int_0 \frac{2t^{2n}.\partial t}{(2n-1)(1+t^2)^2},$$

so verwandelt sich die vorige Relation in

$$T_{(n+1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.\frac{t^{2n+1}}{1+t^2}-T_{(n)}.$$

Man findet aber

$$\int_0 \frac{2\,\partial t}{(1+t^2)^2} = \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{t}{1+t^2},$$

also

$$T_1 = +\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{t}{1+t^2},$$
$$T_2 = -\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{t}{1+t^2} + \frac{2t^3}{1.3(1+t^2)},$$
$$T_3 = +\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{t}{1+t^2} - \frac{2t^3}{1.3(1+t^2)} + \frac{2t^5}{3.5(1+t^2)},$$
$$T_4 = -\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{t}{1+t^2} - \frac{2t^3}{1.3(1+t^2)} + \frac{2t^5}{3.5(1+t^2)} - \frac{2t^7}{5.7(1+t^2)}$$

u. s. w.

Werden diese Werthe substituirt, so erhält man für el$u$ eine Reihe von der Form

$$\text{el}\,u = \overset{0}{a}.\tfrac{1}{2}\varphi + \overset{1}{a}.\frac{t}{1+t^2} + \frac{2\overset{2}{a}.t^3}{1.3(1+t^2)} + \frac{2\overset{3}{a}.t^5}{3.5(1+t^2)} + \frac{2\overset{4}{a}.t^7}{5.7(1+t^2)} + \text{etc.}$$

und die Coëfficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc. in ihr werden durch Reihen angegeben, die sich gleichsam von selbst summiren. Es ist

$$\overset{0}{a} = 1 - \left(0 - \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\right) - \left(1 - \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\right) - \left(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} - \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\right) - \left(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} - \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\right) - \text{etc. oder}$$

$$\overset{0}{a} = 1 - \left[0 + 1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \text{etc.}\right] + \left[\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \text{etc.}\right]$$
$$= 1 - 1 = 0. \quad \text{Ferner}$$

$$\overset{1}{a} = 1 + \left[0 + 1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \text{etc.}\right] - \left[\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \text{etc.}\right]$$
$$= 1 + 1 = 2,$$

$$\overset{2}{a} = \left[1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \text{etc.}\right] - \left[\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'} + \text{etc.}\right]$$
$$= 1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'},$$

$$\overset{3}{a} = -\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \text{etc.}\Big] + \left[\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'} + \text{etc.}\right] = -\left(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\right).$$

Ebenso findet man

$$\overset{4}{a} = \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}, \quad \overset{5}{a} = -\left(\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\right), \quad \overset{6}{a} = \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}, \quad \overset{7}{a} = -\left(\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'} + \frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\right), \text{ u. s. w.}$$

Beachtet man nun aufserdem, dafs $\frac{2t}{1+t^2} = \sin\varphi$ ist, so entsteht die Reihe

$$\operatorname{el} u = \sin\varphi\Big[1 + \Big(1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\Big)\cdot\frac{t^2}{1.3} - \Big(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\Big)\cdot\frac{t^4}{3.5} + \Big(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\Big)\cdot\frac{t^6}{5.7}$$
$$- \Big(\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\Big)\cdot\frac{t^8}{7.9} + - \text{etc.}\Big].$$

Wird nun der Modul $k = \sin\theta$ mit $k' = \cos\theta$ vertauscht, so erhält man

$$\operatorname{el}' v = \sin\varphi\Big[1 + \Big(1 - \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\Big)\cdot\frac{t^2}{1.3} - \Big(-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\Big)\cdot\frac{t^4}{3.5} + \Big(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} - \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\Big)\cdot\frac{t^6}{5.7}$$
$$- \Big(-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\Big)\cdot\frac{t^8}{7.9} + - \text{etc.}\Big],$$

und verbindet man diese Reihe mit der vorigen durch Addition und Subtraction, so entstehet

$$\frac{\operatorname{el} u + \operatorname{el}' v}{2} = \sin\varphi.\Big(1 + \frac{t^2}{1.3} - \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{t^4}{3.5} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{t^6}{5.7} - \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{t^8}{7.9} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{t^{10}}{9.11}$$
$$- \frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\cdot\frac{t^{12}}{11.13} + \frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\cdot\frac{t^{14}}{13.15} - \frac{\overset{8}{\Theta}}{8'}\cdot\frac{t^{16}}{15.17} + - \text{etc.}\Big]$$

und

$$\frac{\operatorname{el} u - \operatorname{el}' u}{2} = \sin\varphi.\Big(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{t^2}{1.3} - \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{t^4}{3.5} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{t^6}{5.7} - \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{t^8}{7.9} + \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}\cdot\frac{t^{10}}{9.11}$$
$$- \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}\cdot\frac{t^{12}}{11.13} + \frac{\overset{7}{\Theta}}{7'}\cdot\frac{t^{14}}{13.15} - \frac{\overset{7}{\Theta}}{7'}\cdot\frac{t^{16}}{15.17} + - \text{etc.}\Big).$$

Setzt man $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = 1$, so ist auch $\sin\varphi = 1$, und man erhält in diesem für die Anwendung der Reihen ungünstigsten Falle

$$\frac{E+E'}{8} = \frac{1}{1.3} - \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{1}{3.5.7} - \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{1}{7.9.11} - \frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\cdot\frac{1}{11.13.15} - \frac{\overset{8}{\Theta}}{8'}\cdot\frac{1}{15.17.19} + \text{etc.},$$

$$\frac{E-E'}{8} = \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{1}{1.3.5} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{1}{5.7.9} + \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}\cdot\frac{9}{9.11.13} + \frac{\overset{7}{\Theta}}{7'}\cdot\frac{1}{13.15.17} + \frac{\overset{9}{\Theta}}{9'}\cdot\frac{1}{17.19.21} + \text{etc.}$$

Auch die Modular-Integrale zweiter Art gestatten ähnliche Entwicklungen, womit wir uns jedoch der Kürze wegen hier nicht aufhalten.

§. 272.

Entwicklung der Functionen $\overset{1}{\vartheta}, \overset{2}{\vartheta}, \overset{3}{\vartheta}, \overset{4}{\vartheta}, \ldots$ nach den Cosinus der Vielfachen von θ.

Setzen wir wieder

$$(1 - 2\cos 2\theta . t^2 + t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\overset{1}{\vartheta}}{1'}.t^2 + \frac{\overset{2}{\vartheta}}{2'}.t^4 + \frac{\overset{3}{\vartheta}}{3'}.t^6 + \frac{\overset{4}{\vartheta}}{4'}.t^8 + \frac{\overset{5}{\vartheta}}{5'}.t^{10} + \ldots.,$$

so können die Coefficienten in dieser Reihe nach den Cosinus der Vielfachen von ϑ entwickelt werden, und zwar auf folgende Art. Es ist

$$1-2\cos 2\vartheta . r^2 + r^4 = (1-e^{2\vartheta i}.r^2)(1-e^{-2\vartheta i}.r^2).$$

Setzen wir nun

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^{2\vartheta i}.r^2)}} = (0) + (1).e^{2\vartheta i}.r^2 + (2).e^{4\vartheta i}.r^4 + (3).e^{6\vartheta i}.r^6 + (4).e^{8\vartheta i}.r^8 + \ldots,$$

indem wir die numerischen Coefficienten in dieser Reihe der Kürze wegen durch (0), (1), (2), (3), ... bezeichnen, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{2\vartheta i}.r^2}} = S(z).e^{2z\vartheta i}.r^{2z} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\vartheta i}.r^2}} = S(\zeta).e^{-2\zeta\vartheta i}.r^{2\zeta},$$

daher ist

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\cos 2\vartheta . r^2+r^4)}} = S(z)(\zeta).e^{(z-\zeta)2\vartheta i}.r^{2\nu} \quad \text{cond.}(z+\zeta=\nu),$$

und da diese Reihe der obigen gleich sein muſs, so ist nach

$$\frac{\overset{\nu}{\mathfrak{S}}}{r^{2\nu}} = (S(z)(\zeta).e^{(z-\zeta)2\vartheta i}) \text{ cond.}(z+\zeta=\nu).$$

Vertauschen wir z mit ζ, so erhalten wir einen dem vorigen ähnlichen Ausdruck, und das arithmetische Mittel beider ist

$$\frac{\overset{\nu}{\mathfrak{S}}}{r^{2\nu}} = (S(z)(\zeta)\cos 2(z-\zeta)\vartheta) \quad \text{cond.}(z+\zeta=\nu).$$

In diesem Ausdrucke sind die äuſsersten Glieder und auch diejenigen jedesmal gleich groſs, welche von den äuſsersten gleich weit abstehen. Die Coefficienten (z) und (ζ) sind Brüche und es ist $(z) = \frac{1.3.5 \ldots 2z-1}{2.4.6 \ldots 2z}$; ebenso ist $(\zeta) = \frac{1.3.5 \ldots 2\zeta-1}{2.4.6 \ldots 2\zeta}$. Setzen wir also der Kürze wegen das Product der ungeraden Zahlen

$$(1.3.5 \ldots 2z-1)(1.3.5 \ldots 2\zeta-1) = [z.\zeta],$$

so ist

$$\frac{\overset{\nu}{\mathfrak{S}}}{r^{2\nu}} = S\frac{[z.\zeta]}{2^{\nu}.z'.\zeta'}\cos 2(z-\zeta)\vartheta$$

oder auch

$$2^{\nu}.\overset{\nu}{\mathfrak{S}} = (S[\nu]^{z}_{1}.[z.\zeta]\cos 2(z-\zeta)\vartheta) \quad \text{cond.}(z+\zeta=\nu),$$

und nun sind die Coefficienten der cyklischen Cosinus der Vielfachen von ϑ in dem Ausdrucke ganze Zahlen. Da $\cos 2(z-\zeta)\vartheta = \cos 2(\zeta-z)\vartheta$ ist,

so können immer zwei Glieder, für welche α und β verschieden sind, als gleiche zu einem Gliede vereinigt werden. Für $r = 5$ hat man z. B.

$$2^4.\overset{5}{\Theta} = 1.3.5.7.9.\cos 10\theta + 5.1.3.5.7 \cos 6\theta + 10.1.3.1.3.5 \cos 2\theta$$

oder

$$\overset{5}{\Theta} = \tfrac{15}{16}(63 \cos 10\theta + 35 \cos 6\theta + 30 \cos 2\theta).$$

Hieraus erhellet nun zunächst, daſs sich die Functionen el$u$, el$'v$, wie auch die Argumente u und v selbst, in Reihen entwickeln lassen, welche nach den Cosinus des vervielfachten Arcus θ fortschreiten.

Nach der vorhin entwickelten allgemeinen Formel findet man die folgenden Werthe:

$$\overset{1}{\Theta} = \cos 2\theta,$$
$$2.\overset{2}{\Theta} = 3\cos 4\theta + 1,$$
$$2^2.\overset{3}{\Theta} = 3(5\cos 6\theta + 3\cos 2\theta),$$
$$2^3.\overset{4}{\Theta} = 3(35\cos 8\theta + 20\cos 4\theta + 9),$$
$$2^4.\overset{5}{\Theta} = 3.5(63\cos 10\theta + 35\cos 6\theta + 30\cos 2\theta),$$
$$2^5.\overset{6}{\Theta} = 3.5(693\cos 12\theta + 378\cos 8\theta + 315\cos 4\theta + 150),$$
$$2^6.\overset{7}{\Theta} = 3.5.7(1287\cos 14\theta + 693\cos 10\theta + 567\cos 6\theta + 525\cos 2\theta)$$

u. s. w.

Anmerkung. Die Functionen $\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}$, $\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}$, $\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}$, ... sind noch in anderen Beziehungen von Wichtigkeit. Man vergleiche die Abhandlung: „Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen, die aus der Entwicklung der Function $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ entstehen" von *Jacobi* im 2ten Bande des Journals der Mathematik von *Crelle*.

§. 273.

Zweite Umwandlung der Reihen, welche zur Berechnung von u und v aus $\varphi = \text{am}\, u = \text{am}'\, v$ dienen.

Man kann die Argumente u und v nach Cosinus der Vielfachen Arcus von $\theta = \text{arc}\sin(k)$ entwickeln; aber auch nach Potenzen von $\cos 2\theta$. Diese Entwicklung hat den Vorzug vor jener, und daher beschränken wir uns lediglich hierauf. Man kann zwei Wege einschlagen, indem man entweder von den im §. 270. gefundenen Reihen ausgeht, oder auch von der ursprünglichen Differentialformel

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}.$$

Es ist $1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4 = 2t^2\left(\frac{t^2+t^{-2}}{2}+\cos 2\theta\right)$, also ist auch

$$u = \int_0 \frac{\partial t}{t} . \sqrt{\left(\frac{2}{\frac{t^2+t^{-2}}{2}+\cos 2\theta}\right)}.$$

Setzen wir nun

$$t = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = e^{-\psi},$$

so ist, da überhaupt $\mathfrak{L}\varphi = \log\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\varphi)$, auch $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\varphi) = \log\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}$, und da

$$1.\quad \begin{cases}\psi = \log\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi} = \log\frac{1}{t} \text{ ist, so ist}\\ \psi = \mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\varphi).\end{cases}$$

Nimmt man die hyperbolischen Functionen, so hat man

$$2.\quad \begin{cases}\mathfrak{Cos}\,\psi = \frac{1}{\cos(\frac{1}{2}\pi-\varphi)} = \frac{1}{\sin\varphi},\\ \mathfrak{Sin}\,\psi = \operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi-\varphi) = \cot\varphi,\\ \mathfrak{Tang}\,\psi = \cos\varphi.\end{cases}$$

Da $\mathfrak{Sin}\,2\psi = 2\,\mathfrak{Sin}\,\psi\,\mathfrak{Cos}\,\psi$ und $\mathfrak{Cos}\,2\psi = 2\,\mathfrak{Cos}^2\psi - 1$ ist, so erhalten wir

$$3.\quad \mathfrak{Sin}\,2\psi = \frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \text{ und } \mathfrak{Cos}\,2\psi = \frac{2}{\sin^2\varphi}-1 = \frac{2(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}{\sin^2\varphi}.$$

Wollen wir ψ durch t ausdrücken, so haben wir aufser der Gleichung $\psi = \log\frac{1}{t}$ noch die Gleichungen

$$4.\quad \begin{cases}\mathfrak{Cos}\,\psi = \frac{1+t^2}{2t},\quad \mathfrak{Sin}\,\psi = \frac{1-t^2}{2t},\quad \mathfrak{Tang}\,\psi = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\ \mathfrak{Cos}\,2\psi = \frac{1+t^4}{2t^2} = \frac{t^2+t^{-2}}{2},\quad \mathfrak{Sin}\,2\psi = \frac{1-t^4}{2t^2} = \frac{t^{-2}-t^2}{2} \text{ und}\\ \qquad\qquad \mathfrak{Tang}\,2\psi = \frac{1-t^4}{1+t^4},\end{cases}$$

Differentiiren wir die Formel $\psi = \mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\varphi)$, so erhalten wir $\partial\psi = \frac{\partial(\frac{1}{2}\pi-\varphi)}{\cos(\frac{1}{2}\pi-\varphi)}$ oder

$$5.\quad \partial\psi = -\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{\partial t}{t}.$$

Werden diese Werthe benutzt, so verwandelt sich das vorgelegte Differential in

$$6.\quad u = \int_\infty -\partial\psi . \sqrt{\left(\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi+\cos 2\theta}\right)}.$$

Da nun

$$\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi+\cos 2\theta}}=\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}}+\frac{1.3}{2.4}\cos^2 2\theta.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}}$$
$$-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cos^3 2\theta.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}}+-\ldots.$$

ist, so haben wir

$$u=\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}}+\frac{1.3}{2.4}\cos^2 2\theta\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}}$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^9 2\psi}}+\ldots.$$
$$-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta.\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cos^3 2\theta.\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}}$$
$$-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta.\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{11} 2\psi}}-\ldots.$$

Setzen wir nun die Integrale

$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}}=U \quad\text{und}\quad \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}}=\overset{1}{U},$$
$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}}=\tfrac{1}{3}\overset{2}{U} \quad\text{und}\quad \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}}=\tfrac{3}{5}\overset{3}{U},$$
$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^9 2\psi}}=\frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{U} \quad\text{und}\quad \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{11} 2\psi}}=\frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U},$$
$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{13} 2\psi}}=\frac{1.5.9}{3.7.11}.\overset{6}{U} \quad\text{und}\quad \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{15} 2\psi}}=\frac{3.7.11}{5.9.13}\overset{7}{U}$$

u. s. w.,

so verwandelt sich die obige Reihe in

$$u=U+\frac{1^2}{2.4}\overset{2}{U}.\cos^2 2\theta+\frac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\overset{4}{U}\cos^4 2\theta+\frac{1^2.5^2.9^2}{2.4.6.8.10.12}\overset{6}{U}\cos^6 2\theta+\ldots$$
$$-\tfrac{1}{2}\overset{1}{U}\cos 2\theta-\frac{3^2}{2.4.6}\overset{3}{U}\cos^3 2\theta-\frac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\overset{5}{U}\cos^5 2\theta$$
$$-\frac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\overset{7}{U}\cos^7 2\theta-\ldots.,$$

und hierin sind die Functionen $U,\ \overset{2}{U},\ \overset{3}{U},\ \overset{4}{U}$ etc. unabhängig von dem Modul $k=\sin\theta$. Vertauschen wir θ mit $\frac{1}{2}\pi-\theta$, so verwandelt sich, da $\varphi=\operatorname{am}u=\operatorname{am}'v$ sein soll, das Argument u in v, und $\cos 2\theta$ in $-\cos 2\theta$: daher ist

$$7.\quad\begin{cases}\dfrac{v+u}{2}=U+\dfrac{1^2}{2.4}\overset{2}{U}\cos^2 2\theta+\dfrac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\overset{4}{U}\cos^4 2\theta\\ \qquad\qquad+\dfrac{1^2.5^2.9^2}{2.4.6.8.10.12}\overset{6}{U}\cos^6 2\theta+\ldots.\quad\text{und}\\ \dfrac{v-u}{2}=\tfrac{1}{2}\overset{1}{U}\cos 2\theta+\dfrac{3^2}{2.4.6}\overset{3}{U}\cos^3 2\theta+\dfrac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\overset{5}{U}\cos^5 2\theta\\ \qquad\qquad+\dfrac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\overset{7}{U}\cos^7 2\theta+\ldots.,\end{cases}$$

und es bleiben nun nur noch die Functionen $U, \overset{1}{U}, \overset{2}{U}, \overset{3}{U}$ etc. der Amplitude Φ zu ermitteln übrig. Bilden diese eine convergirende Reihe, so haben die vorstehenden Reihen eine um so gröfsere Convergenz.

Anmerkung. Setzen wir $\theta = 0$, so wird $u = \Phi$ und $v = \mathfrak{L}\Phi$: daher haben wir noch die besonderen Reihen

$$8. \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{L}\varphi + \varphi}{2} = U + \dfrac{1^2}{2.4}\overset{2}{U} + \dfrac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\overset{4}{U} + \dfrac{1^2.5^2.9^2}{2.4.6.8.10.12}\overset{6}{U} + \ldots, \\ \dfrac{\mathfrak{L}\varphi - \varphi}{2} = \tfrac{1}{2}\overset{1}{U} + \dfrac{3^2}{2.4.6}\overset{3}{U} + \dfrac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\overset{5}{U} + \dfrac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\overset{7}{U} + \ldots \end{cases}$$

§. 274.

Nehmen wir nun die einzelnen, nur von der Amplitude $\Phi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}' v$ abhängenden Integrale in Betracht, so finden wir

$$1. \quad U = \int_{\infty} -\partial\psi \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\, 2\psi}} = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+t^4)}} \quad \text{oder auch} \quad U = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

d. h. *es ist Φ auch die Amplitude des Argumentes U mit Beziehung auf den Modul $k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sin\frac{1}{4}\pi$.*

Die Werthe dieses Integrals U kann man für jede Amplitude Φ aus den von *Legendre* berechneten Tafeln entnehmen, und es darf sein Werth insofern als bekannt angesehen werden. Indessen wird es sich bald zeigen, dafs man auch ohne Vermehrung der Arbeit den Werth des Integrals U durch dieselbe Rechnung findet, wodurch man die Werthe von u und v ermittelt. Setzt man in den Reihen (7) $\theta = \frac{1}{4}\pi$, so wird in der That $u = v = U$; was mit dem so eben gefundenen Resultate übereinstimmt.

Da $\partial U = \dfrac{\partial U}{\mathfrak{Cos}\, 2\psi}$ ist, so erhält man

$$2. \quad \overset{1}{U} = \int_0 \frac{4t^2\partial t}{\sqrt{(1+t^4)^3}}, \quad \overset{1}{U} = \int_0 \frac{\sin^2\varphi . \partial\varphi}{2\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)^3}}.$$

Dieses Integral hängt von einem Modular-Integrale der ersten Art ab, welches den Modul $\sin\frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ hat. Setzen wir

$$3. \quad V = \int_0 \partial\Phi \sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\Phi)},$$

wählen für den Modular- und für den elliptischen Quadranten, welcher zu dem Modul $\sin\frac{1}{4}\pi$ gehört, die Zeichen I und G: setzen wir nämlich, wie in §. 270.,

$$4. \begin{cases} I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}} = 1{,}85407\,46773\,01, \\ G = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial\Phi\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\Phi)} = 1{,}35064\,38810\,48 \quad \text{(nach } \textit{Legendre}\text{)}, \end{cases}$$

und setzen wir aufserdem, mit Beziehung auf den Modul $\sin\frac{1}{4}\pi$, die Amplitude $\varphi = \operatorname{am} U$, so reducirt sich das Integral (2.) auf

$$\overset{1}{U} = \int_0 \operatorname{cnc}^2 U . \partial U \quad \text{für} \quad k = \sin\tfrac{1}{4}\pi;$$

daher ist nach §. 64.

$$\overset{1}{U} = \frac{G - \operatorname{elc} U - k'^2 U}{k^2} = \frac{\operatorname{el} U - k^2 \operatorname{sn} U \operatorname{snc} U - k'^2 U}{k^2} \quad \text{für } k = \sin\tfrac{1}{4}\pi, \text{ oder}$$

$$5. \quad \overset{1}{U} = 2.V - U - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}.$$

Drückt man den periodischen Theil des Integrals $\overset{1}{U}$ durch t und ψ aus, so hat man die Ausdrücke

$$6. \quad \overset{1}{U} = 2.V - U - \mathfrak{Tang}\,\psi\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} \quad \text{und} \quad \overset{1}{U} = 2.V - U - \frac{1-t^2}{1+t^2}.\frac{2t}{\sqrt{(1+t^4)}}.$$

Setzen wir, mit Beziehung auf die Ausdrücke der übrigen Integrale, noch $\operatorname{amc} U = \varphi'$, so dafs

$$7. \quad \operatorname{tang}\varphi.\operatorname{tang}\varphi' = \sqrt{2}, \quad \sin\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}, \quad \cos\varphi' = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}.\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}$$

ist, so haben wir die Formel

$$8. \quad \overset{1}{U} = 2V - U - \sin\varphi\sin\varphi'.$$

Aufserdem ist noch

$$9. \quad \mathfrak{Cos}\,2\psi = \frac{1}{\cos^2\varphi'} = \frac{2\cot^2\varphi}{\sin^2\varphi'}.$$

Anmerkung. Werden U und $\overset{1}{U}$ nach Potenzen von $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ entwickelt, so erhalten wir

$$U = 2\left(t - \frac{1}{2}.\frac{t^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{t^9}{9} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{t^{13}}{13} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{t^{17}}{17} - + \ldots\right),$$

$$\overset{1}{U} = 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}.\frac{t^7}{7} + \frac{3.5}{2.4}.\frac{t^{11}}{11} - \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{t^{15}}{15} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.\frac{t^{19}}{19} - + \ldots\right).$$

Da nicht nur U, sondern auch V aus den von *Legendre* für den Modul $\sin\frac{1}{4}\pi$ berechneten Tafeln für jeden Werth von φ entnommen werden können, so ist die Anwendung dieser Reihen unnöthig.

§. 275.

Nachdem nun die Anfangsgröfsen U und $\overset{1}{U}$ in den Reihen (7. §. 273.) ermittelt worden sind, lassen sich leicht die nachfolgenden Gröfsen $\overset{2}{U}, \overset{3}{U}. \overset{4}{U}$ etc., welche als Coëfficienten in den genannten Reihen vorkommen, ebenfalls

ermitteln. Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der Relation

$$n.\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{n+2}2\psi}} = (n-2).\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{n-2}2\psi}} - \text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{n}2\psi}}.$$

Setzt man hierin $n = 3$, so erhält man

$$\overset{2}{U} = U - \text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^3 2\psi}}.$$

Setzt man $n = 5$, so hat man $\overset{3}{U} = \overset{1}{U} - \frac{1}{3}\text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^5 2\psi}}$. So fortfahrend erhält man

$$\overset{4}{U} = \overset{2}{U} - \frac{3}{5}\text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^7 2\psi}}$$

u. s. w.

Da überhaupt

$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{4\alpha+1}2\psi}} = \frac{1.5.\,9\ldots.(4\alpha-3)}{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}.\overset{2\alpha}{U} \text{ und}$$

$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{4\alpha+3}2\psi}} = \frac{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}{5.9.13\ldots.(4\alpha+1)}.\overset{2\alpha+1}{U}$$

zu setzen ist, so verwandelt sich die obige allgemeine Relation in die beiden folgenden:

$$\overset{2\alpha+2}{U} = \overset{2\alpha}{U} - \frac{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}{5.9.13\ldots.(4\alpha+1)}.\text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{4\alpha+3}2\psi}},$$

$$\overset{2\alpha+1}{U} = \overset{2\alpha-1}{U} - \frac{1.5.\,9\ldots.(4\alpha-3)}{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}.\text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{4\alpha+1}2\psi}}.$$

Setzen wir nun zu noch mehrerer Abkürzung

$$1.\quad \begin{cases} \varDelta = \text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}\,2\psi}}, \\ \overset{1}{\varDelta} = \text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^3 2\psi}}, \\ \overset{2}{\varDelta} = \text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^5 2\psi}}, \\ \overset{3}{\varDelta} = \text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^7 2\psi}} \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so ist überhaupt

$$\overset{2\alpha+1}{\varDelta} = \text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{4\alpha+3}2\psi}} \quad\text{und}\quad \overset{2\alpha}{\varDelta} = \text{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\text{Cos}^{4\alpha+1}2\psi}},$$

und also

$$\overset{2\alpha+2}{U} = \overset{2\alpha}{U} - \frac{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}{5.9.13\ldots.(4\alpha+1)}.\overset{2\alpha+1}{\varDelta}, \quad \overset{2\alpha+1}{U} = \overset{2\alpha-1}{U} - \frac{1.5.9\ldots.(4\alpha-3)}{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}.\overset{2\alpha}{\varDelta}.$$

Diesen Formeln gemäfs erhalten wir nun die folgenden einfachen Ausdrücke:

$$2.\quad\begin{cases} \overset{2}{U} = U - \overset{1}{\Delta}, \\ \overset{4}{U} = U - \overset{1}{\Delta} - \tfrac{1}{3}.\overset{3}{\Delta}, \\ \overset{6}{U} = U - \overset{1}{\Delta} - \tfrac{1}{3}.\overset{3}{\Delta} - \frac{3.7}{5.9}.\overset{5}{\Delta}, \\ \overset{8}{U} = U - \overset{1}{\Delta} - \tfrac{1}{3}.\overset{3}{\Delta} - \frac{3.7}{5.9}.\overset{5}{\Delta} - \frac{3.7.11}{5.9.13}.\overset{7}{\Delta} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$3.\quad\begin{cases} \overset{3}{U} = \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}.\overset{2}{\Delta}, \\ \overset{5}{U} = \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}.\overset{2}{\Delta} - \frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{\Delta}, \\ \overset{7}{U} = \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}.\overset{2}{\Delta} - \frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{\Delta} - \frac{1.5.9}{3.7.11}.\overset{6}{\Delta}; \\ \overset{9}{U} = \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}.\overset{2}{\Delta} - \frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{\Delta} - \frac{1.5.9}{3.7.11}.\overset{6}{\Delta} - \frac{1.5.9.13}{3.7.11.15}.\overset{8}{\Delta}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Gröfsen Δ, $\overset{1}{\Delta}$, $\overset{2}{\Delta}$, $\overset{3}{\Delta}$, $\overset{4}{\Delta}$ etc., welche in den Ausdrücken (2.) und (3.) vorkommen, lassen sich leicht unmittelbar aus den Amplituden Φ und Φ' berechnen. Da nämlich $\mathfrak{Sin}\,2\psi = \frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ und $\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}$ ist, so ist $\Delta = \frac{2\cos\varphi}{\sin\varphi\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}$, oder auch

$$\Delta = 2.\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi},\quad \text{also}\quad \overset{1}{\Delta} = \Delta.\cos^2\Phi',\qquad \overset{2}{\Delta} = \overset{1}{\Delta}\cos^2\Phi' \text{ u. s. w. oder}$$

$$4.\quad \overset{1}{\Delta} = \left(\frac{2\sin\varphi'}{\sin\varphi}\right)\cos^2\Phi',\quad \overset{2}{\Delta} = \left(\frac{2\sin\varphi'}{\sin\varphi}\right)\cos^4\Phi',\quad \overset{3}{\Delta} = \left(\frac{2\sin\varphi'}{\sin\varphi}\right)\cos^6\Phi'$$

u. s. w. allgemein

$$\overset{r}{\Delta} = \left(\frac{2\sin'\varphi}{\sin\varphi}\right).\cos^{2r}\Phi'.$$

Die Gröfsen $\overset{1}{\Delta}$, $\overset{2}{\Delta}$, $\overset{3}{\Delta}$, $\overset{4}{\Delta}$ etc. verschwinden für $\Phi = 0$ und für $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, und bilden im Uebrigen eine convergirende geometrische Progression.

Anmerkung. Da

$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^n\,r\psi}} = \int_0 \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}.\frac{\sin^{n-1}\varphi.\partial\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)^n}},$$

so kann dieses Integral in eine nach Potenzen von $\sin\Phi$ fortschreitende Reihe von der Form

$$\frac{1}{n.\sqrt{2^{n-1}}}(\sin^n\Phi + a.\sin^{n+1}\Phi + b\sin^{n+2}\Phi + \ldots.)\cos\Phi$$

entwickelt werden, in welcher kein Coëfficient unendlich wird, wenn man n

unendlich grofs nimmt. Eben deswegen ist aber Null die Grenze des Integrals, wenn n unendlich grofs genommen wird. Hieraus folgt leicht, dafs sich die Gröfsen

$$U,\ \overset{1}{U},\ \overset{2}{U},\ \overset{3}{U},\ \overset{4}{U}\ \text{etc.}$$

im Fortgange immer mehr der Grenze Null nähern. Setzen wir aber in den Formeln für $\overset{2a}{U}$ und $\overset{2a+1}{U}$ die Zeigezahl $a=\infty$, also $\overset{2a}{U}=0$ und $\overset{2a+1}{U}=0$, so erhalten wir die Reihen

$$5.\quad\begin{cases} U = \overset{1}{\varDelta}+\tfrac{3}{5}.\overset{3}{\varDelta}+\frac{3.7}{5.9}.\overset{5}{\varDelta}+\frac{3.7.11}{5.9.13}.\overset{7}{\varDelta}+\frac{3.7.11.15}{5.9.13.17}.\overset{9}{\varDelta}+\dots, \\ \overset{1}{U} = \tfrac{1}{3}.\overset{2}{\varDelta}+\frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{\varDelta}+\frac{1.5.9}{3.7.11}.\overset{6}{\varDelta}+\frac{1.5.9.13}{3.7.11.15}.\overset{8}{\varDelta}+\dots, \end{cases}$$

welche aber nur so lange gelten, als $\Phi<\frac{1}{4}\pi$ ist. Ist Φ auffallend kleiner als $\frac{1}{4}\pi$, so convergiren diese Reihen sehr rasch, und man wird dann U und $\overset{1}{U}$ mittelst derselben schneller berechnen, als man ihre Werthe aus den erwähnten Tafeln entnehmen kann, weil die in den beiden Reihen vorkommenden Glieder sämmtlich ohnehin bei Anwendung der Formeln (2.) und (3.) berechnet werden müssen.

§. 276.

Berechnung der Modular-Quadranten K und K' nach Reihen, welche einen Potenzen-Fortschritt mit dem Grundfactor $\cos 2\theta$ haben.

Setzen wir in den beiden Reihen (7. §. 273.) für $\frac{1}{2}(v+u)$ und $\frac{1}{2}(v-u)$ die Amplitude $\Phi=\frac{1}{2}\pi$, so wird $u=K$ und $v=K'$. Da nun für $\Phi=\frac{1}{2}\pi$, $\overset{1}{\varDelta}=\overset{2}{\varDelta}=\overset{3}{\varDelta}=\overset{4}{\varDelta}=\dots=0$ wird, so wird auch

$$\overset{2}{U}=\overset{4}{U}=\overset{6}{U}=\overset{8}{U}=\dots=U \quad\text{und}\quad \overset{3}{U}=\overset{5}{U}=\overset{7}{U}=\overset{9}{U}=\dots=\overset{1}{U}.$$

Setzen wir nun noch

$$1\quad\begin{cases} S = 1+\frac{1^2}{2.4}\cos^2 2\theta+\frac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta+\frac{1^2.5^2.7^2}{2.4.6.8.10.12}\cos^6 2\theta \\ \qquad\qquad +\frac{1^2.5^2.7^2.9^2}{2.4.6.8.10.12.14.16}\cos^8 2\theta+\dots, \\ D = \frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3^2}{2.4.6}\cos^3 2\theta+\frac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta \\ \qquad\qquad +\frac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\cos^7 2\theta+\dots, \end{cases}$$

so haben wir zunächst die beiden Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}(K'+K) = S.U \quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}(K'-K) = D.\overset{1}{U},$$

hat, weil dann schon die sämmtlichen Coëfficienten V, U, $\overset{1}{U}$, $\overset{2}{U}$, $\overset{3}{U}$, $\overset{4}{U}$ etc. bekannt geworden sind.

Die in dieser Reihe vorkommenden eingeschlossenen Factoren vertreten nun die nach Potenzen von $\cos 2\theta$ fortschreitenden Reihen, durch deren Summation sie entstanden sind.

Die Rechnung läfst sich aber auch, wenn die Gröfsen U, $\overset{1}{U}$, $\overset{2}{U}$, $\overset{3}{U}$ etc. schon bei der Berechnung von u und v aus $\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}' v$ bekannt sind, auch nach der Reihe (1.) ausführen. Man hat dann

$$-T_0 = V - U,$$
$$+T_1 = V - U + \overset{1}{U},$$
$$-T_2 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U},$$
$$+T_3 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U},$$
$$-T_4 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U},$$
$$+T_5 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U} + \frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U},$$
$$-T_6 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U} + \frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U} - \frac{1.5.\,9}{3.7.11}\overset{6}{U},$$
$$+T_7 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U} + \frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U} - \frac{1.5.\,9}{3.7.11}\overset{6}{U} + \frac{3.7.11}{5.9.13}\overset{7}{U}$$

u. s. w.

Werden diese Werthe benutzt, so hat man

$$3.\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{el} u + \operatorname{el}' v}{2} = V - \dfrac{1}{2.4}T_1.\cos^2 2\theta - \dfrac{1.3.5}{2.4.6.8}T_3.\cos^4 2\theta \\ \qquad\qquad - \dfrac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}T_5.\cos^6 2\theta - \ldots, \\ \dfrac{\operatorname{el} u - \operatorname{el}' v}{2} = \tfrac{1}{2}T_0.\cos 2\theta + \dfrac{1.3}{2.4.6}T_2.\cos^3 2\theta + \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}T_4.\cos^5 2\theta \\ \qquad\qquad + \dfrac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12.14}T_6.\cos^7 2\theta + \ldots \end{cases}$$

Beachtet man, dafs $\frac{\sqrt{(1+\cos 2\theta)} \pm \sqrt{(1-\cos 2\theta)}}{2} = \frac{\cos\theta \pm \sin\theta}{\sqrt{2}} = \cos(\tfrac{1}{4}\pi \mp \theta)$ ist, so folgen aus der Reihe (2.) noch zwei andere, worin sich je zwei Glieder vereinigen lassen, nämlich:

$$4.\quad\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{el}\,u+\mathrm{el}'v}{2} = V\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)+(U-\overset{1}{U})(1-\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)) \\
\quad +(\tfrac{1}{3}\overset{2}{U}-\tfrac{3}{5}\overset{3}{U})\left(1-\tfrac{1}{2.4}\cos^2 2\theta-\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)\right) \\
\quad +\left(\tfrac{1.5}{3.7}\overset{4}{U}-\tfrac{3.7}{5.9}\overset{5}{U}\right)\left(1-\tfrac{1}{2.4}\cos^2 2\theta-\tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta-\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)\right) \\
\quad +\left(\tfrac{1.5.9}{3.7.11}\overset{6}{U}-\tfrac{3.7.11}{5.9.13}\overset{7}{U}\right)\left(1-\tfrac{1}{2.4}\cos^2 2\theta-\tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta\right. \\
\qquad\qquad \left.-\tfrac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10\,12}\cos^6 2\theta-\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)\right) \\
\quad +\ldots\ \text{und} \\
\dfrac{\mathrm{el}\,u-\mathrm{el}'v}{2} = (U-V)\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)+(\overset{1}{U}-\tfrac{1}{3}\overset{2}{U})(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta-\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)) \\
\quad +\left(\tfrac{3}{5}\overset{3}{U}-\tfrac{1.5}{3.7}\overset{4}{U}\right)\left(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta+\tfrac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta-\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)\right) \\
\quad +\left(\tfrac{3.7}{5.9}\overset{5}{U}-\tfrac{1.5.9}{3.7.11}\overset{6}{U}\right)\left(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta+\tfrac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta\right. \\
\qquad\qquad \left.+\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta-\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)\right) \\
\quad +\left(\tfrac{3.7.11}{5.9.13}\overset{7}{U}-\tfrac{1.5.9.13}{3.7.11.15}\overset{8}{U}\right)\left(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta+\tfrac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta\right. \\
\qquad\qquad \left.+\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta+\tfrac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6\ldots 14}\cos^7 2\theta-\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)\right) \\
\quad +\ldots,
\end{cases}$$

welche Reihen einen hohen Grad der Convergenz haben.

Neunzehnter Abschnitt.

§. 279.

Umformung der Gleichung $x = \mathrm{sn}\,u$ in eine ähnliche mit einem andern Argumente und einem andern Modul durch eine Substitution des dritten Grades.

Setzt man $y = \frac{(1+k)x}{1+kx^2}$ und $x = \mathrm{sn}\,u$ mit dem Modul k und ferner $y = \mathrm{sn}\,v$ mit dem Modul λ, so ist bekanntlich $v = (1+k)u$ und $\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$. Die höchste Potenz von x, welche in dem rationalen Bruche $y = \frac{(1+k)x}{1+kx^2}$ vorkommt, ist vom zweiten Grade, und aus diesem Grunde wird der ganzen Substitution, eigentlich dem zu substituirenden Bruche, der zweite Grad zugeschrieben.

Eine Substitution dritten Grades bietet der Bruch

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}{A' + B'x + C'x^2 + D'x^3}$$

dar, und es fragt sich nun, ob durch eine solche Substitution die Gleichung

$$v = \int_0 \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}}$$

in eine ähnliche

$$u = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2 x^2)}}$$

umgeformt werden könne, vorausgesetzt, dafs das Verhältnifs der Argumente u und v constant sein soll und also in der Gleichung

$$v = \mu . u$$

der Multiplicator μ nur von dem Modul k oder λ abhängt. Da der Gleichung $v = \mu . u$ gemäfs für $u = 0$ auch $v = 0$ sein, ferner v in $-v$ übergehen mufs, wenn $-u$ statt u gesetzt wird, so mufs für $x = 0$ auch $y = 0$ werden und y in $-y$ übergehen, wenn x in $-x$ verwandelt wird. Diese Bedingungen werden befriedigt, wenn man setzt

$$A = 0, \quad C = 0, \quad B' = 0, \quad D' = 0.$$

Der zu substituirende Bruch hat also die Form

$$y = \frac{ax + bx^3}{1 + cx^2} \quad \text{oder} \quad \operatorname{sn} v = \frac{a . \operatorname{sn} u + b \operatorname{sn}^3 u}{1 + c \operatorname{sn}^2 u},$$

wenn man die Modularfunctionen des Argumentes u auf den Modul k, und die des Argumentes v auf den unbekannten Modul λ bezieht.

Wir bezeichnen die den Moduln λ und $\lambda' = \sqrt{(1-\lambda^2)}$ zugehörigen Modularquadranten durch L und L', so wie wir die zu den Moduln k und k' gehörigen Modularquadranten durch K und K' bezeichnen. Soll, wie bei der Substitution zweiten Grades, $v = L$ werden für $u = K$, so mufs $y = 1$ werden für $x = 1$: daher haben wir die Bedingung

$$\frac{a+b}{1+c} = 1 \quad \text{oder} \quad a + b - c - 1 = 0.$$

Setzen wir bei der Substitution zweiten Grades $u + iK'$ statt u, also $\frac{1}{kx}$ statt x, so bleibt y ungeändert; eine andere Bewandtnifs hat es mit dem vorstehenden Werthe von y. Setzen wir da $u + iK'$ statt u, also $\frac{1}{kx}$ statt x, so verwandelt sich derselbe in

$$\frac{b + ak^2 x^2}{ck.. + k^3 x^3},$$

woraus wir schliefsen, dafs sich v in $v + iL'$ verwandelt $\left(\text{also } y \text{ in } \frac{1}{\lambda y}\right)$,

wenn $u+iK'$ statt u gesetzt wird. Setzen wir aber

$$\lambda y = \frac{ckx+k^3x^3}{b+ak^2x^2},$$

so ist

$$y = \frac{\frac{ck}{b\lambda}x+\frac{k^3}{b\lambda}.x^3}{1+\frac{ak^2}{b}x^2},$$

und damit dieser Bruch mit dem anfänglichen übereinstimme, mufs

$$ck = ab.\lambda, \quad k^3 = b^2.\lambda, \quad ak^2 = bc$$

sein. Diese Gleichungen gelten nur soviel als zwei, weil aus zweien von ihnen die dritte folgt. Die ermittelten Bedingungsgleichungen reichen also zur Bestimmung der Gröfsen a, b, c und λ noch nicht hin.

Aus den vorigen Formeln leiten wir aber noch her

$$1+y = \frac{(1+x)(1-(1-a)x+bx^2)}{1+(a+b-1)x^2},$$
$$1-y = \frac{(1-x)(1+(1-a)x+bx^2)}{1+(a+b-1)x^2},$$
$$1+\lambda y = \frac{(1+kx)(k^2x^2-(1-a)kx+b)}{b+ak^2x^2},$$
$$1-\lambda y = \frac{(1-kx)(k^2x^2+(1-a)kx+b)}{b+ak^2x^2},$$

und diese Ausdrücke müssen der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\sqrt{((1+y)(1-y)(1+\lambda y)(1-\lambda y))}} = \mu.\frac{\partial x}{\sqrt{((1+x)(1-x)(1+kx)(1-kx))}}$$

Genüge leisten, also auch der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mu.\sqrt{\frac{(1+y)(1-y)(1+\lambda y)(1-\lambda y)}{(1+x)(1-x)(1+kx)(1-kx)}}$$

Da nun $\frac{\partial y}{\partial x}$ ein rationaler Bruch ist, so mufs auch der Ausdruck auf der rechten Seite rational sein, und diese Bedingung wird erfüllt, wenn $1-(1-a)x+bx^2$ ein vollkommenes Quadrat ist. Setzen wir aber

$$a-1 = 2\alpha \quad \text{und} \quad b = \alpha^2,$$

so ist

$$1. \quad \begin{cases} a = 1+2\alpha, \\ b = \alpha^2, \\ c = \alpha^2+2\alpha, \\ k^2 = \frac{\alpha^3(\alpha+2)}{1+2\alpha}, & k'^2 = \frac{(1+\alpha)^3(1-\alpha)}{2\alpha+1}, \\ \lambda^2 = \frac{(\alpha+2)^3.\alpha}{(1+2\alpha)^3}, & \lambda'^2 = \frac{(1-\alpha)^3.(1+\alpha)}{(2\alpha+1)^3}. \end{cases}$$

Ferner haben wir nun

$$2.\quad \operatorname{sn} v = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{sn} u + \alpha^2 \operatorname{sn}^3 u}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u},$$

$$3.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{sn} v = \dfrac{(1+\operatorname{sn} u).(1+\alpha \operatorname{sn} u)^2}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}, \\ 1-\operatorname{sn} v = \dfrac{(1-\operatorname{sn} u)(1-\alpha \operatorname{sn} u)^2}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}, \end{cases}$$

$$4.\quad \begin{cases} 1+\lambda \operatorname{sn} v = \dfrac{(1+k \operatorname{sn} u).(\alpha+k \operatorname{sn} u)^2}{\alpha^2+(2\alpha+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u}, \\ 1-\lambda \operatorname{sn} v = \dfrac{(1-k \operatorname{sn} u)(\alpha-k \operatorname{sn} u)^2}{\alpha^2+(2\alpha+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u}, \end{cases}$$

$$5.\quad \operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{cn} u.(1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u},$$

$$6.\quad \operatorname{dn} v = \frac{\operatorname{dn} u.(\alpha^2-k^2 \operatorname{sn}^2 u)}{\alpha^2+(2\alpha+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{dn} u}{2\alpha+1}.\frac{1+2\alpha-(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}.$$

Die Formeln für $\operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn} v$ lassen sich auch also darstellen:

$$7.\quad \begin{cases} \operatorname{cn} v = \dfrac{(1-\alpha^2)\operatorname{cn} u + \alpha^2 \operatorname{cn}^3 u}{(\alpha+1)^2-(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{cn}^2 u}, \\ \operatorname{dn} v = \dfrac{\operatorname{dn}^3 u-(1-\alpha^2)\operatorname{dn} u}{(\alpha+1)^2-(2\alpha+1)\operatorname{dn}^2 u}. \end{cases}$$

Endlich hat man noch

$$8.\quad \operatorname{tn} v = \operatorname{tn} u.\frac{1+2\alpha+\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u}{1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{tn} u+(1+\alpha)^2 \operatorname{tn}^3 u}{1+(1-\alpha^2)\operatorname{tn}^2 u}.$$

Differentiirt man die Formel (2.), so erhält man

$$\operatorname{cn} v.\operatorname{dn} v.\partial v = \frac{2\alpha+1-2(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)\operatorname{sn}^2 u+\alpha^3(\alpha+2)\operatorname{sn}^4 u}{(1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u)^2}.\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.\partial u,$$

und da auch

$$\operatorname{cn} v.\operatorname{dn} v = \frac{2\alpha+1-2(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)\operatorname{sn}^2 u+\alpha^3(\alpha+2)\operatorname{sn}^4 u}{(1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u)^2}.\frac{\operatorname{cn} u.\operatorname{dn} u}{2\alpha+1}$$

ist, so erhalten wir $\partial v = (2\alpha+1).\partial u$, mithin

$$9.\quad v = (2\alpha+1).u.$$

Der constante Multiplicator μ ist hiernach $= 2\alpha+1$. Aus den Formeln (2.) und (5.) leiten wir her:

$$\operatorname{sn} v+\operatorname{sn} u = \frac{2(\alpha+1)\operatorname{sn} u.(1+\alpha \operatorname{sn}^2 u)}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{cn} v+\operatorname{cn} u = \frac{2\operatorname{cn} u.(1+\alpha \operatorname{sn}^2 u)}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u};$$

daher haben wir endlich

$$\frac{\operatorname{sn} v+\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} v+\operatorname{cn} u} = (\alpha+1).\operatorname{tn} u, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\operatorname{am} v+\operatorname{am} u}{2}\right) = (\alpha+1)\operatorname{tn} u,$$

mithin

$$10.\quad \operatorname{am} v = -\operatorname{am} u + 2 \operatorname{arc tang}((\alpha+1)\operatorname{tn} u).$$

Hieraus folgt nun, dafs, wenn α positiv ist $v > u$ und auch $\operatorname{am} v > \operatorname{am} u$ sei. Da $\frac{\lambda}{k} = \frac{\alpha+2}{\alpha+2\alpha^2}$ und, den Ausdrücken für k'^2 und λ'^2 gemäfs, die absolute Gröfse von $\alpha < 1$ sein mufs, so ist $\alpha+2 > \alpha+2\alpha^2$, mithin ist

$$\lambda > k, \quad \text{also} \quad \lambda' < k'.$$

§. 280.

Aus den Formeln (1. §. 279.) erhält man

$$\sqrt{(k\lambda)} = \frac{\alpha^2+2\alpha}{2\alpha+1} \quad \text{und} \quad \sqrt{(k'\lambda')} = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha+1},$$

und die Addition giebt nun die von α unabhängige Gleichung

$$1.\quad \sqrt{(k\lambda)} + \sqrt{(k'\lambda')} = 1,$$

nach welcher Gleichung man aus einem der beiden Moduln den andern zu berechnen hat.

Setzt man $k = \sin\theta$ und $\lambda = \sin\theta'$, so ist

$$\sqrt{(\sin\theta.\sin\theta')} + \sqrt{(\cos\theta.\cos\theta')} = 1,$$

und diese Gleichung läfst sich umformen in

$$\sin 2\theta.\sin 2\theta' = 4.\sin^4 \tfrac{1}{2}(\theta'-\theta).$$

Hiernach läfst sich aus einem der Winkel θ und θ' ziemlich schnell der andere berechnen.

Ferner findet man

$$\sqrt[4]{\frac{k^3}{\lambda}} = \alpha \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\lambda^3}{k}} = \frac{\alpha+2}{2\alpha+1}.$$

Wird nun der Gleichmäfsigkeit wegen $\sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{k}} = \alpha'$ gesetzt, so ist

$$2.\quad \alpha' = \frac{\alpha+2}{2\alpha+1}.$$

Hieraus folgt $2\alpha'-1 = \frac{3}{2\alpha+1}$, oder auch

$$(2\alpha'-1)(2\alpha+1) = 3,$$

und werden die Werthe für α und α' substituirt, so hat man

$$3.\quad \left(2\sqrt[4]{\left(\frac{k^3}{\lambda}\right)}+1\right)\left(2\sqrt[4]{\left(\frac{\lambda^3}{k}\right)}-1\right) = 3.$$

Man findet auch $\alpha'-1 = \frac{1-\alpha}{2\alpha+1}$, und es können mithin die Moduln auch

also ausgedrückt werden:

$$k^2 = \alpha^3.\alpha', \qquad k'^2 = (\alpha+1)^3.(\alpha'-1),$$
$$\lambda^2 = \alpha'^3.\alpha, \qquad \lambda'^2 = (\alpha'-1)^3.(\alpha+1).$$

Hieraus folgt noch

$$\sqrt[4]{\frac{k'^3}{\lambda'}} = 1+\alpha \quad \text{und} \quad \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3}{k'}} = \alpha'-1,$$

und da $(2\alpha+1)(2\alpha'-1) = 3$ oder $(2(\alpha+1)-1)(2(\alpha'-1)+1) = 3$ ist, so haben wir auch noch

$$4. \quad \left(2\sqrt[4]{\left(\frac{k'^3}{\lambda'}\right)}-1\right)\left(2\sqrt[4]{\left(\frac{\lambda'^3}{k'}\right)}+1\right) = 3.$$

Ferner hat man die beiden Gleichungen

$$5. \quad \sqrt[4]{\frac{k'^3}{\lambda'}} = 1+\sqrt[4]{\frac{k^3}{\lambda}}, \qquad \sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{k}} = 1+\sqrt[4]{\frac{\lambda'^3}{k'}}.$$

Setzt man $\sqrt[4]{k} = m$ und $\sqrt[4]{\lambda} = n$, so verwandelt sich die Gleichung (3.) in $\left(\frac{2m^3}{n}+1\right)\left(\frac{2n^3}{m}-1\right) = 3$ oder $n^4 - m^4 + 2m^3n^3 - 2mn = 0$. Sieht man m als bekannt und n als unbekannt an, so ist die Gleichung vom vierten Grade in Ansehung von n.

§. 281.

Die ergänzende Substitution dritten Grades.

Ein Blick auf die vorstehenden Modulargleichungen lehrt, dafs sie ungeändert bleiben, wenn man gleichzeitig k mit λ' und k' mit λ vertauscht. Dabei vertauscht man α mit $\alpha'-1$ oder α' mit $\alpha+1$.

Setzen wir nun aufserdem v statt u und u' statt v, so verwandelt sich die Formel $\text{tn}\, v = \frac{(1+2\alpha)\text{tn}\, u + (1+\alpha)^2 \text{tn}^3 u}{1+(1-\alpha^2)\text{tn}^2 u}$ (§. 279.) in

$\text{tn}' u' = \frac{(2\alpha'-1)\text{tn}' v + \alpha'^2 \text{tn}'^3 v}{1+(2\alpha'-\alpha'^2)\text{tn}'^2 v}$ und $v = (2\alpha+1)u$ in $u' = (2\alpha'-1)v$. Da aber $v = (2\alpha+1)u$ ist, so ist $u' = (2\alpha'-1)(2\alpha+1)u$, oder auch $u' = 3u$, und also

$$\text{tn}' 3u = \frac{(2\alpha'-1)\text{tn}' v + \alpha'^2 \text{tn}'^3 v}{1+(2\alpha'-\alpha'^2)\text{tn}'^2 v},$$

und in dieser Formel beziehen sich die Modularfunctionen des Argumentes v auf den Modul λ', so wie $\text{tn}' 3u$ auf den Modul k'. Setzen wir nun ui statt u und vi statt v, so bleibt die Gleichung $v = (2\alpha+1)u$ ungeändert, und die vorige Gleichung verwandelt sich sofort in

$$1.\quad \operatorname{sn} 3u = \frac{(2\alpha'-1)\operatorname{sn} v - \alpha'^2 \operatorname{sn}^3 v}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v},$$

und hierin bezieht sich wieder $\operatorname{sn} v$ auf den Modul λ und $\operatorname{sn} 3u$ oder $\operatorname{sn} u'$ auf den Modul k.

Diese Substitution, wodurch man vom Modul λ auf den Modul k zurückkommt, und welche insofern als die umgekehrte der vorigen anzusehen ist, ist ebenfalls vom dritten Grade. Eliminirt man aus der Gleichung (2.) §. 279. und aus der vorigen $\operatorname{sn} v$, so erhält man $\operatorname{sn} 3u$ durch Potenzen von $\operatorname{sn} u$ ausgedrückt. Daher ist die eine Substitution eine Ergänzung der anderen zur Verdreifachung des Arguments.

Man leitet aus der vorigen Formel noch her:

$$2.\quad 1+\operatorname{sn} 3u = \frac{(1-\operatorname{sn} v)(1+\alpha'\operatorname{sn} v)^2}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v}, \qquad 1-\operatorname{sn} 3u = \frac{(1+\operatorname{sn} v)(1-\alpha'\operatorname{sn} v)^2}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v}.$$

Ferner ist

$$k \operatorname{sn} 3u = \frac{\alpha}{\alpha'}\lambda.\frac{(2\alpha'-1)\operatorname{sn} v - \alpha'^2 \operatorname{sn}^3 v}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v} = \frac{(2\alpha'-\alpha'^2)\lambda \operatorname{sn} v - \lambda^3 \operatorname{sn}^3 v}{\alpha'^2-(2\alpha'-1)\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v},$$

und hieraus folgt

$$3.\quad 1+k\operatorname{sn} 3u = \frac{(1-\lambda\operatorname{sn} v)(\alpha'+\lambda\operatorname{sn} v)^2}{\alpha'^2-(2\alpha'-1)\lambda^2\operatorname{sn}^2 v}, \quad 1-k\operatorname{sn} 3u = \frac{(1+\lambda\operatorname{sn} v)(\alpha'-\lambda\operatorname{sn} v)^2}{\alpha'^2-(2\alpha'-1)\lambda^2\operatorname{sn}^2 v}.$$

Ferner ist

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{cn} 3u = \dfrac{\operatorname{cn} v.(1-\alpha'^2 \operatorname{sn}^2 v)}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v} = \dfrac{(1-\alpha'^2)\operatorname{cn} v + \alpha'^2 \operatorname{cn}^3 v}{(\alpha'-1)^2+(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{cn}^2 v}, \\[2ex] \operatorname{dn} 3u = \dfrac{\operatorname{dn} v.(\alpha'^2-\lambda^2\operatorname{sn}^2 v)}{\alpha'^2-(2\alpha'-1)\lambda^2\operatorname{sn}^2 v} = \dfrac{\operatorname{dn}^3 v+(\alpha'^2-1)\operatorname{dn} v}{(\alpha'-1)^2+(2\alpha'-1)\operatorname{dn}^2 v}, \\[2ex] \operatorname{tn} 3u = \dfrac{(2\alpha'-1)\operatorname{tn} v-(\alpha'-1)^2\operatorname{tn}^3 v}{1-(\alpha'^2-1)\operatorname{tn}^2 v}. \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Formeln leitet man noch her:

$$\frac{\operatorname{sn} 3u - \operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} 3u - \operatorname{cn} v} = (\alpha'-1)\operatorname{tn} v, \quad \text{oder auch}$$

$$5.\quad \operatorname{am} 3u = \operatorname{am} v + 2\operatorname{arc\,tang}((\alpha'-1)\operatorname{tn} v).$$

Zusatz. Aus den Gleichungen $\operatorname{sn} v = \dfrac{(2\alpha+1)\operatorname{sn} u+\alpha^2\operatorname{sn}^3 u}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}$ und $\operatorname{sn}' 3u = \dfrac{(2\alpha'-1)\operatorname{sn}' v+(\alpha'-1)^2\operatorname{sn}'^3 v}{1+(\alpha'^2-1)\operatorname{sn}'^2 v}$ folgt, dafs $v = L$ für $u = K$ und $3u = K'$ für $v = L'$ ist. Da nun immer $v = (2\alpha+1)u$ ist, so ist

$$L = (2\alpha+1).K \quad \text{und} \quad L' = \tfrac{1}{3}(2\alpha+1).K'.$$

und hieraus folgt noch durch die Division

$$\frac{L}{L'} = 3.\frac{K}{K'}.$$

§. 282.

Umformung der Gleichung $x = \operatorname{sn} u$ in eine ähnliche durch eine Substitution fünften Grades.

Die Substitution fünften Grades hat die Form $y = \frac{ax + cx^3 + ex^5}{1 + bx^2 + dx^4}$. Setzt man hierin $\frac{1}{kx}$ statt x und gleichzeitig $\frac{1}{\lambda y}$ statt y, so erhält man

$$\lambda y = \frac{dkx + bk^3x^3 + k^5x^5}{e + ck^2x^2 + ak^4x^4},$$

und soll dieser Ausdruck mit dem vorigen zusammenfallen, so mufs

$$1. \quad \frac{k}{\lambda} = \frac{a.c}{d}; \quad \frac{k^3}{\lambda} = \frac{cc}{b}; \quad \frac{k^5}{\lambda} = e^2; \quad k^2 = \frac{be}{c}; \quad k^4 = \frac{de}{a}$$

sein. Aus demselben Grunde wie bei der Substitution dritten Grades setzen wir nun

$$1 + y = \frac{(1+x)(1 + \alpha x + \beta x^2)^2}{1 + bx^2 + dx^4}.$$

Hieraus folgt rückwärts

$$y = \frac{(1+2\alpha)x + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha - b)x^2 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha\beta)x^3 + (\beta^2 + 2\alpha\beta - d)x^4 + \beta^2 x^5}{1 + bx^2 + dx^4},$$

und auch dieser Ausdruck stimmt mit dem vorigen überein, wenn

$$2. \quad \begin{cases} a = 1 + 2\alpha, \\ b = \alpha^2 + 2\beta + 2\alpha = (\alpha^2 + \beta) + (\beta + 2\alpha), \\ c = \alpha^2 + 2\beta + 2\alpha\beta = (\alpha^2 + \beta) + \beta(1 + 2\alpha), \\ d = \beta^2 + 2\alpha\beta = \beta(\beta + 2\alpha), \\ e = \beta^2 \end{cases}$$

gesetzt wird. Beziehen wir nun die Modular-Functionen des Arguments u wieder auf den Modul k und die des Arguments v auf den Modul λ, so haben wir, $x = \operatorname{sn} u$ und $y = \operatorname{sn} v$ setzend,

$$3. \quad \operatorname{sn} v = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{sn} u + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^3 u + \beta^2 \operatorname{sn}^5 u}{1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + \beta(\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^4 u}.$$

Hieraus folgt

$$4. \quad \begin{cases} 1 + \operatorname{sn} v = \dfrac{(1 + \operatorname{sn} u)(1 + \alpha \operatorname{sn} u + \beta \operatorname{sn}^2 u)^2}{1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + (\beta^2 + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u}, \\ 1 - \operatorname{sn} v = \dfrac{(1 - \operatorname{sn} u)(1 - \alpha \operatorname{sn} u + \beta \operatorname{sn}^2 u)^2}{1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + (\beta^2 + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u}; \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 1 + \lambda \operatorname{sn} v = \dfrac{(1 + k \operatorname{sn} u)(\beta + \alpha k \operatorname{sn} u + k^2 \operatorname{sn}^2 u)^2}{\beta^2(1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + (\beta^2 + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u)}, \\ 1 - \lambda \operatorname{sn} v = \dfrac{(1 - k \operatorname{sn} u)(\beta - \alpha k \operatorname{sn} u + k^2 \operatorname{sn}^2 u)^2}{\beta^2(1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + (\beta^2 + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u}. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir nun leicht

$$6.\quad \begin{cases} \operatorname{cn} v = \dfrac{\operatorname{cn} u(1-(\alpha^2-2\beta)\operatorname{sn}^2 u+\beta^2 \operatorname{sn}^4 u)}{1+(\alpha^2+2\beta+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u+(\beta^2+2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u}, \\ \operatorname{dn} v = \dfrac{\operatorname{dn} u(\beta^2-(\alpha^2-2\beta)k^2 \operatorname{sn}^2 u+k^4 \operatorname{sn}^4 u)}{\beta^2(1+(\alpha^2+2\beta+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u+(\beta^2+2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u)}. \end{cases}$$

Endlich findet man

$$7.\quad \operatorname{tn} v = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{tn} u+((1+\alpha)(1+\alpha+2\beta)+2\alpha+1)\operatorname{tn}^3 u+(1+\alpha+\beta)^2 \operatorname{tn}^5 u}{1+(2+2\beta-\alpha^2)\operatorname{tn}^2 u+((\beta+1)^2-\alpha^2)\operatorname{tn}^4 u}.$$

Differentiiren wir die Formel (3.), so erhalten wir

$$\operatorname{cn} v.\operatorname{dn} v.\partial v =$$

$$\frac{a+(3c-ab)\operatorname{sn}^2 u+(bc-3ad+5e)\operatorname{sn}^4 u+(3be-cd)\operatorname{sn}^6 u+de\operatorname{sn}^8 u}{(1+b\operatorname{sn}^2 u+d\operatorname{sn}^4 u)^2}.\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u.\partial u.$$

Werden die vorigen Ausdrücke für $\operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn} v$ substituirt, so erhält man

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{a+(3c-ab)\operatorname{sn}^2 u+(bc-3ad+5e)\operatorname{sn}^4 u+(3be-cd)\operatorname{sn}^6 u+de\operatorname{sn}^8 u}{(1-(\alpha^2-2\beta)\operatorname{sn}^2 u+\beta^2 \operatorname{sn}^4 u)\left(1-(\alpha^2-2\beta).\frac{k^2}{\beta^2}\operatorname{sn}^2 u+\frac{k^4}{\beta^2}\operatorname{sn}^4 u\right)}.$$

Dieser Bruch reducirt sich aber, wenn für a, b, c, d, e, k^2 und k^4 ihre Werthe substituirt werden, auf $\frac{\partial v}{\partial u} = a = 1+2\alpha$, und hieraus folgt

$$8.\quad v = (1+2\alpha).u.$$

§. 283.

Nach §. 282. ist $k^2 = \frac{be}{c}$ und $k^4 = \frac{de}{a}$, also ist

$$(\beta+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta+2\alpha+\beta)^2 = (2\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta+\beta+2\alpha\beta)^2.$$

Diese Gleichung reducirt sich zunächst auf

$$(\alpha^2+\beta)^2 = (2\alpha+\beta)(\beta+2\alpha\beta).$$

Durch weitere Entwicklung finden wir

$$2\beta(1+\alpha+\beta) = \alpha^3.$$

Hiernach kann β aus α berechnet werden, und durch wirkliche Auflösung erhalten wir

$$2\beta+\alpha+1 = \sqrt{((1+\alpha^2)(1+2\alpha))} = \sqrt{((1+\alpha)^2+2\alpha^3)}.$$

Es ist $k^2 = \frac{be}{c} = \frac{(\alpha^2+2\beta+2\alpha)\beta^2}{\alpha^2+2\beta+2\alpha\beta}$ und $k^4 = \frac{\beta^2(\beta+2\alpha)}{1+2\alpha}$. Diese Ausdrücke können noch in anderen Formen dargestellt werden. Es ist

$$\frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha+\beta} = \frac{\beta+2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta};$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten Eins, so hat man

$$\frac{\alpha-2}{2\alpha+\beta}=\frac{2\beta-\alpha}{\alpha^2+\beta}, \text{ also } \frac{\alpha-2}{2\beta-\alpha}=\frac{2\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta}=\frac{\alpha^2+\beta}{\beta+2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta}{\beta(1+2\alpha)}=\sqrt{\frac{2\alpha+\beta}{\beta(1+2\alpha)}}.$$

Hiernach erhält man $k^4=\beta^4.\left(\frac{\alpha-2}{2\beta-\alpha}\right)^2$ oder auch

$$k^2 = \frac{\beta^2(\alpha-2)}{2\beta-\alpha}.$$

Es ist nun $2\beta=\sqrt{((1+\alpha^2)(1+2\alpha))}-1-\alpha$, also

$$2\beta-\alpha = \sqrt{(1+2\alpha)}.(\sqrt{(1+\alpha^2)}-\sqrt{(1+2\alpha)}),$$

folglich ist

$$k^2 = \frac{\alpha-2}{4\sqrt{(1+2\alpha)}}.\frac{(\sqrt{((1+\alpha^2)(1+2\alpha))}-(1+\alpha))^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}-\sqrt{(1+2\alpha)}},$$

und da $\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)}-\sqrt{(1+2\alpha)}}=\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)}+\sqrt{(1+2\alpha)}}{\alpha(\alpha-2)}$ ist, so reducirt sich der Ausdruck nach einigen leichten Reductionen auf

$$2k^2 = 1-(1+\alpha-\alpha^2)\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha}}.$$

Setzt man $k=\sin\theta$, so ist $\cos 2\theta=1-2k^2$, und also

$$1.\quad \cos 2\theta = (1+\alpha-\alpha^2)\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha}},$$

folglich

$$\sin 2\theta = \sqrt{\left(\alpha^5.\frac{2-\alpha}{1+2\alpha}\right)}.$$

Setzt man nun noch $\alpha'=\frac{2-\alpha}{1+2\alpha}$, so ist

$$2.\quad (1+2\alpha)(1+2\alpha') = 5 \quad \text{und}$$

$$3.\quad \sin 2\theta = \sqrt{(\alpha'\alpha^5)}.$$

Es ist $\frac{\lambda}{k}=\frac{d}{ae}=\frac{\beta(\beta+2\alpha)}{\beta^2(1+2\alpha)}$, also $\frac{\lambda}{k}=\frac{1+\frac{2\alpha}{\beta}}{1+2\alpha}$, folglich

$$2\lambda^2 = 2k^2.\left(\frac{1+\frac{2\alpha}{\beta}}{1+2\alpha}\right)^2.$$

Da $\frac{1}{\beta}=\frac{2}{\sqrt{((1+\alpha)^2+2\alpha^2)}-(\alpha+1)}=\frac{\sqrt{((1+\alpha)(1+2\alpha))}+\alpha+1}{\alpha^2}$ ist, so erhält man, wenn dieser Werth und der vorhin für $2k^2$ gefundene substituirt wird, nach einigen Reductionen,

$$2\lambda^2 = 1-\frac{1-11\alpha-\alpha^2}{(1+2\alpha)^2}\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha}}.$$

Wird nun $\lambda=\sin\theta'$, also $\lambda'=\cos\theta'$ gesetzt, so hat man

$$\cos 2\theta' = (1-11\alpha-\alpha^2)\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{(1+2\alpha)^5}}.$$

Aber aus der Gleichung $(1+2\alpha)(2\alpha'+1)=5$ zieht man $\alpha=\frac{2-\alpha'}{1+2\alpha'}$; ferner

$$\frac{1-11\alpha-\alpha^2}{(1+2\alpha)^2} = -(1+\alpha'-\alpha'^2) \quad \text{und} \quad \frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha} = \frac{1+\alpha'^2}{1+2\alpha'}:$$

daher ist

$$\cos 2\theta' = -(1+\alpha'-\alpha'^2)\sqrt{\frac{1+\alpha'^2}{1+2\alpha'}}, \text{ oder } \cos 2(\tfrac{1}{2}\pi-\theta') = (1+\alpha'-\alpha'^2)\sqrt{\frac{1+\alpha'^2}{1+2\alpha'}}.$$

Hieraus sieht man, dafs sich θ mit $\frac{1}{2}\pi-\theta'$, also k mit λ' und k' mit λ vertauscht, wenn α mit α' vertauscht wird.

Wir erhalten noch $\sin 2\theta' = \sqrt{\left(\alpha'^5 \cdot \frac{2-\alpha'}{1+2\alpha'}\right)}$ oder

4. $\sin 2\theta' = \sqrt{(\alpha'^5.\alpha)}$, und da $\sin 2\theta = \sqrt{(\alpha^5.\alpha')}$

ist, so können aus den beiden durch die Gleichung $(1+2\alpha)(1+2\alpha')=5$ verbundenen Constanten α und α' beide Moduln θ und θ' berechnet werden. Man findet auch rückwärts

$$\alpha' = \sqrt[12]{\left(\frac{\sin^5 2\theta'}{\sin 2\theta}\right)} \quad \text{und} \quad \alpha = \sqrt[12]{\left(\frac{\sin^5 2\theta}{\sin 2\theta'}\right)}$$

und hat also die Modular-Gleichung

$$5. \quad \left(1+2\sqrt[12]{\frac{\sin^5 2\theta'}{\sin 2\theta}}\right)\left(1+2\sqrt[12]{\frac{\sin^5 2\theta}{\sin 2\theta'}}\right) = 5,$$

welche zur Berechnung des einen Moduls aus dem anderen dienen kann.

Wir stellen die Modular-Gleichung in noch anderen Formen dar. Es sei wieder

$$\sqrt[4]{k} = m \quad \text{und} \quad \sqrt[4]{\lambda} = n,$$

so ist $\sqrt{\frac{\lambda}{k}} = \frac{n^2}{m^2} = \sqrt{\frac{\beta+2\alpha}{\beta(1+2\alpha)}} = \frac{\alpha-2}{2\beta-\alpha}$, also rückwärts

$$\alpha = \frac{2m^2+2\beta n^2}{m^2+n^2}.$$

Ferner ist $e^2=\beta^4=\frac{k^5}{\lambda}=\frac{m^{20}}{n^4}$, also $\beta=\frac{m^5}{n}$ und $\beta n^2 = nm^5$, mithin ist

$$\alpha = \frac{2m^2+2nm^5}{m^2+n^2} = \frac{2m^2(1+nm^3)}{m^2+n^2}.$$

Ferner folgt aus der obigen Gleichung

$$\frac{n^4}{m^4}\beta = \frac{\beta+2\alpha}{1+2\alpha} \quad \text{oder} \quad 2\alpha = \frac{mn^3-\beta}{1-mn^3} = \frac{m}{n}\cdot\frac{n^4-m^4}{1-mn^3}.$$

Werden die beiden Werthe von α identificirt, so erhält man die Gleichung

$$6. \quad n^6-m^6+4m^5n^5+5m^2n^4-5n^2m^4-4mn = 0.$$

Da $n^6-m^6=(n^4+n^2m^2+m^4)(n^2-m^2)$ ist, so läfst sich die vorige Gleichung auch also darstellen:

$$(n^2-m^2)(n^4+6m^2n^2+m^4) = 4mn(1-m^4n^4).$$

Verbindet man hiermit die Identität

$$(n^2-m^2).4mn(n^2+m^2) = 4mn(n^4-m^4)$$

durch Addition und Subtraction, so erhält man die Gleichungen

$$(n^2-m^2)(n+m)^4 = 4mn(1+n^4)(1-m^4),$$
$$(n^2-m^2)(n-m)^4 = 4mn(1-n^4)(1+m^4).$$

Hieraus erhält man durch die Division

$$\left(\frac{n-m}{n+m}\right)^4 = \frac{1-n^4}{1+n^4}\cdot\frac{1+m^4}{1-m^4} \text{ oder auch}$$

$$7.\quad \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda}-\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{\lambda}+\sqrt[4]{k}}\right)^4 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{1+k}{1-k}.$$

Die Multiplication giebt aber

$(n^2-m^2)^2(n^2-m^2)^4 = 16m^2n^2(1-n^8)(1-m^8)$ oder

$(n^2-m^2)^6 = 16m^2n^2(1-n^8)(1-m^8)$, also $(\sqrt{\lambda}-\sqrt{k})^6 = 16\sqrt{(k\lambda)}.k'^2\lambda'^2$,

oder $\quad 8.\quad (\sqrt{\lambda}-\sqrt{k})^3 = 4\lambda'k'\sqrt[4]{(k\lambda)}.$

Da man k mit λ' und gleichzeitig k' mit λ vertauschen darf, so ist auch noch $(\sqrt{k'}-\sqrt{\lambda'})^3 = 4k\lambda\sqrt[4]{(k'\lambda')}$, und dividirt man die vorige Gleichung hierdurch, so hat man

$$\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{k}}{\sqrt{k'}-\sqrt{\lambda'}}\right)^3 = \sqrt[4]{\left(\frac{k'\lambda'}{k\lambda}\right)^3} \text{ oder auch}$$

$$9.\quad \frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{k}}{\sqrt{k'}-\sqrt{\lambda'}} = \sqrt[4]{\frac{k'\lambda'}{k\lambda}}.$$

§. 284.

Die ergänzende Substitution fünften Grades.

Es ist schon §. 283. gezeigt worden, dafs man in den vorstehenden, sich auf die Substitution fünften Grades beziehenden Formeln, ohne die Modulargleichung zu ändern, α' statt α setzen darf, wodurch k mit λ' und k' mit λ vertauscht wird. Werden aber die beiden durch die Gleichung $(1+2\alpha)(1+2\alpha') = 5$ verbundenen Gröfsen mit einander vertauscht, wodurch sich β in β' verwandelt, so ist

1. $\quad 2\beta'(1+\alpha'+\beta') = \alpha'^3$ oder $2\beta'+\alpha'+1 = \sqrt{((1+\alpha'^2)(1+2\alpha'))}$.

Setzen wir nun v statt u, wodurch v in u' übergehen mag, so verwandelt sich die Gleichung $v = (1+2\alpha)u$ in $u' = (1+2\alpha')v$; daher ist $u' = (1+2\alpha)(1+2\alpha')u$, oder $u' = 5u$.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (3.) §. 282. in

$$2.\quad \operatorname{sn}'5u = \frac{(1+2\alpha')\operatorname{sn}'v+(\alpha'^2+2\beta'+2\alpha'\beta')\operatorname{sn}'^3v+\beta'^2\operatorname{sn}'^5v}{1+(\alpha'^2+2\beta'+2\alpha')\operatorname{sn}'^2v+(\beta'^2+2\alpha'\beta')\operatorname{sn}'^4v},$$

wenn man $\text{sn}'v$ auf den Modul λ', so wie $\text{sn}'5u$ auf den Modul k' bezieht. Dieser Gleichung gemäfs ist für $v = L'$ auch $\text{sn}'5u = 1$ oder $5u = K'$, und da immer $v = (1+2\alpha).u$ ist, so ist

$$3.\quad L' = \tfrac{1}{5}(1+2\alpha).K'.$$

Der Gleichung (3.) §. 282. gemäfs ist aber für $u = K$, $v = L$. und also

$$4.\quad L = (1+2\alpha).K.$$

Wird diese Gleichung durch die vorige dividirt, so erhält man noch

$$5.\quad \frac{L}{L'} = 5.\frac{K}{K'},$$

und dieser Gleichung gemäfs ist der Modul λ merklich gröfser als der Modul k.

Auf ähnliche Weise wie die Gleichung (2.) hergeleitet wurde, findet man

$$\text{tn}'5u = \frac{(1+2\alpha')\text{tn}'v + ((1+\alpha')(1+\alpha'+2\beta')+2\alpha'+1)\text{tn}'^3v + (1+\alpha'+\beta')^2\text{tn}'^5v}{1+(2+2\beta'-\alpha'^2)\text{tn}'^2v + ((\beta'+1)^2-\alpha'^2)\text{tn}'^4v}$$

Setzt man in dieser Formel gleichzeitig vi statt v und ui statt u, so bleibt die Gleichung $v = (1+2\alpha)u$ ungeändert und man erhält

$$6.\quad \text{sn}\,5u = \frac{(1+2\alpha')\text{sn}\,v - ((1+\alpha')(1+\alpha'+2\beta')+2\alpha'+1)\text{sn}^3v + (1+\alpha'+\beta')^2\text{sn}^5v}{1-(2+2\beta'-\alpha'^2)\text{sn}^2v + ((\beta'+1)^2-\alpha'^2)\text{sn}^4v}.$$

Eliminirt man hieraus mittelst der Formel (3.) §. 282. die Function $\text{sn}\,v$, so erhält man $\text{sn}\,5u$ durch $\text{sn}\,u$ ausgedrückt; daher ergänzen sich die beiden in Rede stehenden Substitutionen zur Verfünffachung des Arguments.

Führt man in die Formel (6.) eine Gröfse β_1 statt β' ein, indem man $\beta_1 = \frac{-\sqrt{((1+\alpha'^2)(1+2\alpha'))}-(1+\alpha')}{2}$, oder $\beta' = -\beta_1-(1+\alpha')$ setzt, so erhält man

$$7.\quad \text{sn}\,5u = \frac{(1+2\alpha')\text{sn}\,v + (\alpha'^2+2\beta_1+2\beta_1\alpha')\text{sn}^3v + \beta_1^2\text{sn}^5v}{1+(\alpha'^2+2\beta_1+2\alpha')\text{sn}^2v + (\beta_1^2+2\alpha'\beta_1)\text{sn}^4v}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel (3.) §. 282., so zeigt sich eine merkwürdige Uebereinstimmung und das einfache Gesetz, dafs in den Formeln (3. bis 7.) α statt α', β statt β_1, k statt λ, λ statt k, v statt u und $5u$ statt v gesetzt werden mufs und dafs sie sich dadurch sämmtlich in die sich auf die ergänzende Substitution beziehenden Formeln verwandeln.

Zusatz. Aus den Formeln (3. und 6.) für $\text{sn}\,v$ und $\text{cn}\,v$ §. 282. leiten wir noch her:

$$\frac{\text{sn}\,v-\text{sn}\,u}{\text{cn}\,v+\text{cn}\,u} = \frac{\alpha\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u}{1+(\alpha+\beta)\text{sn}^2u} = \frac{\alpha\,\text{tn}\,u}{1+(1+\alpha+\beta)\text{tn}^2u}.$$

Diese Gleichung läfst sich umformen in

$$\operatorname{am} v = \operatorname{am} u + 2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\alpha \operatorname{tn} u}{1+(1+\alpha+\beta)\operatorname{tn}^2 u}\right),$$

und hierin ist $1+\alpha+\beta = \frac{1+\alpha+\sqrt{((1+\alpha^2)(1+2\alpha))}}{2}$

Nach dem kurz vorher nachgewiesenen Gesetze findet man nun noch

$$\operatorname{am} 5u = \operatorname{am} v + 2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\alpha' \operatorname{tn} v}{1+(1+\alpha'+\beta_1)\operatorname{tn}^2 v}\right),$$

und hierin ist $1+\alpha'+\beta_1 = \frac{1+\alpha'-\sqrt{((1+\alpha'^2)(1+2\alpha'))}}{2}$.

Allgemeine Umformung der Gleichung $x = \operatorname{sn} u$ in eine ähnliche durch eine Substitution $n$ten Grades, wenn n eine ungerade Zahl ist.

§. 285.

Es sei, mit Beziehung auf den Modul k, wozu der Quadrant K und als conjugirter Quadrant K' gehören mag,

$$\omega = \frac{2aK+2biK'}{n}.$$

Ferner sei n eine ungerade ganze Zahl, a und b hingegen seien ebenfalls ganze Zahlen, nur mit der Einschränkung, dafs wenigstens die eine dieser beiden Zahlen keinen Factor mit n gemein habe, welcher gröfser als Eins wäre. Bilden wir nun das Product

$$1-y = g(1-\operatorname{sn} u)(1-\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-\operatorname{sn}(u+4\omega))(1-\operatorname{sn}(u+6\omega))\ldots$$
$$\ldots(1-\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)),$$

welches aus n binomischen Factoren besteht, so hat dasselbe die Eigenschaft, dafs sein Werth nicht geändert wird, wenn man das Argument u in ihm um 2ω vermehrt. Abgesehen von dem constanten Factor g, dessen Werth wir noch näher bestimmen werden, verwandelt sich jeder Factor in den nächst folgenden, wenn $u+2\omega$ statt u gesetzt wird, und der letzte Factor verwandelt sich wieder in den ersten, da $\operatorname{sn}(u+2n\omega) = \operatorname{sn}(u+4aK+4biK') = \operatorname{sn} u$, also auch $1-\operatorname{sn}(u+2n\omega) = 1-\operatorname{sn} u$ ist. Setzt man in der Gleichung $\operatorname{sn}(u+2n\omega) = \operatorname{sn} u$, $u-2\beta\omega$ statt u, so verwandelt sie sich in

$$\operatorname{sn}(u+2\alpha\omega) = \operatorname{sn}(u-2\beta\omega), \quad \text{für} \quad \alpha+\beta = n.$$

Hiernach kann das vorige Product auch also dargestellt werden:

$$1-y = g(1-\operatorname{sn} u).\left\{\begin{array}{l}(1-\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-\operatorname{sn}(u+4\omega))(1-\operatorname{sn}(u+6\omega))\ldots\\ \qquad\ldots(1-\operatorname{sn}(u+(n-1)\omega))\\ (1-\operatorname{sn}(u-2\omega))(1-\operatorname{sn}(u-4\omega))(1-\operatorname{sn}(u-6\omega))\ldots\\ \qquad\ldots(1-\operatorname{sn}(u-(n-1)\omega))\end{array}\right\}.$$

Da nach §. 36. $(1-\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-\operatorname{sn}(u-2\omega)) = \frac{(\operatorname{cn}2\omega - \operatorname{dn}2\omega.\operatorname{sn}u)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.\operatorname{sn}^2 u}$
$= \frac{\operatorname{cn}^2 2\omega.\left(1-\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{snc}2\omega}\right)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.\operatorname{sn}^2 u}$ ist, so erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung

$$1.\quad\left\{\begin{array}{l}p = (\operatorname{sn}2\omega.\operatorname{sn}4\omega.\operatorname{sn}6\omega\ldots\operatorname{sn}(n-1)\omega)^2,\\ p' = (\operatorname{snc}2\omega.\operatorname{snc}4\omega.\operatorname{snc}6\omega\ldots\operatorname{snc}(n-1)\omega)^2,\\ q = (\operatorname{cn}2\omega.\operatorname{cn}4\omega.\operatorname{cn}6\omega\ldots\operatorname{cn}(n-1)\omega)^2,\\ q' = (\operatorname{cnc}2\omega.\operatorname{cnc}4\omega.\operatorname{cnc}6\omega\ldots\operatorname{cnc}(n-1)\omega)^2,\\ r = (\operatorname{dn}2\omega.\operatorname{dn}4\omega.\operatorname{dn}6\omega\ldots\operatorname{dn}(n-1)\omega)^2,\\ r' = (\operatorname{dnc}2\omega.\operatorname{dnc}4\omega.\operatorname{dnc}6\omega\ldots\operatorname{dnc}(n-1)\omega)^2\end{array}\right.$$

setzen, woraus leicht

$$2.\quad p' = \frac{q}{r},\qquad q' = k'^{n-1}.\frac{p}{r}\quad\text{und}\quad r' = \frac{k'^{n-1}}{r}$$

folgt, die Umformung

$$1-y = gq.(1-\operatorname{sn}u)\frac{\left\{\left(1-\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{snc}2\omega}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{snc}4\omega}\right)\ldots\left(1-\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{snc}(n-1)\omega}\right)\right\}^2}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.\operatorname{sn}^2u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 4\omega.\operatorname{sn}^2u)\ldots(1-k^2\operatorname{sn}^2(n-1)\omega.\operatorname{sn}^2u)}.$$

Wir bestimmen nun den Factor g so, dafs $u=0$ für $y=0$ wird. Setzen wir aber $u=0$, so erhalten wir $1-y=gq$; also mufs $gq=1$ sein, wenn $y=0$ sein soll. Hieraus folgt $g=\frac{1}{q}$, und also

$$3.\quad 1-y = (1-x).\frac{C^2}{D.D'},$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$4.\quad\left\{\begin{array}{l}x = \operatorname{sn}u,\\ C = \left(1-\frac{x}{\operatorname{snc}2\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\operatorname{snc}4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\operatorname{snc}6\omega}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\operatorname{snc}(n-1)\omega}\right),\\ C' = \left(1+\frac{x}{\operatorname{snc}2\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\operatorname{snc}4\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\operatorname{snc}6\omega}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\operatorname{snc}(n-1)\omega}\right),\\ D = (1-k\operatorname{sn}2\omega.x)(1-k\operatorname{sn}4\omega.x)(1-k\operatorname{sn}6\omega.x)\ldots(1-k\operatorname{sn}(n-1)\omega.x),\\ D' = (1+k\operatorname{sn}2\omega.x)(1+k\operatorname{sn}4\omega.x)(1+k\operatorname{sn}6\omega.x)\ldots(1+k\operatorname{sn}(n-1)\omega.x).\end{array}\right.$$

Für die Werthe $x=\operatorname{snc}\omega$, $\operatorname{snc}4\omega$, $\operatorname{snc}6\omega$, ... $\operatorname{snc}(n-1)\omega$ wird $C=0$, also $1-y=0$, folglich $y=+1$, und für $x=1$ wird $y=1$.

§. 286.

Aus dem Ausdrucke $1-y=\frac{(1-x)C^2}{DD'}$ folgt $y=\frac{DD'-(1-x)C^2}{DD'}$. Da nun DD' von der $(n-1)$ten Ordnung, hingegen $(1-x).C^2$ von der $n$ten Ordnung ist, so ist der Zähler des Ausdrucks von y eine rationale ganze Function von x von der $n$ten Ordnung. Da ferner $y=0$ für $x=\operatorname{sn}u$, $=0$ ist und y seinen Werth nicht ändert, wenn das Argument u beliebig oft um 2ω vermehrt wird, so befriedigen die Werthe $x=0$, $x=\operatorname{sn}2\omega$, $x=\operatorname{sn}4\omega$, $\operatorname{sn}x=6\omega$, ... $x=\operatorname{sn}2(n-1)\omega$ die Gleichung

$$DD'-(1-x)C^2=0.$$

Jene Werthe sind sämmtlich verschieden von einander und ihre Anzahl n stimmt mit dem Grade der vorstehenden Gleichung überein. Daher ist

$$DD'-(1-x)C^2=\mu.x\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}2\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}6\omega}\right)....\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}2(n-1)\omega}\right),$$

wenn μ einen noch näher zu bestimmenden constanten Factor bezeichnet.

Da $\operatorname{sn}2\alpha\omega=-\operatorname{sn}2\beta\omega$ ist für $\alpha+\beta=n$, so haben wir auch

$$DD'-(1-x)C^2=\mu x\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}2\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\operatorname{sn}2\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}4\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\operatorname{sn}4\omega}\right)...$$
$$...\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}(n-1)\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\operatorname{sn}(n-1)\omega}\right)$$
$$=\mu x\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 4\omega}\right)....\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2(n-1)\omega}\right),$$

und also

$$1.\quad y=\mu x.\frac{\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 4\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 6\omega}\right)....\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2(n-1)\omega}\right)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.x^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2 4\omega.x^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2 6\omega.x^2)....(1-k^2\operatorname{sn}^2(n-1)\omega.x^2)}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $-x$ statt x, so sieht man, dafs sich dadurch y in $-y$ verwandelt.

Da $(n-1)\omega=2aK+2biK'-\omega$, $(n-2)\omega=2aK+2biK'-2\omega$, u. s. w. ist, so ist

$\operatorname{sn}(n-1)\omega=(-1)^a.\operatorname{sn}\omega$, $\operatorname{sn}(n-3)\omega=(-1)^a.\operatorname{sn}3\omega$, $\operatorname{sn}(n-5)\omega=(-1)^a.\operatorname{sn}5\omega$ u. s. w., also

$\operatorname{sn}^2(n-1)\omega=\operatorname{sn}^2\omega$, $\operatorname{sn}^2(n-3)\omega=\operatorname{sn}^2 3\omega$, $\operatorname{sn}^2(n-5)\omega=\operatorname{sn}^2 5\omega$ u. s. w.

Auf ähnliche Art findet man

$\operatorname{cn}^2(n-1)\omega=\operatorname{cn}^2\omega$, $\operatorname{cn}^2(n-3)\omega=\operatorname{cn}^2 3\omega$, $\operatorname{cn}^2(n-5)\omega=\operatorname{cn}^2 5\omega$ u. s. w., und
$\operatorname{dn}^2(n-1)\omega=\operatorname{dn}^2\omega$, $\operatorname{dn}^2(n-3)\omega=\operatorname{dn}^2 3\omega$, $\operatorname{dn}^2(n-5)\omega=\operatorname{dn}^2 5\omega$ u. s. w.

Hiernach kann die Formel (1.) auch also dargestellt werden:

$$2.\quad y=\mu x.\frac{\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 3\omega}\right)....\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega}\right)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\omega.x^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.x^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2 3\omega.x^2)....(1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega.x^2)}.$$

Ferner hat man auch

$$3.\quad \begin{cases} p = (\operatorname{sn}\omega.\ \operatorname{sn}2\omega.\ \operatorname{sn}3\omega \ldots\ \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ p' = (\operatorname{snc}\omega.\operatorname{snc}2\omega.\operatorname{snc}3\omega\ldots\operatorname{snc}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ q = (\operatorname{cn}\omega.\ \operatorname{cn}2\omega.\ \operatorname{cn}3\omega\ldots\ \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ q' = (\operatorname{cnc}\omega.\operatorname{cnc}2\omega.\operatorname{cnc}3\omega\ldots\operatorname{cnc}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ r = (\operatorname{dn}\omega.\ \operatorname{dn}2\omega.\ \operatorname{dn}3\omega\ldots\ \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ r' = (\operatorname{dnc}\omega.\operatorname{dnc}2\omega.\operatorname{dnc}3\omega\ldots\operatorname{dnc}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2. \end{cases}$$

Die Constante μ läfst sich dadurch bestimmen, dafs man $x=1$ setzt, wodurch nach §. 285. auch $y=1$ wird. Hiernach erhält man

$$1 = \mu.(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{q}{p.r} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu.\frac{p'}{p},\ \text{ also}$$

$$4.\quad \mu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{p}{p'} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\left(\frac{\operatorname{sn}\omega.\ \operatorname{sn}2\omega.\ \operatorname{sn}3\omega\ldots\ \operatorname{sn}\frac{1}{2}(n-1)\omega}{\operatorname{snc}\omega.\operatorname{snc}2\omega.\operatorname{snc}3\omega\ldots\operatorname{snc}\frac{1}{2}(n-1)\omega}\right)^2.$$

Da sich y in $-y$ verwandelt, wenn $-x$ statt x gesetzt wird, so verwandelt sich die Formel

$$5.\quad 1-y = (1-x).\frac{C^2}{DD'}\quad \text{in}\quad 1+y = (1+x).\frac{C'^2}{DD'}.$$

So wie ferner

$$6.\quad \begin{cases} 1-y = \frac{1}{q}(1-\operatorname{sn}u)(1-\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-\operatorname{sn}(u+4\omega))(1-\operatorname{sn}(u+6\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1-\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega))\ \text{ ist, so ist auch} \\ 1+y = \frac{1}{q}(1+\operatorname{sn}u)(1+\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+\operatorname{sn}(u+4\omega))(1+\operatorname{sn}(u+6\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1+\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)). \end{cases}$$

Es ist $y=0$ für $x=0,\ \pm\operatorname{sn}\omega,\ \pm\operatorname{sn}2\omega,\ \pm\operatorname{sn}3\omega,\ \pm\operatorname{sn}4\omega,\ldots\ \pm\operatorname{sn}\frac{1}{2}(n-1)\omega$.

§. 287.

Wir stellen die Formel (1.) §. 286. noch in einer andern Gestalt dar. Es ist zunächst

$$y = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\mu}{p}.\operatorname{sn}u.\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2 2\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.\operatorname{sn}^2u}.\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2 4\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2 4\omega.\operatorname{sn}^2u}\ldots$$
$$\ldots\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2(n-1)\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2(n-1)\omega.\operatorname{sn}^2u}.$$

Da nun $\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu}{p} = \frac{1}{p'}$ ist, so haben wir

$$1.\quad \begin{cases} y = \frac{1}{p'}\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u-2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\operatorname{sn}(u-4\omega)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\operatorname{sn}(u+(n-1)\omega)\operatorname{sn}(u-(n-1)\omega)\ \text{ oder auch} \\ y = \frac{1}{p'}\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\operatorname{sn}(u+6\omega)\ldots\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega). \end{cases}$$

Die Formel (2.) §. 286. läfst sich ganz ebenso in

$$y=\frac{1}{p'}\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega)\operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u-2\omega)\operatorname{sn}(u+3\omega)\operatorname{sn}(u-3\omega)\ldots$$
$$\ldots\operatorname{sn}(u+\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)\operatorname{sn}(u-\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)$$

verwandeln. Setzt man $u+iK'$ statt u, also $\frac{1}{kx}$ statt x und bezeichnet den geänderten Werth von y durch y', so hat man auf der Stelle

$$y'=\frac{1}{p'.k^n}\cdot\frac{1}{\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\ldots\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)};$$

daher ist

$$yy'=\frac{1}{p'^2.k^n}.$$

Setzt man also

$$2.\quad \lambda=p'^2.k^n=k^n.(\operatorname{snc}\omega\operatorname{snc}2\omega\operatorname{snc}3\omega\ldots\operatorname{snc}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2,$$

so ist $y'=\frac{1}{\lambda y}$, und es *verwandelt sich also y in $\frac{1}{\lambda y}$, wenn x in $\frac{1}{kx}$ verwandelt wird.*

Hiernach verwandelt sich also

$$1+y=\frac{1}{q}(1+\operatorname{sn}u)(1+\operatorname{sn}(u+2\omega))\ldots(1+\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega))\quad\text{in}$$

$$\frac{1+\lambda y}{\lambda y}=\frac{1}{qk^n}\cdot\frac{(1+k\operatorname{sn}u)(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+k\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots(1+k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega))}{\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\ldots\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)}.$$

Da nun $\frac{\lambda}{p'qk^n}=\frac{p'}{q}=\frac{1}{r}$ ist, so erhält man, wenn diese Gleichung mit der Gleichung (1.) multiplicirt wird,

$$3.\quad\begin{cases}1+\lambda y=\frac{1}{r}(1+k\operatorname{sn}u)(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+k\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots\\ \qquad\ldots(1+k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)),\ \text{und eben so}\\ 1-\lambda y=\frac{1}{r}(1-k\operatorname{sn}u)(1-k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-k\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots\\ \qquad\ldots(1-k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)).\end{cases}$$

Stellen wir die erste Formel also dar:

$$1+\lambda y=\frac{1}{r}(1+k\operatorname{sn}u).\begin{Bmatrix}(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega)).(1+k\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots\\ \ldots(1+k\operatorname{sn}(u+(n-1)\omega))\\ (1+k\operatorname{sn}(u-2\omega)).(1+k\operatorname{sn}(u-4\omega))\ldots\\ \ldots(1+k\operatorname{sn}(u-(n-1)\omega))\end{Bmatrix},$$

und beachten, dafs nach §. 36.

$$(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+k\operatorname{sn}(u-2\omega))=\frac{(\operatorname{dn}2\omega+k\operatorname{cn}2\omega.\operatorname{sn}u)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.\operatorname{sn}^2 u}$$
$$=\operatorname{dn}^2 2\omega.\frac{(1+k\operatorname{snc}2\omega.x)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.x^2}$$

ist, und setzen wir noch

$$4. \quad \begin{cases} B = (1-k\,\mathrm{snc}\,2\omega.x)(1-k\,\mathrm{snc}\,4\omega.x)(1-k\,\mathrm{snc}\,6\omega.x)\ldots \\ \qquad \ldots(1-k\,\mathrm{snc}(n-1)\omega.x), \\ B' = (1+k\,\mathrm{snc}\,2\omega.x)(1+k\,\mathrm{snc}\,4\omega.x)(1+k\,\mathrm{snc}\,6\omega.x)\ldots \\ \qquad \ldots(1+k\,\mathrm{snc}(n-1)\omega.x), \end{cases}$$

so haben wir

$$5. \quad 1+\lambda y = (1+kx).\frac{B'^2}{DD'} \quad \text{und} \quad 1-\lambda y = (1-kx).\frac{B^2}{DD'}.$$

Zieht man aus dem Producte dieser beiden Gleichungen die Quadratwurzel, so erhält man

$$\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)} = \sqrt{(1-k^2 x^2)}.\frac{BB'}{DD'}.$$

Da nun für $x=1$, $y=1$ ist, so erhält man, wenn man $\sqrt{(1-\lambda^2)}=\lambda'$ setzt, zunächst

$$6. \quad \lambda' = k'.\frac{r'}{r} = \frac{k'^n}{r^2} \quad \text{oder} \quad \lambda' = k'^n.\left(\frac{1}{\mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,2\omega\,\mathrm{dn}\,3\omega\ldots.\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}(n-1)\omega}\right)^4.$$

§. 288.

Die Function y kann auch in der Form eines $n$gliedrigen Ausdrucks oder in der Form einer geschlossenen Reihe dargestellt werden. Nach §. 287. ist

$$p'y = \frac{x(x^2-\mathrm{sn}^2\omega)(x^2-\mathrm{sn}^2 2\omega)(x^2-\mathrm{sn}^2 3\omega)\ldots.(x^2-\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega)}{(1-k^2\mathrm{sn}^2\omega.x^2)(1-k^2\mathrm{sn}^2 2\omega.x^2)(1-k^2\mathrm{sn}^2 3\omega.x^2)\ldots(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega.x^2)}.$$

Sieht man nun y als gegeben, x hingegen als unbekannt an, so hat man eine Gleichung von der Form

$$x^n - \overset{1}{A}x^{n-1} + \overset{2}{A}.x^{n-2} - \ldots. + \overset{n}{A} = 0$$

aufzulösen. In derselben sind die Coëfficienten

$\overset{1}{A} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.p.k^{n-1}.p'y$ und

$\overset{2}{A} = -(\mathrm{sn}^2\omega + \mathrm{sn}^2 2\omega + \mathrm{sn}^2 3\omega + \mathrm{sn}^2 4\omega\ldots. + \mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega)$ oder $\overset{2}{A} = -s$,

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$1. \quad s = \mathrm{sn}^2\omega + \mathrm{sn}^2 2\omega + \mathrm{sn}^2 3\omega + \ldots. + \mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}(n-1)\omega.$$

Die Wurzeln der vorstehenden Gleichung sind aber schon bekannt; denn es ist $x = \mathrm{sn}\,u$ schon eine Wurzel der Gleichung, und da y nicht geändert wird, wenn u beliebig oft um 2ω vermehrt oder auch vermindert wird, so sind die Wurzeln überhaupt

$$\overset{1}{x} = \mathrm{sn}\,u, \quad \overset{2}{x} = \mathrm{sn}(u+2\omega), \quad \overset{3}{x} = \mathrm{sn}(u-2\omega), \quad \ldots. \quad \overset{n-1}{x} = \mathrm{sn}(u+(n-1)\omega)$$

$$\text{und} \quad \overset{n}{x} = \mathrm{sn}(u-(n-1)\omega).$$

Es ist nun der Coëfficient

$$\overset{1}{A} = \overset{1}{x} + \overset{2}{x} + \overset{3}{x} + \dots + \overset{n}{x},$$

und der Coëfficient $\overset{2}{A}$ ist gleich der Summe der Producte aus je zwei von diesen Wurzeln. Es ist also

$$\overset{1}{A}{}^{2} = (\overset{1}{x} + \overset{2}{x} + \overset{3}{x} \dots + \overset{n}{x})^2 = \overset{1}{x}{}^2 + \overset{2}{x}{}^2 + \overset{3}{x}{}^2 \dots + \overset{n}{x}{}^2 + 2.\overset{2}{A} \text{ oder}$$

$$\overset{1}{x}{}^2 + \overset{2}{x}{}^2 + \overset{3}{x}{}^2 + \dots + \overset{n}{x}{}^2 = \overset{1}{A}{}^2 - 2\overset{2}{A}.$$

Wir vereinfachen noch den Ausdruck des Coëfficienten $\overset{1}{A}$. Es ist $\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{p}{p'}$, also $\overset{1}{A} = \mu.p'^2.k^{n-1}.y = \frac{\mu\lambda}{k}.y$. Daher ist

$$2.\quad \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{k}.y = \operatorname{sn} u + \operatorname{sn}(u+2\omega) + \operatorname{sn}(u+4\omega) + \operatorname{sn}(u+6\omega) + \dots \\ \qquad \dots + \operatorname{sn}(u+(n-1)\omega) \\ \qquad + \operatorname{sn}(u-2\omega) + \operatorname{sn}(u-4\omega) + \operatorname{sn}(u-6\omega) + \dots \\ \qquad \dots + \operatorname{sn}(u-(n-1)\omega) \end{cases}$$

und noch außerdem

$$3.\quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda\mu}{k}\right)^2.y^2 + 2s = \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2(u+2\omega) + \operatorname{sn}^2(u+4\omega) + \operatorname{sn}^2(u+6\omega) \dots \\ \qquad \dots + \operatorname{sn}^2(u+(n-1)\omega) \\ \qquad + \operatorname{sn}^2(u-2\omega) + \operatorname{sn}^2(u-4\omega) + \operatorname{sn}^2(u-6\omega) \dots \\ \qquad \dots + \operatorname{sn}^2(u-(n-1)\omega). \end{cases}$$

§. 289.

Differentiiren wir die Formel (2.) §. 288., so erhalten wir

$$\frac{\lambda\mu}{k}.\frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \operatorname{cn}(u+2\omega)\operatorname{dn}(u+2\omega) + \dots + \operatorname{cn}(u+(n-1)\omega)\operatorname{dn}(u+(n-1)\omega)$$
$$+ \operatorname{cn}(u-2\omega)\operatorname{dn}(u-2\omega) + \dots + \operatorname{cn}(u-(n-1)\omega)\operatorname{dn}(u-(n-1)\omega),$$

woraus erhellet, dafs das Differentialverhältnifs $\frac{\partial y}{\partial u}$ ungeändert bleibt, wenn das Argument u beliebig oft um 2ω vermehrt oder auch vermindert wird. Dasselbe folgt übrigens aus der gleichen Eigenschaft von y selbst.

Da

$$\operatorname{cn}(u+2\omega)\operatorname{dn}(u+2\omega) + \operatorname{cn}(u-2\omega)\operatorname{dn}(u-2\omega)$$
$$= \frac{2\operatorname{cn} 2\omega \operatorname{dn} 2\omega.\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u(1+k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.\operatorname{sn}^2 u)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.\operatorname{sn}^2 u)^2}$$

ist, so erhalten wir auch

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{k}{\lambda\mu}\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\Big(1+\frac{2\,\mathrm{cn}\,2\omega\,\mathrm{dn}\,2\omega(1+k^2\,\mathrm{sn}^2 2\omega.x^2)}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 2\omega.x^2)^2}$$
$$+\frac{2\,\mathrm{cn}\,4\omega.\mathrm{dn}\,4\omega.(1+k^2\,\mathrm{sn}^2 4\omega.x^2)}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 4\omega.x^2)^2}+\ldots+\frac{2\,\mathrm{cn}(n-1)\omega.\mathrm{dn}(n-1)\omega.(1+k^2\,\mathrm{sn}^2(n-1)\omega.x^2)}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(n-1)\omega.x^2)^2}\Big).$$

Der Factor $\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u = \sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-k^2x^2)}$ ist $=0$ für $x=\pm 1$ und für $x=\pm\frac{1}{k}$, d. h. für

$$x=\pm\,\mathrm{sn}\,K \quad\text{und für}\quad x=\pm\,\mathrm{sn}(K+iK');$$

für diese Werthe ist daher auch $\frac{\partial y}{\partial u}=0$. Da sich nun der Werth dieses Verhältnisses nicht ändert, wenn das Argument u um ein Vielfaches von 2ω vermehrt oder vermindert wird, so ist überhaupt $\frac{\partial y}{\partial u}=0$ für Werthe von der Form

$$x=\pm\,\mathrm{sn}(K\pm 2a\omega)=\pm\,\mathrm{snc}\,2a\omega \quad\text{und}\quad x=\pm\,\mathrm{sn}(K+iK'\pm 2a\omega)=\pm\frac{1}{k\,\mathrm{snc}\,2a\omega},$$

wenn a eine ganze Zahl bezeichnet. Der eingeklammerte vielgliederige Factor von $\frac{\partial y}{\partial u}$ kann als eine rationale gebrochene Function von x dargestellt werden; der Nenner ist dann $(DD')^2$ und also eine Form $(2n-2)$ten Grades. Bezeichnen wir den Zähler mit X, so dafs

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\mathrm{cn}\,u.\mathrm{dn}\,u.X}{D.D'^2}$$

ist, so ist auch X eine rationale ganze Function von x vom $(2n-2)$ten Grade, welche für die folgenden Werthe von x gleich Null werden mufs:

$$x=\pm\,\mathrm{snc}\,2\omega,\quad \pm\,\mathrm{snc}\,4\omega,\quad \pm\,\mathrm{snc}\,6\omega,\quad \ldots\ \pm\,\mathrm{snc}(n-1)\omega \quad\text{und}$$
$$x=\pm\frac{1}{k\,\mathrm{snc}\,2\omega},\quad \frac{\pm 1}{k\,\mathrm{snc}\,4\omega},\quad \frac{\pm 1}{k\,\mathrm{snc}\,6\omega},\quad \ldots\ \frac{\pm 1}{k\,\mathrm{snc}(n-1)\omega}.$$

Alle diese Werthe sind verschieden von einander, und da ihre Anzahl $=2n-2$ mit dem Grade der Gleichung $X=0$ übereinstimmt, auch der Nenner $(DD')^2$ für keinen jener Werthe unendlich wird, so sind jene Werthe die Wurzeln der Gleichung $X=0$.

Die in der ersten Horizontalreihe enthaltenen Wurzeln befriedigen auch die Gleichung $C.C'=0$ und die in der zweiten Horizontalreihe enthaltenen Wurzeln befriedigen die Gleichung $B.B'=0$ und sind die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung; daher hat die Gleichung $X=0$ dieselben Wurzeln wie die Gleichung $BB'CC'=0$, und es ist mithin für jeden Werth von x,

$$X=g.BB'CC',$$

wo g eine noch zu ermittelnde Constante bezeichnet, oder auch

$$\frac{\partial y}{\partial u}=g.\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{C.C'.B.B'}{D.D'.D.D'}.$$

Da aber aus den Gleichungen (5.) §. 286. durch Multiplication $\sqrt{(1-y^2)} = \text{cn}\, u.\frac{C.C'}{D.D'}$ folgt und nach §. 287. $\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)} = \text{dn}\, u.\frac{B.B'}{D.D'}$ ist, so ist

$$g\partial u = \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y)}}.$$

Da ferner für $u = 0$, $y = 0$ ist, so ist

$$gu = \int_0 \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}}.$$

Setzen wir $gu = v$, so ist, der gefundenen Gleichung gemäfs, y der Modularsinus des Arguments v für den Modul λ. Beziehen wir also die Functionen $\text{sn}\, v$, $\text{cn}\, v$, $\text{dn}\, v$, $\text{tn}\, v$ auf den Modul λ, also $\text{sn}'v$, $\text{cn}'v$, $\text{dn}'v$, $\text{tn}'v$ auf den Modul $\lambda' = \sqrt{(1-\lambda^2)}$, so ist

$$1. \quad y = \text{sn}\, v, \quad \sqrt{(1-y^2)} = \text{cn}\, v, \quad \sqrt{(1-\lambda^2 y)} = \text{dn}\, v.$$

Den constanten Factor g finden wir leicht. Nach §. 286. ist $\frac{y}{x}$ (für $x = 0$) $= \mu$; ferner ist $\frac{y}{x} = \frac{\text{sn}\, v}{\text{sn}\, u}$ nach der bekannten Regel für $u = 0$ gleich $\frac{\partial\, \text{sn}\, v}{\partial\, \text{sn}\, u} = \frac{\partial v}{\partial u} = g$, also ist $g = \mu$ und mithin

$$2. \quad v = \mu.u.$$

Die Gleichung $x = \text{sn}\, u$ ist also in die ähnliche $y = \text{sn}\, v$ mit einem andern Modul durch eine Substitution $n$ten Grades umgeformt worden, und es haben die Argumente u und v das durch die Gleichung (2.) ausgedrückte constante Verhältnifs zu einander.

§. 290.

Wir haben nun in den vorigen Formeln nur noch durchgehends $\text{sn}\, v$, mit Beziehung auf den Modul λ, statt y zu setzen. Aufserdem ist

$p' = \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}$,

$r = \sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}}$, und da $q = r.p'$ ist, so ist

$q = \sqrt{\frac{\lambda k'^n}{\lambda' k^n}}$. Ferner ist $p = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu.p'$, also

$p = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu\sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}$. Da $q' = k'^{n-1}.\frac{p}{r} = \frac{k'^n}{k'}.\frac{p}{r}$ ist, so ist

$q' = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu\sqrt{\frac{\lambda\lambda'.k'^n}{kk'.k^n}}$ und

$r' = \sqrt{(\lambda' k'^{n-2})}$.

Werden auch noch diese Werthe benutzt, so erhalten wir

$$1.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}.\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\operatorname{sn}(u+6\omega)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega), \\ 1-\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1-\operatorname{sn} u)(1-\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1-\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \\ 1+\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1+\operatorname{sn} u)(1+\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1+\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \\ 1-\lambda\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}(1-k\operatorname{sn} u)(1-k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-k\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1-k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \\ 1+\lambda\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}(1+k\operatorname{sn} u)(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+k\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1+k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \\ \operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}.\operatorname{cn} u.\operatorname{cn}(u+2\omega)\operatorname{cn}(u+4\omega)\ldots\operatorname{cn}(u+2(n-1)\omega), \\ \operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}.\operatorname{dn} u.\operatorname{dn}(u+2\omega)\operatorname{dn}(u+4\omega)\ldots\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega), \\ \operatorname{tn} v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda'}\right)}.\operatorname{tn} u.\operatorname{tn}(u+2\omega)\operatorname{tn}(u+4\omega)\ldots\operatorname{tn}(u+2(n-1)\omega). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt noch, da $\operatorname{snc} v = \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}$ ist,

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{snc} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}\operatorname{snc} u\operatorname{snc}(u+2\omega)\operatorname{snc}(u+4\omega)\ldots\operatorname{snc}(u+2(n-1)\omega);\ \text{ebenso} \\ \operatorname{cnc} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}\operatorname{cnc} u\operatorname{cnc}(u+2\omega)\operatorname{cnc}(u+4\omega)\ldots\operatorname{cnc}(u+2(n-1)\omega), \\ \operatorname{dnc} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}\operatorname{dnc} u\operatorname{dnc}(u+2\omega)\operatorname{dnc}(u+4\omega)\ldots\operatorname{dnc}(u+2(n-1)\omega), \\ \operatorname{tnc} v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda'}\right)}\operatorname{tnc} u\operatorname{tnc}(u+2\omega)\operatorname{tnc}(u+4\omega)\ldots\operatorname{tnc}(u+2(n-1)\omega), \end{cases}$$

woraus erhellet, dafs $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ und $\operatorname{tn} v$ sich in $\operatorname{snc} v$, $\operatorname{cnc} v$, $\operatorname{dnc} v$ und $\operatorname{tnc} v$ verwandeln, wenn $K-u$ statt u gesetzt wird, wenn man nur beachtet, dafs $-\omega$ statt ω gesetzt werden darf, ohne die vorstehenden Formeln im mindesten zu verändern. Bezeichnen wir den zum Modul λ gehörigen Modular-Quadranten mit L, so ist sowohl

$$v = \mu.u, \text{ als auch } L-v = \mu(K-u), \text{ und also}$$

$$3.\quad L = \mu.K$$

Der Quadrant L ist mithin reell, wenn μ es ist, und imaginär, wenn μ imaginär ist.

Setzt man in der Formel für $\operatorname{dn} v$, $u-iK'$ statt u, so verwandelt

sich $\operatorname{dn} u$ in $\frac{i}{\operatorname{tn} u}$ und man erhält, wenn man den geänderten Werth von v mit v' bezeichnet,

$$\operatorname{dn} v' = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)} \cdot \frac{i^n}{\operatorname{tn} u \operatorname{tn}(u+2\omega) \operatorname{tn}(u+4\omega) \ldots \operatorname{tn}(u+2(n-1)\omega)}, \text{ also}$$

$$\operatorname{dn} v' = \frac{i^n}{\operatorname{tn} v}.$$

Bezeichnet man nun den zum Modul λ' gehörigen Modular-Quadranten mit L', so ist auch $\operatorname{dn}(v - niL') = \frac{i^n}{\operatorname{tn} v}$, und also $\operatorname{dn} v' = \operatorname{dn}(v - niL')$, oder $v' = v - niL$. Wird also $u - iK'$ statt u gesetzt, so verwandelt sich v in $v - niL'$; mithin verwandelt sich die Gleichung

$v = \mu u$ in $v - niL' = \mu(u - iK')$, und es ist also $niL' = \mu . iK'$, oder

$$4. \quad n . L' = \mu . K'.$$

Aus dieser und der vorigen Gleichung erhält man endlich

$$5. \quad \frac{L}{L'} = n . \frac{K}{K'}.$$

§. 291.

Die Formeln für $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ und $\operatorname{tn} v$ lassen sich auch also darstellen:

$$\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)} . \operatorname{sn} u . \operatorname{sn}(u+\omega) \operatorname{sn}(u-\omega) \operatorname{sn}(u+2\omega) \operatorname{sn}(u-2\omega) \ldots$$
$$\ldots \operatorname{sn}(u + \tfrac{1}{2}(n-1)\omega) \operatorname{sn}(u - \tfrac{1}{2}(n-1)\omega),$$

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)} . \operatorname{cn} u . \operatorname{cn}(u+\omega) \operatorname{cn}(u-\omega) \operatorname{cn}(u+2\omega) \operatorname{cn}(u-2\omega) \ldots$$
$$\ldots \operatorname{cn}(u + \tfrac{1}{2}(n-1)\omega) \operatorname{cn}(u - \tfrac{1}{2}(n-1)\omega),$$

$$\operatorname{tn} v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda'}\right)} . \operatorname{tn} u . \operatorname{tn}(u+\omega) \operatorname{tn}(u-\omega) \operatorname{tn}(u+2\omega) \operatorname{tn}(u-2\omega) \ldots$$
$$\ldots \operatorname{tn}(u + \tfrac{1}{2}(n-1)\omega) \operatorname{tn}(u - \tfrac{1}{2}(n-1)\omega),$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)} . \operatorname{dn} u . \operatorname{dn}(u+\omega) \operatorname{dn}(u-\omega) \operatorname{dn}(u+2\omega) \operatorname{dn}(u-2\omega) \ldots$$
$$\ldots \operatorname{dn}(u + \tfrac{1}{2}(n-1)\omega) \operatorname{dn}(u - \tfrac{1}{2}(n-1)\omega).$$

Setzt man hierin gleichzeitig $\frac{1}{2}u$ statt u und $\frac{1}{2}v$ statt v, so bleibt die Gleichung $v = \mu . u$ ungeändert und man erhält dadurch

$$\operatorname{tn} \tfrac{1}{2}v \operatorname{dn} \tfrac{1}{2}v = \operatorname{tn} \tfrac{1}{2}u . \operatorname{dn} \tfrac{1}{2}u . \operatorname{tn}(\tfrac{1}{2}u+\omega) \operatorname{dn}(\tfrac{1}{2}u+\omega) \operatorname{tn}(\tfrac{1}{2}u-\omega) \operatorname{dn}(\tfrac{1}{2}u-\omega)$$
$$\times \operatorname{tn}(\tfrac{1}{2}u+2\omega) \operatorname{dn}(\tfrac{1}{2}u+2\omega) \operatorname{tn}(\tfrac{1}{2}u-2\omega) \operatorname{dn}(\tfrac{1}{2}u-2\omega) \ldots$$
$$\ldots \operatorname{tn}(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}(n-1)\omega) \operatorname{dn}(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}(n-1)\omega) \operatorname{tn}(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}(n-1)\omega) \operatorname{dn}(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}(n-1)\omega).$$

Da nun aber $\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn} u}} = \operatorname{tn} \frac{1}{2}u \operatorname{dn} \frac{1}{2}u$ ist, nach §. 32., so haben wir

$$1. \quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} v}{1+\operatorname{cn} v}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn} u} \cdot \frac{1-\operatorname{cn}(u+2\omega)}{1+\operatorname{cn}(u+2\omega)} \cdot \frac{1-\operatorname{cn}(u-2\omega)}{1+\operatorname{cn}(u-2\omega)} \cdots \frac{1-\operatorname{cn}(u+(n-1)\omega)}{1+\operatorname{cn}(u+(n-1)\omega)} \cdot \frac{1-\operatorname{cn}(u-(n-1)\omega)}{1+\operatorname{cn}(u-(n-1)\omega)}\right)}.$$

Wird diese Formel mit der von $\operatorname{sn} v$ multiplicirt, so erhält man, nach einer geringen Abänderung,

$$2.\ \begin{cases} 1-\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}(1-\operatorname{cn} u)(1-\operatorname{cn}(u+2\omega))(1-\operatorname{cn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\ldots(1-\operatorname{cn}(u+2(n-1)\omega)) \text{ und die Division giebt} \\ 1+\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}(1+\operatorname{cn} u)(1+\operatorname{cn}(u+2\omega))(1+\operatorname{cn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\ldots(1+\operatorname{cn}(u+2(n-1)\omega)). \end{cases}$$

Beachtet man, daſs $\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = k \operatorname{sn}\tfrac{1}{2}u \operatorname{snc}\tfrac{1}{2}u$ ist, so leitet man zunächst

$$3.\ \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} v}{1+\operatorname{dn} v}} = \sqrt{\left(\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}\cdot\frac{1-\operatorname{dn}(u+2\omega)}{1+\operatorname{dn}(u+2\omega)}\cdot\frac{1-\operatorname{dn}(u+4\omega)}{1+\operatorname{dn}(u+4\omega)}\cdots\frac{1-\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega)}{1+\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega)}\right)}$$

her, und da $\sqrt{(1-\operatorname{dn} u)}\sqrt{(1+\operatorname{dn} u)} = k \operatorname{sn} u$ ist, so erhält man

$$4.\ \begin{cases} 1-\operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{k^n}\right)}(1-\operatorname{dn} u)(1-\operatorname{dn}(u+2\omega))(1-\operatorname{dn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\ldots(1-\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega)), \\ 1+\operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{k^n}\right)}(1+\operatorname{dn} u)(1+\operatorname{dn}(u+2\omega))(1+\operatorname{dn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\ldots(1+\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega)). \end{cases}$$

§. 292.

Setzt man auch in der Formel §. 288. für y den Werth $\operatorname{sn} v$, so hat man

$$1.\ \frac{\lambda\mu}{k}\operatorname{sn} v = \operatorname{sn} u + \operatorname{sn}(u+2\omega) + \operatorname{sn}(u+4\omega)\ldots + \operatorname{sn}(u+(n-1)\omega) + \operatorname{sn}(u-2\omega) + \operatorname{sn}(u-4\omega)\ldots + \operatorname{sn}(u-(n-1)\omega).$$

Setzt man in dieser Formel $u+iK'$ statt u, wodurch $\operatorname{sn} v$ in $\operatorname{sn}(v+niL') = \frac{1}{\lambda \operatorname{sn} v}$ übergeht, so erhält man

$$2.\ \frac{\mu}{\operatorname{sn} v} = \frac{1}{\operatorname{sn} u} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+2\omega)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+4\omega)}\ldots + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+(n-1)\omega)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-2\omega)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-4\omega)}\ldots + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-(n-1)\omega)}.$$

Setzt man in der Formel (1.) §. 291. $K-u$ statt u, also auch $L-v$ statt v, und differentiirt man dieselbe logarithmisch, beachtend, daſs $\partial \log\sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} u}{1-\operatorname{cnc} u}} = \partial \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) = \frac{k'}{\operatorname{cn} u}.\partial u$, also $\partial \log\sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} v}{1-\operatorname{cnc} v}} = \frac{\lambda'}{\operatorname{sn} v}\partial v$ und auch $\partial v = \mu.\partial u$ ist, so erhält man

$$3.\ \frac{\lambda}{k'}\mu.\frac{1}{\operatorname{cn} v} = \frac{1}{\operatorname{cn} u} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u+2\omega)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u+4\omega)} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{cn}(u+(n-1)\omega)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-2\omega)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-4\omega)} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-(n-1)\omega)}.$$

Setzt man in dieser Formel $u+iK'$ statt u, also $v+niL'$ statt v, so verwandelt sich $\operatorname{cn} u$ in $\frac{k'}{ik}\cdot\frac{1}{\operatorname{cnc} u}$, und $\operatorname{cn} v$ in $\frac{1}{i^n}\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}\cdot\frac{1}{\operatorname{cnc} v}$. Setzt man daher aufserdem noch $K-u$ statt u, also $L-v$ statt v, so erhält man, da $i^{n-1}=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ ist,

$$4.\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cdot\frac{\lambda}{k}\cdot\mu\cdot\operatorname{cn} v = \operatorname{cn} u+\operatorname{cn}(u+2\omega)+\operatorname{cn}(u+4\omega)+\dots \\ \qquad\qquad\dots+\operatorname{cn}(u+(n-1)\omega) \\ \qquad +\operatorname{cn}(u-2\omega)+\operatorname{cn}(u-4\omega)+\dots \\ \qquad\qquad\dots+\operatorname{cn}(u-(n-1)\omega). \end{cases}$$

Da $\partial\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{dnc} u}{1-\operatorname{dnc} u}}=\partial\mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(k(K-u),\ \frac{1}{k}\right)\right)=k'\operatorname{tn} u.\partial u$ ist, so erhält man, wenn man die Formel (3.) §. 291. logarithmisch differentiirt,

$$5.\quad \begin{cases} \frac{\lambda'}{k'}\mu.\operatorname{tn} v=\operatorname{tn} u+\operatorname{tn}(u+2\omega)+\operatorname{tn}(u+4\omega)+\dots+\operatorname{tn}(u+(n-1)\omega) \\ \qquad +\operatorname{tn}(u-2\omega)+\operatorname{tn}(u-4\omega)+\dots+\operatorname{tn}(u-(n-1)\omega). \end{cases}$$

Setzt man in dieser Formel $u-iK'$ statt u, also $\frac{i}{\operatorname{dn} u}$ statt $\operatorname{tn} u$, so verwandelt sich $\operatorname{tn} v$ in $\frac{i^n}{\operatorname{dn} v}$. Wird aufserdem noch $K-u$ statt u gesetzt, so erhält man

$$6.\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu.\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u+\operatorname{dn}(u+2\omega)+\operatorname{dn}(u+4\omega)+\dots \\ \qquad\qquad\dots+\operatorname{dn}(u+(n-1)\omega) \\ \qquad +\operatorname{dn}(u-2\omega)+\operatorname{dn}(u-4\omega)+\dots \\ \qquad\qquad\dots+\operatorname{dn}(u-(n-1)\omega). \end{cases}$$

Uebrigens hätte man auch alle diese Formeln durch dasselbe Verfahren herleiten können, durch welches die erste von ihnen §. 288. hergeleitet worden ist.

Da $\operatorname{sn}^2(u+(n-\alpha)\omega)=\operatorname{sn}^2(u-\alpha\omega)$ ist, so kann die Formel (3.) §. 288. auch also dargestellt werden:

$$7.\quad \left(\frac{\lambda\mu}{k}\right)^2.\operatorname{sn}^2 v = \left.\begin{matrix} \operatorname{sn}^2 u+\operatorname{sn}^2(u+\omega)+\operatorname{sn}^2(u+2\omega)+\dots+\operatorname{sn}^2(u+\frac{1}{2}(n-1)\omega) \\ +\operatorname{sn}^2(u-\omega)+\operatorname{sn}^2(u-2\omega)+\dots+\operatorname{sn}^2(u-\frac{1}{2}(n-1)\omega) \end{matrix}\right\}-2s$$

für

$$s=\operatorname{sn}^2\omega+\operatorname{sn}^2 2\omega+\operatorname{sn}^2 3\omega+\dots+\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(n-1)\omega.$$

§. 293.

Nach Formel (1. §. 96.) hat man, wenn $a=1$, $b=0$, $a'=0$ und $b'=1$ gesetzt wird,

$$\partial\left(\frac{K'}{K}\right)=-\tfrac{1}{2}\pi.\frac{\partial k}{kk'^2}\cdot\frac{1}{K^2}.$$

Ganz ebenso ist in Beziehung auf den Modul λ auch

$$\partial\left(\frac{L'}{L}\right) = -\tfrac{1}{2}\pi.\frac{\partial\lambda}{\lambda\lambda'^2}.\frac{1}{L^2},$$

und da nach §. 290. $\frac{L}{L'} = n.\frac{K}{K'}$ ist, so ist

$$\frac{1}{K^2}.\frac{\partial k}{kk'^2} = \frac{n}{L^2}.\frac{\partial\lambda}{\lambda\lambda'^2}.$$

Da $L = \mu.K$, also $\frac{1}{K^2} = \frac{\mu^2}{L^2}$ ist, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$\mu^2.\frac{\partial k}{kk'^2} = n.\frac{\partial\lambda}{\lambda\lambda'^2}, \text{ oder auch auf}$$

$$1. \quad \mu^2 = n.\frac{kk'^2}{\lambda\lambda'^2}.\frac{\partial\lambda}{\partial k}.$$

Differentiirt man also die Modulargleichung, d. h. die Gleichung zwischen dem alten Modul k und dem neuen λ, so kann man auf diesem Wege aus ihr die Gröfse des Multiplicators μ in der Gleichung $v = \mu.u$ als eine Function der Moduln λ und k, oder auch als eine Function eines dieser Moduln herleiten.

Die Gleichungen $\sqrt{\frac{\lambda}{k^n}} = p'$ und $\sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}} = r$ sind im Grunde nur zwei verschiedene Formen der vorhin erwähnten Modulargleichungen, wenn man sich an die §. 286. angegebenen Bedeutungen von p' und r erinnert.

Aufser der vorhin erwähnten Substitution $n$ten Grades giebt es noch eine Substitution desselben Grades, wodurch man von dem Modul λ zum Modul k zurückgelangt, und welche insofern als die umgekehrte der vorigen anzusehen ist. Wird der bei dieser Substitution anzuwendende Multiplicator mit μ' bezeichnet, so ist auch

$$\mu'^2 = n.\frac{\lambda\lambda'^2}{k.k'^2}.\frac{\partial k}{\partial\lambda}.$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt, so erhält man $\mu^2.\mu'^2 = n^2$, oder auch

$$2. \quad \mu.\mu' = n.$$

Wir fanden wirklich bei den Substitutionen dritten Grades $\mu.\mu = 3$, und bei den Substitutionen fünften Grades die Formel $\mu.\mu' = 5$.

Zusatz. Aus den Formeln §. 292. ziehen wir noch einige bemerkenswerthe Folgerungen, indem wir das Argument u entweder $= 0$ oder auch $u = K$ setzen.

Die Formel (1.) daselbst giebt, wenn $u=K$ gesetzt wird, also auch $v=L$:

$$1.\quad \frac{\lambda\mu}{k} = 1+2\,\mathrm{snc}\,2\omega+2\,\mathrm{snc}\,4\omega+2\,\mathrm{snc}\,6\omega\ldots.+2\,\mathrm{snc}(n-1)\omega.$$

Ferner ist

$$2.\quad \mu = 1+\frac{2}{\mathrm{snc}\,2\omega}+\frac{2}{\mathrm{snc}\,4\mu}+\frac{2}{\mathrm{snc}\,6\omega}+\ldots.+\frac{2}{\mathrm{snc}(n-1)\omega},$$

$$3.\quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda\mu}{k} = 1+2\,\mathrm{cn}\,2\omega+2\,\mathrm{cn}\,4\omega+2\,\mathrm{cn}\,6\omega+\ldots.+2\,\mathrm{cn}(n-1)\omega,$$

$$4.\quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\,\mu = 1+2\,\mathrm{dn}\,2\omega+2\,\mathrm{dn}\,4\omega+2\,\mathrm{dn}\,6\omega+\ldots.+2\,\mathrm{dn}(n-1)\omega,$$

$$5.\quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1+\frac{2}{\mathrm{dn}\,2\omega}+\frac{2}{\mathrm{dn}\,4\omega}+\frac{2}{\mathrm{dn}\,6\omega}+\ldots.+\frac{2}{\mathrm{dn}(n-1)\omega},$$

$$6.\quad \frac{\lambda'\mu}{k'} = 1+\frac{2}{\mathrm{cn}\,2\omega}+\frac{2}{\mathrm{cn}\,4\omega}+\frac{2}{\mathrm{cn}\,6\omega}+\ldots.+\frac{2}{\mathrm{cn}(n-1)\omega}.$$

§. 294.

Die umgekehrte Substitution *n*ten Grades, wenn *n* eine ungerade ganze Zahl ist.

Nach §. 290. ist $\mathrm{sn}\,v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}.\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}\{\mathrm{sn}(u+2\gamma\omega)\}$, wenn das Zeichen $\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}$ ein Product aus den n Factoren bezeichnet, welche man aus dem allgemein Factor $\mathrm{sn}(u+2\gamma\omega)$ dadurch bildet, dafs man der veränderlichen positiven ganzen Zahl γ die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots. (n-1)$ beilegt.

Vermehren wir nun das Argument u noch um

$$4\delta.\frac{a'K+b'iK'}{n},$$

so mufs, wenn die vorige Formel richtig bleiben soll, der Gleichung $v=\mu.u$ gemäfs, das Argument v vermehrt werden um

$$4\mu\delta.\left(\frac{a'K+b'iK'}{n}\right) = 4\delta.\left(\frac{a'L+nb'iL'}{n}\right) = 4\delta.\left(\frac{a'}{n}L+b'iL'\right)$$
$$= \frac{4\delta a'}{n}L+4\delta b'iL'.$$

Da aber δ und b' ganze Zahlen sind, so ist wegen der Beziehung auf den Modul λ,

$$\mathrm{sn}\left(v+\frac{4\delta a'}{n}L+4\delta b'iL'\right) = \mathrm{sn}\left(v+\frac{4\delta a'}{n}L\right) \text{ und also}$$

$$\mathrm{sn}\left(v+\frac{4\delta a'}{n}L\right) = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}.\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}\left\{\mathrm{sn}\left(u+\frac{4(a\gamma+a'\delta)K+4(b\gamma+b'\delta)iK'}{n}\right)\right\},$$

wenn in dieser Formel nur γ als veränderliche positive ganze Zahl betrachtet wird.

Setzen wir nun $a\gamma+a'\delta=\alpha$ und $b\gamma+b'\delta=\beta$, woraus rückwärts folgt

$$\delta=\frac{a\beta-b\alpha}{ab'-ba'} \quad \text{und} \quad \gamma=\frac{b'\alpha-a'\beta}{ab'-ba'},$$

so sieht man, daſs alle vier Zahlen α, β, γ, δ als ganze Zahlen betrachtet werden können, wenn

$$1. \quad ab'-ba'=\pm 1$$

ist. Dann aber ist

$$2. \quad \begin{cases} \delta=\pm(a\beta-b\alpha), & \gamma=\pm(b'\alpha-a'\beta), \text{ und rückwärts} \\ \alpha=a\gamma+a'\delta, & \beta=b\gamma+b'\delta. \end{cases}$$

Die Gleichung (1.) läſst sich aber immer befriedigen, wenn a und b, wie wir jetzt voraussetzen, Primzahlen zu einander sind.

Sehen wir nun auch δ als veränderlich an, indem wir ihm der Reihe nach die Werthe $\delta=0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ beilegen, so bekommen α und β der Reihe nach dieselben, auf alle mögliche Arten mit einander zu verbindenden Werthe, und es ist also

$$\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}\left\{\mathrm{sn}\left(v+\frac{4\delta a'}{n}L\right)\right\}=\sqrt{\left(\frac{k^{nn}}{\lambda^n}\right)}\cdot\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}\left\{\mathrm{sn}\left(u+\frac{4\alpha K+4\beta iK'}{n}\right)\right\}.$$

Statt in dem Ausdrucke auf der rechten Seite die eben genannten Werthe von α und β zu verbinden, kann man auch die Werthe $\alpha=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\ldots \pm\frac{1}{2}(n-1)$ mit $\beta=0; \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm\frac{1}{2}(n-1)$ verbinden. Berücksichtigt man auſserdem die Formel (1.) §. 160., so hat man endlich

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mathrm{sn}(nu)=\sqrt{\left(\frac{\lambda^n}{k}\right)}.\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\left(v+\frac{4a'L}{n}\right)\mathrm{sn}\left(v+\frac{8a'L}{n}\right)\ldots$$
$$\ldots\mathrm{sn}\left(v+\frac{4(n-1)a'}{n}L\right).$$

Setzt man nun

$$\varpi=\frac{2a'L}{n}$$

und vergleicht die gefundene Formel mit der Formel für $\mathrm{sn}\,v$ §. 290., so sehen wir einen hohen Grad der Uebereinstimmung, welcher es möglich macht, aus den Formeln §. 290. überhaupt auf die umgekehrten Formeln zu schlieſsen. Man muſs in den dortigen Formeln λ statt k, λ' statt k', k statt λ, k' statt λ', a' statt a, a statt b, also ϖ statt ω, v statt u und nu statt v setzen; dann verwandeln sie sich dadurch in die umgekehrten Formeln, wenn man auſserdem $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\mathrm{sn}(nu)$ statt $\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}(nu)$ statt $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}(nu)$ statt $\mathrm{dn}\,v$ und $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\mathrm{tn}(nu)$ statt $\mathrm{tn}\,v$ setzt. Zu demselben Resultate führt auch die Betrachtung der übrigen Modularfunctionen; nur tritt in Beziehung auf

den Multiplicator μ' bei dieser neuen Substitution ein bemerkenswerther Umstand ein, nämlich, dafs, wenn man v als das gegebene und nu als das daraus hergeleitete Argument ansieht, und also $nu = \mu'.v$ setzt, nicht μ', sondern $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu'$ aus dem Multiplicator μ durch die angegebene Uebertragung wird. Aus diesem Grunde verwandelt sich sn$v$ in $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mathrm{sn}(nu)$, tn$v$ in $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mathrm{tn}(nu)$, aber cn$v$ in cn(nu) und dn$v$ in dn(nu). Werden die Gleichungen

$$nu = \mu'.v \quad \text{und} \quad v = \mu.u$$

mit einander verbunden, so erhält man

$$\mu.\mu' = n;$$

wie schon in §. 293. auf einem andern Wege gefunden worden ist. Hiernach können nun nicht blofs aus den Formeln §. 290., sondern auch aus denen §. 291. und 292. ebensoviele neue Formeln auf die einfachste Weise hergeleitet werden, und es müssen diese neuen Formeln als die Umkehrungen der früheren angesehen werden.

Ein bemerkenswerther besonderer Fall ist der, wenn man in dem Ausdrucke

$$\omega = \frac{2aK + 2biK'}{n}$$

$a = 0$ und $b = 1$ setzt; dann reducirt sich die Gleichung (1.) auf $-ba' = -1$ oder $a' = 1$. Die beiden Substitutionen $n$ten Grades heifsen *einfache* Substitutionen dieses Grades, und es wird der Mühe werth sein, die sich darauf beziehenden Formeln in einiger Vollständigkeit aufzustellen.

§. 295.

Die erste einfache Substitution $n$tes Grades für ein ungerades n.

Es seien K, K', L, L' wieder die zu den Modulu k, k', λ, λ' gehörigen Modularquadranten. Ferner sei zur Abkürzung

$$1. \quad \alpha = \frac{K'}{n};$$

alsdann ist in den Formeln §. 290 — 293. $\omega = 2\alpha i$ zu setzen. Hiernach erhalten wir in imaginären Formen:

$$\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{\mathrm{sn}\,2\alpha i.\mathrm{sn}\,4\alpha i.\mathrm{sn}\,6\alpha i\ldots.\mathrm{sn}(n-1)\alpha i}{\mathrm{snc}\,2\alpha i.\mathrm{snc}\,4\alpha i.\mathrm{snc}\,6\alpha i\ldots.\mathrm{snc}(n-1)\alpha i}\right)^2,$$

$$\lambda = k^n(\mathrm{snc}\,2\alpha i.\mathrm{snc}\,4\alpha i.\mathrm{snc}\,6\alpha i\ldots.\mathrm{snc}(n-1)\alpha i)^4,$$

$$\lambda' = \frac{k'^n}{(\mathrm{dn}\,2\alpha i.\mathrm{dn}\,4\alpha i.\mathrm{dn}\,6\alpha i\ldots.\mathrm{dn}(n-1)\alpha i)^4},$$

$$\mu = 1 + \frac{2}{\mathrm{snc}\,4ai} + \frac{2}{\mathrm{snc}\,8ai} + \frac{2}{\mathrm{snc}\,12ai} \dots + \frac{2}{\mathrm{snc}\,2(n-1)ai},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\mu = 1 + 2\,\mathrm{dn}\,4ai + 2\,\mathrm{dn}\,8ai + 2\,\mathrm{dn}\,12ai \dots + 2\,\mathrm{dn}\,2(n-1)ai,$$

$$\frac{\lambda\mu}{k} = 1\,\mathrm{snc}\,4ai + 2\,\mathrm{snc}\,8ai + 2\,\mathrm{snc}\,12ai \dots + 2\,\mathrm{snc}\,2(n-1)ai,$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda\mu}{k} = 1 + 2\,\mathrm{cn}\,4ai + 2\,\mathrm{cn}\,8ai + 2\,\mathrm{cn}\,12ai \dots + 2\,\mathrm{cn}\,2(n-1)ai,$$

$$\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + \frac{2}{\mathrm{cn}\,4ai} + \frac{2}{\mathrm{cn}\,8ai} + \frac{2}{\mathrm{cn}\,12ai} \dots + \frac{2}{\mathrm{cn}\,2(n-1)ai},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + \frac{2}{\mathrm{dn}\,4ai} + \frac{2}{\mathrm{dn}\,8ai} + \frac{2}{\mathrm{dn}\,12ai} \dots + \frac{2}{\mathrm{dn}\,2(n-1)ai}.$$

Läfst man die imaginäre Form fallen, so erhält man in reeller Form die Formeln

$$2.\quad \mu = \left(\frac{\mathrm{sn}'2a.\ \mathrm{sn}'4a.\ \mathrm{sn}'6a \dots \mathrm{sn}'(n-1)a}{\mathrm{snc}'2a.\mathrm{snc}'4a.\mathrm{snc}'6a \dots \mathrm{snc}'(n-1)a}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{sn}'2a\,\mathrm{sn}'4a\,\mathrm{sn}'6a \dots \mathrm{sn}'(n-1)a}{\mathrm{sn}'a\ \mathrm{sn}'3a\,\mathrm{sn}'5a \dots \mathrm{sn}'(n-1)a}\right)^2,$$

$$3.\quad \lambda = \frac{k^n}{(\mathrm{dn}'2a.\mathrm{dn}'4a.\mathrm{dn}'6a \dots \mathrm{dn}'(n-1)a))^4},$$

$$4.\quad \lambda'^n = k'(\mathrm{snc}'2a\,\mathrm{snc}'4a\,\mathrm{snc}'6a \dots \mathrm{snc}'(n-1)a)^4$$
$$= k'^n(\mathrm{sn}'a\,\mathrm{sn}'3a\,\mathrm{sn}'5a \dots \mathrm{sn}'(n-2)a)^4;$$

$$\mu = 1 + 2\,\mathrm{dn}'4a + 2\,\mathrm{dn}'8a + 2\,\mathrm{dn}'12a \dots + 2\,\mathrm{dn}'2(n-1)a,$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu = 1 + \frac{2}{\mathrm{snc}'4a} + \frac{2}{\mathrm{snc}'8a} + \frac{2}{\mathrm{snc}'12a} \dots + \frac{2}{\mathrm{snc}'2(n-1)a},$$

$$\frac{\lambda\mu}{k} = 1 + \frac{2}{\mathrm{dn}'4a} + \frac{2}{\mathrm{dn}'8a} + \frac{2}{\mathrm{dn}'12a} \dots + \frac{2}{\mathrm{dn}'2(n-1)a},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda\mu}{k} = 1 + \frac{2}{\mathrm{cn}'4a} + \frac{2}{\mathrm{cn}'8a} + \frac{2}{\mathrm{cn}'12a} \dots + \frac{2}{\mathrm{cn}'2(n-1)a},$$

$$\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + 2\,\mathrm{cn}'4a + 2\,\mathrm{cn}'8a + 2\,\mathrm{cn}'12a \dots + 2\,\mathrm{cn}'2(n-1)a,$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + 2\,\mathrm{snc}'4a + 2\,\mathrm{snc}'8a + 2\,\mathrm{snc}'12a \dots + 2\,\mathrm{snc}'2(n-1)a.$$

Der Formel (2.) gemäfs ist $\mu > 1$, und der Formel (4.) gemäfs $\lambda' < k'^n$; um so mehr ist $\lambda' < k'$ und also $\lambda > k$.

Die sechs letzten Formeln lassen sich noch einfacher darstellen. Es ist $\mathrm{sn}'(2K'-u) = \mathrm{sn}'u$, $\mathrm{cn}'(2K'-u) = -\mathrm{cn}'u$, und $\mathrm{dn}'(2K'-u) = \mathrm{dn}'u$. Da nun $2na = 2K'$ ist, so haben wir

$$\mathrm{sn}'(2(n-\alpha)a) = +\mathrm{sn}'2\alpha a \text{ und } \mathrm{snc}'(2(n-\alpha)a) = -\mathrm{snc}'2\alpha a = -\mathrm{sn}'(n-2\alpha)a,$$
$$\mathrm{cn}'(2(n-\alpha)a) = -\mathrm{cn}'2\alpha a \quad - \quad \mathrm{cnc}'(2(n-\alpha)a) = +\mathrm{cnc}'2\alpha a = +\mathrm{cn}'(n-2\alpha)a,$$
$$\mathrm{dn}'(2(n-\alpha)a) = +\mathrm{dn}'2\alpha a \quad - \quad \mathrm{dnc}'(2(n-\alpha)a) = +\mathrm{dnc}'2\alpha a = +\mathrm{dn}'(n-2\alpha)a.$$

Benutzen wir diese Formeln und setzen aufserdem zur Abkürzung

$$\nu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$

so verwandeln sich die erwähnten sechs Formeln in

$$5. \quad \mu = 1+2\,\mathrm{dn}'2a+2\,\mathrm{dn}'4a+2\,\mathrm{dn}'6a+\ldots+2\,\mathrm{dn}'(n-1)a,$$

$$6. \quad \mu = \frac{2}{\mathrm{sn}'a}-\frac{2}{\mathrm{sn}'3a}+\frac{2}{\mathrm{sn}'5a}-\frac{2}{\mathrm{sn}'7a}\ldots+\frac{-2\nu}{\mathrm{sn}'(n-2)a}+\nu,$$

$$7. \quad \frac{\lambda\mu}{k} = 1+\frac{2}{\mathrm{dn}'2a}+\frac{2}{\mathrm{dn}'4a}+\frac{2}{\mathrm{dn}'6a}\ldots+\frac{2}{\mathrm{dn}'(n-1)a},$$

$$8. \quad \frac{\lambda\mu}{k} = \frac{2}{\mathrm{snc}'a}-\frac{2}{\mathrm{snc}'3a}+\frac{2}{\mathrm{cnc}'5a}\ldots+\frac{-2\nu}{\mathrm{cnc}'(n-2)a}+\nu,$$

$$9. \quad \frac{\lambda'\mu}{k'} = 1-2\,\mathrm{cn}'2a+2\,\mathrm{cn}'4a-2\,\mathrm{cn}'6a\ldots+2\nu\,\mathrm{cn}'(n-1)a,$$

$$10. \quad \frac{\lambda'\mu}{k} = 2\,\mathrm{sn}'a-2\,\mathrm{sn}'3a+2\,\mathrm{sn}'5a\ldots-2\nu\,\mathrm{sn}'(n-2)a+\nu.$$

Die Ausdrücke der Modularquadranten sind, wie vorher,

$$L = \mu.K, \quad L' = \frac{\mu}{n}K', \text{ also}$$

$$11. \quad \frac{L}{L'} = n.\frac{K}{K'}.$$

Nehmen wir ferner ein Argument $v = \mu.u$ und beziehen alle Modularfunctionen dieses Arguments auf den Modul λ, alle übrigen Modularfunctionen hingegen auf den kleineren Modul k, und also auf den Modul k', wenn der conjugirte zu nehmen ist, so haben wir in imaginären Formen:

$$12. \begin{cases} \mathrm{sn}\,v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}.\,\mathrm{sn}\,u\left(\frac{\mathrm{sn}(u+2ai).\mathrm{sn}(u+4ai)\ldots\mathrm{sn}(u+(n-1)ai)}{\mathrm{sn}(u-2ai).\mathrm{sn}(u-4ai)\ldots\mathrm{sn}(u-(n-1)ai)}\right), \\ \mathrm{cn}\,v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}.\mathrm{cn}\,u.\left(\frac{\mathrm{cn}(u+2ai).\mathrm{cn}(u+4ai)\ldots\mathrm{cn}(u+(n-1)ai)}{\mathrm{cn}(u-2ai).\mathrm{cn}(u-4ai)\ldots\mathrm{cn}(u-(n-1)ai)}\right), \\ \mathrm{dn}\,v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}.\,\mathrm{dn}\,u.\left(\frac{\mathrm{dn}(u+2ai).\mathrm{dn}(u+4ai)\ldots\mathrm{dn}(u+(n-1)ai)}{\mathrm{dn}(u-2ai).\mathrm{dn}(u-4ai)\ldots\mathrm{dn}(u-(n-1)ai)}\right), \\ \mathrm{tn}\,v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda'}\right)}.\,\mathrm{tn}\,u.\left(\frac{\mathrm{tn}(u+2ai).\mathrm{tn}(u+4ai)\ldots\mathrm{tn}(u+(n-1)ai)}{\mathrm{tn}(u-2ai).\mathrm{tn}(u-4ai)\ldots\mathrm{tn}(u-(n-1)ai)}\right). \end{cases}$$

Da

$$\mathrm{sn}(a+bi)\,\mathrm{sn}(a-bi) = \frac{\mathrm{sn}^2 a+\mathrm{tn}'^2 b}{1+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{tn}'^2 b},$$

$$\mathrm{cn}(a+bi)\,\mathrm{cn}(a-bi) = \frac{\mathrm{cn}^2 a+\frac{k'^2}{k^2}\,\mathrm{cnc}'^2 b}{1-\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cnc}'^2 b},$$

$$\mathrm{dn}(a+bi)\,\mathrm{dn}(a-bi) = \frac{\mathrm{dn}^2 a-k'^2\,\mathrm{sn}'^2 b}{1-\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}'^2 b} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{tn}(a+bi)\,\mathrm{tn}(a-bi) = \frac{\mathrm{tn}^2 a+\mathrm{sn}'^2 b}{1+k'^2\,\mathrm{tn}^2 a\,\mathrm{sn}'^2 b}$$

ist, so haben wir in reeller Form

$$13.\begin{cases} \mathrm{sn}\, v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}\mathrm{sn}\, u \cdot \frac{(\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{tn}'^2 2a)(\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{tn}'^2 4a)\ldots(\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{tn}'^2 (n-1)a)}{(1+k^2\mathrm{tn}'^2 2a\,\mathrm{sn}^2 u)(1+k^2\mathrm{tn}'^2 4a\,\mathrm{sn}^2 u)\ldots(1+k^2\mathrm{tn}'^2(n-1)a\,\mathrm{sn}^2 u)}, \\ \mathrm{cn}\, v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}\mathrm{cn}\, u \cdot \frac{\left(\mathrm{cn}^2 u + \frac{k'^2}{k^2}\mathrm{cn}'^2 a\right)\left(\mathrm{cn}^2 u + \frac{k'^2}{k^2}\mathrm{cn}'^2 3a\right)\ldots\left(\mathrm{cn}^2 u + \frac{k'^2}{k^2}\mathrm{cn}'^2(n-2)a\right)}{(1-\mathrm{cn}'^2 a\,\mathrm{cn}^2 u)(1-\mathrm{cn}'^2 3a\,.\,\mathrm{cn}^2 u)\ldots(1-\mathrm{cn}'^2(n-2)a\,\mathrm{cn}\, u)}, \\ \mathrm{dn}\, v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}\mathrm{dn}\, u \cdot \frac{(\mathrm{dn}^2 u - k'^2\mathrm{sn}'^2 2a)(\mathrm{dn}^2 u - k'^2\mathrm{sn}'^2 4a)\ldots(\mathrm{dn}^2 u - k'^2\mathrm{sn}'^2(n-1)a)}{(1-\mathrm{sn}'^2 2a\,\mathrm{dn}^2 u)(1-\mathrm{sn}'^2 4a\,\mathrm{dn}^2 u)\ldots(1-\mathrm{sn}'^2(n-1)a\,\mathrm{dn}^2 u)}, \\ \mathrm{tn}\, v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda}\right)}\mathrm{tn}\, u \cdot \frac{(\mathrm{tn}^2 u + \mathrm{sn}'^2 2a)(\mathrm{tn}^2 u + \mathrm{sn}'^2 4a)\ldots(\mathrm{tn}^2 u + \mathrm{sn}'^2(n-1)a)}{(1+k'^2\mathrm{sn}'^2 2a\,\mathrm{tn}^2 u)(1+k'^2\mathrm{sn}'^2 4a\,\mathrm{tn}^2 u)\ldots(1+k'^2\mathrm{sn}'^2(n-1)a\,\mathrm{tn}^2 u)}. \end{cases}$$

Weiter haben wir in imaginärer Form die Formel

$$1-\mathrm{sn}\, v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1-\mathrm{sn}\, u).\left(\frac{(1-\mathrm{sn}(u+4ai))(1-\mathrm{sn}(u+8ai))\ldots(1-\mathrm{sn}(u+2(n-1)ai))}{(1-\mathrm{sn}(u-4ai))(1-\mathrm{sn}(u-8ai))\ldots(1-\mathrm{sn}(u-2(n-1)ai))}\right).$$

Da aber $\mathrm{sn}(u\pm 2iK') = \mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}(u\pm 2iK') = -\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}(u\pm 2iK') = -\mathrm{dn}\, u$, $\mathrm{tn}(u\pm 2iK') = -\mathrm{tn}\, u$, also auch

$$\mathrm{sn}(u+2(n-\alpha)ai) = \mathrm{sn}(u-2\alpha ai),\quad \mathrm{cn}(u+2(n-\alpha)ai) = -\mathrm{cn}(u-2\alpha ai),$$
$$\mathrm{dn}(u+2(n-\alpha)ai) = -\mathrm{dn}(u-2\alpha ai),$$
$$\mathrm{sn}(u-2(n-\alpha)ai) = \mathrm{sn}(u+2\alpha ai),\quad \mathrm{cn}(u-2(n-\alpha)ai) = -\mathrm{cn}(u+2\alpha ai),$$
$$\mathrm{dn}(u-2(n-\alpha)ai) = -\mathrm{dn}(u+2\alpha ai),$$

und endlich

$$\mathrm{tn}(u+2(n-\alpha)ai) = -\mathrm{tn}(u-2\alpha ai) \text{ und } \mathrm{tn}(u-2(n-\alpha)ai) = -\mathrm{tn}(u+2\alpha ai)$$

ist, so läfst sich die vorige Formel also darstellen:

$$14.\quad 1-\mathrm{sn}\, v =$$
$$\sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1-\mathrm{sn}\, u).\left(\frac{(1-\mathrm{sn}(u+2ai))(1-\mathrm{sn}(u+4ai))\ldots(1-\mathrm{sn}(u+(n-1)ai))}{(1-\mathrm{sn}(u-2ai))(1-\mathrm{sn}(u-4ai))\ldots(1-\mathrm{sn}(u-(n-1)ai))}\right).$$

Ebenso ist

$$15.\quad 1+\mathrm{sn}\, v =$$
$$\sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1+\mathrm{sn}\, u).\left(\frac{(1+\mathrm{sn}(u+2ai))(1+\mathrm{sn}(u+4ai))\ldots(1+\mathrm{sn}(u+(n-1)ai))}{(1+\mathrm{sn}(u-2ai))(1+\mathrm{sn}(u-4ai))\ldots(1+\mathrm{sn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

$$16.\quad 1-\lambda\,\mathrm{sn}\, v =$$
$$\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}(1-k\,\mathrm{sn}\, u).\left(\frac{(1-k\,\mathrm{sn}(u+2ai))(1-k\,\mathrm{sn}(u+4ai))\ldots(1-k\,\mathrm{sn}(u+(n-1)ai))}{(1-k\,\mathrm{sn}(u-2ai))(1-k\,\mathrm{sn}(u-4ai))\ldots(1-k\,\mathrm{sn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

$$17.\quad 1+\lambda\,\mathrm{sn}\, v =$$
$$\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}(1+k\,\mathrm{sn}\, u).\left(\frac{(1+k\,\mathrm{sn}(u+2ai))(1+k\,\mathrm{sn}(u+4ai))\ldots(1+k\,\mathrm{sn}(u+(n-1)ai))}{(1+k\,\mathrm{sn}(u-2ai))(1+k\,\mathrm{sn}(u-4ai))\ldots(1+k\,\mathrm{sn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

18. $1-\operatorname{cn} v =$

$$\sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}(1-\operatorname{cn} u).\left(\frac{(1+\operatorname{cn}(u+2ai))(1-\operatorname{cn}(u+4ai))\dots(1-\nu\operatorname{cn}(u+(n-1)ai))}{(1+\operatorname{cn}(u-2ai))(1-\operatorname{cn}(u-4ai))\dots(1-\nu\operatorname{cn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

19. $1+\operatorname{cn} v =$

$$\sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}(1+\operatorname{cn} u).\left(\frac{(1-\operatorname{cn}(u+2ai))(1+\operatorname{cn}(u+4ai))\dots(1+\nu\operatorname{cn}(u+(n-1)ai))}{(1-\operatorname{cn}(u-2ai))(1+\operatorname{cn}(u-4ai))\dots(1+\nu\operatorname{cn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

20. $1-\operatorname{dn} v =$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda}{k^n}\right)}(1-\operatorname{dn} u).\left(\frac{(1+\operatorname{dn}(u+2ai))(1-\operatorname{dn}(u+4ai))\dots(1-\nu\operatorname{dn}(u+(n-1)ai))}{(1+\operatorname{dn}(u-2ai))(1-\operatorname{dn}(u-4ai))\dots(1-\nu\operatorname{dn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

21. $1+\operatorname{dn} v =$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda}{k^n}\right)}(1+\operatorname{dn} u).\left(\frac{(1-\operatorname{dn}(u+2ai))(1+\operatorname{dn}(u+4ai))\dots(1+\nu\operatorname{dn}(u+(n-1)ai))}{(1-\operatorname{dn}(u-2ai))(1+\operatorname{dn}(u-4ai))\dots(1+\nu\operatorname{dn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

22. $$\frac{\lambda\mu}{k}\operatorname{sn} v = \operatorname{sn} u + \operatorname{sn}(u+2ai) + \operatorname{sn}(u+4ai)\dots + \operatorname{sn}(u+(n-1)ai) \\ + \operatorname{sn}(u-2ai) + \operatorname{sn}(u-4ai)\dots + \operatorname{sn}(u-(n-1)ai),$$

23. $$\frac{\mu}{\operatorname{sn} v} = \frac{1}{\operatorname{sn} u} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+2ai)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+4ai)}\dots + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+(n-1)ai)} \\ + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-2ai)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-4ai)}\dots + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-(n-1)ai)},$$

24. $$\frac{\lambda'\mu}{k'}.\frac{1}{\operatorname{cn} v} = \frac{1}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{\operatorname{cn}(u+2ai)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u+4ai)} - + \dots + \frac{\nu}{\operatorname{cn}(u+(n-1)ai)} \\ - \frac{1}{\operatorname{cn}(u+2ai)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-4ai)} - + \dots + \frac{\nu}{\operatorname{cn}(u-(n-1)ai)},$$

25. $$\nu.\frac{\lambda\mu}{k}\operatorname{cn} v = \operatorname{cn} u - \operatorname{cn}(u+2ai) + \operatorname{cn}(u+4ai) - + \dots + \nu\operatorname{cn}(u+(n-1)ai) \\ - \operatorname{cn}(u-2ai) + \operatorname{cn}(u-4ai) - + \dots + \nu\operatorname{cn}(u-(n-1)ai),$$

26. $$\nu.\mu\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u - \operatorname{dn}(u+2ai) + \operatorname{dn}(u+4ai) - + \dots + \nu.\operatorname{dn}(u+(n-1)ai) \\ - \operatorname{dn}(u-2ai) + \operatorname{dn}(u+4ai) - + \dots + \nu.\operatorname{dn}(u-(n-1)ai),$$

27. $$\frac{\lambda'\mu}{k'}\operatorname{tn} v = \operatorname{tn} u - \operatorname{tn}(u+2ai) + \operatorname{tn}(u+4ai) - + \dots + \nu\operatorname{tn}(u+(n-1)ai) \\ - \operatorname{tn}(u-2ai) + \operatorname{tn}(u-4ai) - + \dots + \nu\operatorname{tn}(u-(n-1)ai),$$

28. $$\left(\frac{\lambda\mu}{k}\right)^2\operatorname{sn}^2 v = \left.\begin{array}{l}\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2(u+2ai) + \operatorname{sn}^2(u+4ai)\dots + \operatorname{sn}^2(u+(n-1)ai) \\ + \operatorname{sn}^2(u-2ai) + \operatorname{sn}^2(u-4ai)\dots + \operatorname{sn}^2(u-(n-1)ai)\end{array}\right\} + 2t'$$

für $t' = \operatorname{tn}'^2 2a + \operatorname{tn}'^2 4a + \operatorname{tn}'^2 6a \dots + \operatorname{tn}'^2(n-1)a.$

Dividirt man (15.) durch (14.) und nimmt auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so hat man

$$29. \quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,v =$$
$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(u+2ai) + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(u+4ai) + \ldots + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(u+(n-1)ai)$$
$$+ \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(u-2ai) + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(u-4ai) + \ldots + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(u-(n-1)ai),$$

oder auch

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,v = \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u + 2\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(\mathrm{dn}'2a\,\mathrm{sn}\,u) + 2\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(\mathrm{dn}'4a\,\mathrm{sn}\,u)\ldots$$
$$\ldots + 2\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(\mathrm{dn}'(n-1)a.\mathrm{sn}\,u).$$

Multiplicirt man die Gleichung (24.) mit $\frac{\partial v}{\mu} = \partial u$ und integrirt dieselbe, so erhält man

$$30. \quad \nu.\mathrm{am}\,v =$$
$$\mathrm{am}\,u - \mathrm{am}(u+2ai) + \mathrm{am}(u+4ai) - \mathrm{am}(u+6ai)\ldots + \nu\,\mathrm{am}(u+(n-1)ai)$$
$$- \mathrm{am}(u-2ai) + \mathrm{am}(u-4ai) - \mathrm{am}(u-6ai)\ldots + \nu\,\mathrm{am}(u-(n-1)ai)$$

oder

$$\nu.\mathrm{am}\,v = \mathrm{am}\,u - 2\,\mathrm{arc\,tng}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'2a}\right) + 2\,\mathrm{arc\,tng}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'4a}\right) - 2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'6a}\right)\ldots$$
$$\ldots + 2\nu\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'(n-1)a}\right)$$

oder auch

$$\mathrm{am}\,v = 2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a}\right) - 2\,\mathrm{arc\,tng}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'3a}\right) + 2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'5a}\right) -+ \ldots$$
$$\ldots - 2\nu\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'(n-2)a}\right) + \nu\,\mathrm{am}\,u.$$

Es bedarf der Erinnerung nicht, dafs auch die Formeln (14. bis 28.) leicht in reellen Formen dargestellt werden können.

§. 296.

Die zweite einfache und umgekehrte Substitution $n$ten Grades für ein ungerades n.

So wie durch die Formeln §. 295. die Modularfunctionen des Argumentes v mit dem Modul λ auf Modularfunctionen des Argumentes u mit dem kleineren Modul k zurückgeführt werden, so lassen sich umgekehrt, ohne das Verhältnifs $v = \mu.u$ zu ändern, die auf den Modul k bezogenen Modularfunctionen des Arguments nu durch Modularfunctionen von v mit dem Modul λ ausdrücken.

Setzen wir zur Abkürzung

$$1. \quad b = \frac{L}{n},$$

so haben wir, wenn wir auch alle Modularfunctionen der Vielfachen von b auf den Modul λ beziehen, nach §. 294. auf der Stelle die Formeln

$$2. \quad \mu' = \frac{n}{\mu} = \left(\frac{\operatorname{sn}2b\operatorname{sn}4b\operatorname{sn}6b\ldots\operatorname{sn}(n-1)b}{\operatorname{sn}b\operatorname{sn}3b\operatorname{sn}5b\ldots\operatorname{sn}(n-2)b}\right)^2,$$

$$3. \quad k = \lambda^n(\operatorname{sn}b\operatorname{sn}3b\operatorname{sn}5b\ldots\operatorname{sn}(n-2)b)^4,$$

$$4. \quad k' = \frac{\lambda'^n}{(\operatorname{dn}2b\operatorname{dn}4b\operatorname{dn}6b\ldots\operatorname{dn}(n-1)b)^4}.$$

Werden diese Formeln mit den Formeln (1. bis 4.) §. 295. verglichen, so sieht man, dafs noch eine andere Uebertragung möglich ist, wobei man λ mit k', λ' mit k, also a mit b und μ mit μ' vertauscht. Hiernach verwandeln sich die Formeln (5. bis 11.) §. 295., wenn wieder $\nu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ gesetzt wird, in

$$5. \quad \mu' = 1 + 2\operatorname{dn}2b + 2\operatorname{dn}4b + 2\operatorname{dn}6b \ldots + 2\operatorname{dn}(n-1)b,$$

$$6. \quad \mu' = \frac{2}{\operatorname{sn}b} - \frac{2}{\operatorname{sn}3b} + \frac{2}{\operatorname{sn}5b} - + \ldots - \frac{2\nu}{\operatorname{sn}(n-2)b} + \nu,$$

$$7. \quad \frac{k'\mu'}{\lambda'} = 1 + \frac{2}{\operatorname{dn}2b} + \frac{2}{\operatorname{dn}4b} + \frac{2}{\operatorname{dn}6b} + \ldots + \frac{2}{\operatorname{dn}(n-1)b},$$

$$8. \quad \frac{k'\mu}{\lambda'} = \frac{2}{\operatorname{cnc}b} - \frac{2}{\operatorname{cnc}3b} + \frac{2}{\operatorname{cnc}5b} - + \ldots - \frac{2\nu}{\operatorname{cnc}(n-2)b} + \nu,$$

$$9. \quad \frac{k\mu'}{\lambda} = 1 - 2\operatorname{cn}2b + 2\operatorname{cn}4b - 2\operatorname{cn}6b + - \ldots + 2\nu\operatorname{cn}(n-1)b,$$

$$10. \quad \frac{k\mu'}{\lambda} = 2\operatorname{sn}b - 2\operatorname{sn}3b + 2\operatorname{sn}5b - + \ldots - 2\nu\operatorname{sn}(n-2)b + \nu,$$

$$11. \quad K' = \mu'.L', \quad K = \frac{\mu'}{n}.L, \quad \frac{K'}{K} = n.\frac{L'}{L}.$$

Aufserdem haben wir

$$12. \quad \operatorname{sn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{\lambda^n}{k}\right)}.\operatorname{sn}v.\left(\frac{\operatorname{sn}(2b+v).(\operatorname{sn}(4b+v)\ldots\operatorname{sn}((n-1)b+v)}{\operatorname{sn}(2b-v).(\operatorname{sn}(4b-v)\ldots\operatorname{sn}((n-1)b-v)}\right),$$

$$13. \quad \operatorname{cn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{k'\lambda^n}{k\lambda'^n}\right)}.\operatorname{cn}v.\left(\frac{\operatorname{cn}(2b+v).\operatorname{cn}(4b+v)\ldots\operatorname{cn}((n-1)b+v)}{\operatorname{cn}(2b-v).\operatorname{cn}(4b-v)\ldots\operatorname{cn}((n-1)b-v)}\right),$$

$$14. \quad \operatorname{dn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{k}{\lambda'^n}\right)}.\operatorname{dn}v.\left(\frac{\operatorname{dn}(2b+v).\operatorname{dn}(4b+v)\ldots\operatorname{dn}((n-1)b+v)}{\operatorname{dn}(2b-v).\operatorname{dn}(4b-v)\ldots\operatorname{dn}((n-1)b-v)}\right),$$

$$15. \quad \operatorname{tn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{\lambda'^n}{k'}\right)}.\operatorname{tn}v.\left(\frac{\operatorname{tn}(2b+v).\operatorname{tn}(4b+v)\ldots\operatorname{tn}((n-1)b+v)}{\operatorname{tn}(2b-v).\operatorname{tn}(4b-v)\ldots\operatorname{tn}((n-1)b+v)}\right).$$

Statt der Formeln (14. bis 19.) §. 295. haben wir nun

$$16. \quad 1-\nu.\operatorname{sn}(nu) =$$
$$\sqrt{\left(\frac{k'\lambda^n}{k\lambda'^n}\right)}.(1-\operatorname{sn}v).\left(\frac{(1+\operatorname{sn}(v+2b))(1-\operatorname{sn}(v+4b))\ldots(1-\nu\operatorname{sn}(v+(n-1)b))}{(1+\operatorname{sn}(v-2b))(1-\operatorname{sn}(v-4b))\ldots(1-\nu\operatorname{sn}(v-(n-1)b))}\right),$$

$$17. \quad 1+\nu.\operatorname{sn}(nu) =$$
$$\sqrt{\left(\frac{k'\lambda^n}{k\lambda'^n}\right)}.(1+\operatorname{sn}v).\left(\frac{(1-\operatorname{sn}(v+2b))(1+\operatorname{sn}(v+4b))\ldots(1+\nu\operatorname{sn}(v+(n-1)b))}{(1-\operatorname{sn}(v-2b))(1+\operatorname{sn}(v-4b))\ldots(1+\nu\operatorname{sn}(v-(n-1)b))}\right),$$

18. $1-\mathrm{cn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda^n}{k}\right)}.(1-\mathrm{cn}\,v).\left(\frac{(1+\mathrm{cn}(v+2b))(1-\mathrm{cn}(v+4b))\ldots.(1-\nu\,\mathrm{cn}(v+(n-1)b))}{(1+\mathrm{cn}(v-2b))(1-\mathrm{cn}(v-4b))\ldots.(1-\nu\,\mathrm{cn}(v-(n-1)b))}\right),$$

19. $1+\mathrm{cn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda^n}{k}\right)}.(1+\mathrm{cn}\,v).\left(\frac{(1-\mathrm{cn}(v+2b))(1+\mathrm{cn}(v+4b))\ldots.(1+\nu\,\mathrm{cn}(v+(n-1)b))}{(1-\mathrm{cn}(v-2b))(1+\mathrm{cn}(v-4b))\ldots.(1+\nu\,\mathrm{cn}(v-(n-1)b))}\right),$$

20. $1-\mathrm{dn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{k}{\lambda^n}\right)}.(1-\mathrm{dn}\,v).\left(\frac{(1-\mathrm{dn}(v+2b))(1-\mathrm{dn}(v+4b))\ldots.(1-\mathrm{dn}(v+(n-1)b))}{(1-\mathrm{dn}(v-2b))(1-\mathrm{dn}(v-4b))\ldots.(1-\mathrm{dn}(v-(n-1)b))}\right),$$

21. $1+\mathrm{dn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{k}{\lambda^n}\right)}.(1+\mathrm{dn}\,v).\left(\frac{(1+\mathrm{dn}(v+2b))(1+\mathrm{dn}(v+4b))\ldots.(1+\mathrm{dn}(v+(n-1)b))}{(1+\mathrm{dn}(v-2b))(1+\mathrm{dn}(v-4b))\ldots.(1+\mathrm{dn}(v-(n-1)b))}\right),$$

22. $1-\nu k\,\mathrm{sn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{k'}{\lambda'^n}\right)}.(1-\lambda\,\mathrm{sn}\,v).\left(\frac{(1+\lambda\,\mathrm{sn}(v+2b))(1-\lambda\,\mathrm{sn}(v+4b))\ldots.(1-\nu\lambda\,\mathrm{sn}(v+(n-1)b))}{(1+\lambda\,\mathrm{sn}(v-2b))(1-\lambda\,\mathrm{sn}(v-4b))\ldots.(1-\nu\lambda\,\mathrm{sn}(v-(n-1)b))}\right),$$

23. $1+\nu k\,\mathrm{sn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{k'}{\lambda'^n}\right)}.(1+\lambda\,\mathrm{sn}\,v).\left(\frac{(1-\lambda\,\mathrm{sn}(v+2b))(1+\lambda\,\mathrm{sn}(v+4b))\ldots.(1+\nu\lambda\,\mathrm{sn}(v+(n-1)b))}{(1-\lambda\,\mathrm{sn}(v-2b))(1+\lambda\,\mathrm{sn}(v-4b))\ldots.(1+\nu\lambda\,\mathrm{sn}(v-(n-1)b))}\right).$$

Ferner erhalten wir noch

24. $$\frac{k\mu'}{\lambda}.\mathrm{sn}(nu) = \mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}(v+2b)+\mathrm{sn}(v+4b)-+\ldots.+\nu\,\mathrm{sn}(v+(n-1)b)$$
$$-\mathrm{sn}(v-2b)+\mathrm{sn}(v-4b)-+\ldots.+\nu\,\mathrm{sn}(v-(n-1)b),$$

25. $$\frac{\mu'}{\mathrm{sn}(nu)} = \frac{1}{\mathrm{sn}\,v}-\frac{1}{\mathrm{sn}(v+2b)}+\frac{1}{\mathrm{sn}(v+4b)}-+\ldots.+\frac{\nu}{\mathrm{sn}(v+(n-1)b)}$$
$$-\frac{1}{\mathrm{sn}(v-2b)}+\frac{1}{\mathrm{sn}(v-4b)}-+\ldots.+\frac{\nu}{\mathrm{sn}(v-(n-1)b)},$$

26. $$\frac{k'}{\lambda'}\mu'.\frac{\nu}{\mathrm{cn}(nu)} = \frac{1}{\mathrm{cn}\,v}-\frac{1}{\mathrm{cn}(v+2b)}+\frac{1}{\mathrm{cn}(v+4b)}-+\ldots.+\frac{\nu}{\mathrm{cn}(v+(n-1)b)}$$
$$-\frac{1}{\mathrm{cn}(v-2b)}+\frac{1}{\mathrm{cn}(v-4b)}-+\ldots.+\frac{\nu}{\mathrm{cn}(v-(n-1)b)},$$

27. $$\frac{k}{\lambda}\mu'.\mathrm{cn}(nu) = \mathrm{cn}\,v-\mathrm{cn}(v+2b)+\mathrm{cn}(v+4b)-+\ldots.+\nu\,\mathrm{cn}(v+(n-1)b)$$
$$-\mathrm{cn}(v-2b)+\mathrm{cn}(v-4b)-+\ldots.+\nu\,\mathrm{cn}(v-(n-1)b),$$

28. $$\frac{k'}{\lambda'}\mu'.\mathrm{tn}(nu) = \mathrm{tn}\,v+\mathrm{tn}(v+2b)+\mathrm{tn}(v+4b)+\ldots.+\mathrm{tn}(v+(n-1)b)$$
$$+\mathrm{tn}(v-2b)+\mathrm{tn}(v-4b)+\ldots.+\mathrm{tn}(v-(n-1)b),$$

29. $$\mu'.\mathrm{dn}(nu) = \mathrm{dn}\,v+\mathrm{dn}(v+2b)+\mathrm{dn}(v+4b)+\ldots.+\mathrm{dn}(v+(n-1)b)$$
$$+\mathrm{dn}(v-2b)+\mathrm{dn}(v-4b)+\ldots.+\mathrm{dn}(v-(n-1)b),$$

$$30.\quad \left(\frac{k\mu'}{\lambda}\right)^2 \operatorname{sn}^2(nu)$$
$$= \left.\begin{matrix}\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{sn}^2(v+2b) + \operatorname{sn}^2(v+4b) + \ldots + \operatorname{sn}^2(v+(n-1)b) \\ + \operatorname{sn}^2(v-2b) + \operatorname{sn}^2(v-4b) + \ldots + \operatorname{sn}^2(v-(n-1)b)\end{matrix}\right\} - 2s$$
$$\text{für}\quad s = \operatorname{sn}^2 2b + \operatorname{sn}^2 4b + \operatorname{sn}^2 6b + \ldots + \operatorname{sn}^2(n-1)b.$$

Dividirt man die Gleichung (17.) durch (16.), zieht auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, und nimmt die natürlichen Logarithmen auf beiden Seiten, so erhält man.

$$31.\quad \nu.\mathfrak{L}\operatorname{am}(nu)$$
$$= \mathfrak{L}\operatorname{am} v - \mathfrak{L}\operatorname{am}(v+2b) + \mathfrak{L}\operatorname{am}(v+4b) - + \ldots + \nu.\mathfrak{L}\operatorname{am}(v+(n-1)b)$$
$$- \mathfrak{L}\operatorname{am}(v-2b) + \mathfrak{L}\operatorname{am}(v-4b) - + \ldots + \nu.\mathfrak{L}\operatorname{am}(v-(n-1)b),$$

oder

$$\mathfrak{L}\operatorname{am}(nu) = 2\mathfrak{L}\arcsin\left(\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{sn} b}\right) - 2\mathfrak{L}\arcsin\left(\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{sn} 3b}\right) + - \ldots$$
$$\ldots - \nu.\mathfrak{L}\arcsin\left(\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{sn}(n-2)b}\right) + \nu.\mathfrak{L}\operatorname{am} v.$$

Multiplicirt man die Gleichung (29.) mit $\frac{\partial(nu)}{\mu'} = \partial v$ und integrirt sie, so erhält man

$$32.\quad \operatorname{am}(nu) = \operatorname{am} v + \operatorname{am}(v+2b) + \operatorname{am}(v+4b) + \ldots + \operatorname{am}(v+(n-1)b)$$
$$+ \operatorname{am}(v-2b) + \operatorname{am}(v-4b) + \ldots + \operatorname{am}(v-(n-1)b),$$

oder

$$\operatorname{am}(nu) = \operatorname{am} v + 2\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{dn} 2b.\operatorname{tn} u) + 2\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{dn} 4b.\operatorname{tn} u) + \ldots$$
$$\ldots + 2\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{dn}(n-1)b.\operatorname{tn} u).$$

§. 297.

Die Formeln §. 296. stehen im engsten Zusammenhange mit den Formeln §. 295. Jene drücken Functionen des Arguments nu mit dem Modul k aus durch Functionen des Arguments v mit dem gröfseren Modul λ; diese hingegen drücken die Functionen des Arguments v mit demselben Modul λ aus durch Functionen des Arguments u. *Insofern erscheinen die einen als die umgekehrten der anderen.*

Eliminirt man die Functionen des Arguments v, so erhält man Formeln, welche die Functionen des Arguments nu mit dem Modul k ausdrücken durch Functionen des Arguments u mit demselben Modul k; daher erscheint auch die eine Substitution als eine Ergänzung der andern zur Vervielfältigung des Arguments. Insofern sind die Formeln §. 295. und §. 296. als zu einem Systeme gehörig anzusehen.

Man erhält aber noch leicht ein zweites solches System von eben so vielen Formeln, wenn man statt der Grundgröfsen

$a = \frac{K'}{n}$ und $b = \frac{L}{n}$ die Grundgröfsen $a = \frac{L'}{n}$ und $b = \frac{K}{n}$ nimmt,

welches darauf hinausläuft, dafs man die Moduln k und λ nun mit λ und k bezeichnet, zugleich aber die Zeichen u und v mit einander vertauscht. Es versteht sich von selbst, dafs gleichzeitig K mit L und K' mit L' vertauscht werden müssen; die Zeichen der Multiplicatoren μ und $\mu' = \frac{n}{\mu}$ können beibehalten werden. Nehmen wir aber an, dafs u, k, k', K und K' dieselben Bedeutungen haben, wie vorhin, so haben $\lambda, \lambda', L, L', \mu, \mu'$ und v andere Bedeutungen als in den Formeln des vorigen Systems. Es ist nun

1. $u = \mu . v = \frac{n}{\mu'} . v$, wenn wieder $\mu . \mu' = n$ gesetzt wird;

2. $$\mu = \left(\frac{\operatorname{sn}\frac{2L'}{n}.\operatorname{sn}\frac{4L'}{n}.\operatorname{sn}\frac{6L'}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{n-1}{n}L'}{\operatorname{sn}\frac{L'}{n}.\operatorname{sn}\frac{3L'}{n}.\operatorname{sn}\frac{5L'}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{n-2}{n}L'}\right)^2 \text{ mit dem Modul } \lambda';$$

3. $$\mu' = \left(\frac{\operatorname{sn}\frac{2K}{n}.\operatorname{sn}\frac{4K}{n}.\operatorname{sn}\frac{6K}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{n-1}{n}K}{\operatorname{sn}\frac{K}{n}.\operatorname{sn}\frac{3K}{n}.\operatorname{sn}\frac{5K}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{n-2}{n}K}\right)^2 \text{ mit dem Modul } k;$$

4. $$k' = \lambda'^n\left(\operatorname{sn}\frac{L'}{n}.\operatorname{sn}\frac{3L'}{n}.\operatorname{sn}\frac{5L'}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{n-2}{n}L'\right)^4 \text{ mit dem Modul } \lambda';$$

5. $$k = \frac{\lambda^n}{\left(\operatorname{dn}\frac{2L'}{n}\operatorname{dn}\frac{4L'}{n}\operatorname{dn}\frac{6L'}{n}\ldots\operatorname{dn}\frac{n-1}{n}L'\right)^4} \text{ mit dem Modul } \lambda';$$

6. $$\lambda' = \frac{k'^n}{\left(\operatorname{dn}\frac{2K}{n}\operatorname{dn}\frac{4K}{n}\operatorname{dn}\frac{6K}{n}\ldots\operatorname{dn}\frac{n-1}{n}K\right)^4} \text{ mit dem Modul } k;$$

7. $$\lambda = k^n\left(\operatorname{sn}\frac{K}{2}\operatorname{sn}\frac{3K}{2}\operatorname{sn}\frac{5K}{n}\ldots\operatorname{sn}\frac{n-2}{n}K\right)^4 \text{ mit dem Modul } k.$$

Dieser letzten Gleichung gemäfs ist $\lambda < k^n$, und es nähert sich also λ desto mehr der Grenze Null, je gröfser die ganze Zahl genommen wird.

Nehmen wir die angezeigte Veränderung mit den Formeln (12.) §. 295. vor und beachten, dafs nun $K = \mu . L'$ und $K' = \frac{\mu L'}{n}$, also $\frac{L'}{n} = \frac{K'}{\mu}$ ist, so erhalten wir Formeln, welche sich leicht also darstellen lassen:

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{N}\cdot\mu \operatorname{sn}\frac{u}{\mu}\cdot\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2\frac{2iK'}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2\frac{4iK'}{\mu}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2\frac{(n-1)iK'}{\mu}}\right)\ (\text{mod. } \lambda),$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{1}{N}\cdot\operatorname{cn}\frac{u}{\mu}\cdot\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{snc}^2\frac{2iK'}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2\frac{4iK'}{\mu}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2\frac{(n-1)iK'}{\mu}}\right)\ (\text{mod. } \lambda),$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{1}{N}\cdot\operatorname{dn}\frac{u}{\mu}\cdot\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{snc}^2\frac{iK'}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{snc}^2\frac{3iK'}{\mu}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{snc}^2\frac{(n-1)iK'}{\mu}}\right)(\text{mod. } \lambda),$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$N = \left(1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\frac{2iL'}{u}\operatorname{sn}^2 v\right)\left(1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\frac{4iL'}{n}\operatorname{sn}^2 v\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\lambda^2\operatorname{sn}^2\frac{n-1}{n}iL'.\operatorname{sn}^2 v\right)\ (\text{mod. } \lambda)$$

oder

$$N = \left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^2\frac{iL'}{n}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^2\frac{3iL'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^2\frac{(n-2)iL'}{n}}\right)\ (\text{mod. } \lambda)$$

oder auch

$$N = \left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2\frac{iK'}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2\frac{3iK'}{\mu}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2\frac{(n-2)iK'}{\mu}}\right)\ (\text{mod. } \lambda).$$

Wird nun n unendlich grofs genommen, wodurch der Modul $\lambda = 0$, also $L = \frac{1}{2}\pi$ wird, so wird der Gleichung $K = \mu L$ gemäfs $\frac{1}{\mu} = \frac{\pi}{2K} = \eta$, $\operatorname{sn}\frac{u}{\mu} = \sin\eta u$, $\operatorname{cn}\frac{u}{\mu} = \cos\eta u$, $\operatorname{dn}\frac{u}{\mu} = 1$, $\operatorname{sn}\frac{\alpha iK'}{\mu} = \sin(\alpha\eta iK') = i\,\mathfrak{Sin}(\alpha\eta K')$, $\operatorname{snc}\frac{\alpha iK'}{\mu} = \operatorname{cn}\frac{\alpha iK'}{\mu} = \cos(\alpha\eta iK') = \mathfrak{Cos}(\alpha\eta K')$; daher haben wir

$$\operatorname{sn} u = \frac{\frac{1}{\eta}\cdot\sin\eta u\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 6\eta K'}\right)\cdots}{\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\cdots},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\cos\eta u\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}\right)\cdots}{\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\cdots},$$

$$\mathrm{dn}\, u = \frac{\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\right)\cdots}{\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\cdots}.$$

Diese unendlichen Producte stimmen aber mit den Formeln (6, 7, 8.) §. 166. völlig überein.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Modularfunctionen als unendliche Reihen darstellen, indem man sie auf Modularfunctionen mit dem Modul Null, d. h. auf Potenzialfunctionen zurückführt.

§. 298.

Umformung der Modular-Integrale von der ersten Art durch Substitution $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Multiplicirt man die Gleichung (28.) §. 295. mit k^2 und subtrahirt dann jede Seite von n, so erhält man

$$n-\lambda^2\mu^2\,\mathrm{sn}^2 v = n-\mu^2+\mu^2\,\mathrm{dn}^2 v =$$

$$\mathrm{dn}^2 u+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)\cdots\cdots+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{(n-1)iK'}{n}\right)-2k^2t'$$
$$+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{4iK'}{n}\right)\cdots\cdots+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{(n-1)iK'}{n}\right),$$

und hierin ist $t' = \mathrm{tn}'^2\frac{2K'}{n}+\mathrm{tn}'^2\frac{4K'}{n}+\mathrm{tn}'^2\frac{6K'}{n}+\cdots\cdots+\mathrm{tn}'^2\frac{n-1}{n}K'$.

Diese Gleichung kann noch einfacher dargestellt werden. Den Formeln (12.) §. 295. gemäfs ist $\mathrm{dn}\, v = 0$ für $\mathrm{dn}\, u = 0$. Da nun $\mathrm{dn}(K+iK') = 0$ und $\mathrm{dn}(u+K+iK') = ik'\,\mathrm{tn}\, u$ ist, so erhalten wir, wenn wir $u = K+iK'$ setzen, die Gleichung

$$n-\mu^2 = +2k'^2 s'-2k^2 t',$$

wenn wir zur Abkürzung

$$1.\quad s' = \mathrm{sn}'^2\frac{2K'}{n}+\mathrm{sn}'^2\frac{4K'}{n}+\mathrm{sn}'^2\frac{6K'}{n}\cdots\cdots+\mathrm{sn}'^2\frac{n-1}{n}K' \quad (\text{mod. } k')$$

setzen; folglich reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$\mu^2\,\mathrm{dn}^2 v =$$
$$-2k'^2 s'+\mathrm{dn}^2 u+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)\cdots\cdots+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{(n-1)iK'}{n}\right)$$
$$+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{4iK'}{n}\right)\cdots+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{(n-1)iK'}{n}\right).$$

Wird diese Gleichung mit $\frac{\partial v}{\mu} = \partial u$ multiplicirt und integrirt, so ergiebt sich

$$2.\quad \mu.\mathrm{el}\,v =$$
$$-2k'^2 s'.u+\mathrm{el}\,u+\mathrm{el}\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{el}\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)+\dots+\mathrm{el}\left(u+\frac{(n-1)iK'}{n}\right)$$
$$+\mathrm{el}\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{el}\left(u-\frac{4iK'}{n}\right)+\dots+\mathrm{el}\left(u-\frac{(n-1)iK'}{n}\right).$$

Hierdurch ist bereits die Function $\mathrm{el}\,v$ mit dem Modul λ auf Functionen mit dem kleineren Modul k zurückgeführt. Es sei $\mathrm{el}\,v=F$, wenn $v=L$ genommen wird, so wie $\mathrm{el}\,u=E$ für $u=K$. Werden die Moduln mit den conjugirten vertauscht, so verwandeln sich F in F' und E in E'. Setzen wir nun $u=K$, also $v=L$, und beachten die Formel

$$\mathrm{el}(K+u)+\mathrm{el}(K-u) = 2E,$$

so verwandelt sich die Gleichung (2.) in

$$3.\quad \mu.F = -2k'^2.s'.K+n.E.$$

Da aufserdem $v=\mu.u$ und $L=\mu.K$, also $\frac{v}{L}=\frac{u}{K}$ ist, so verwandelt sich die vorige Gleichung, wenn sie hiermit multiplicirt wird, in

$$\mu.\frac{F}{L}v = -2k'^2 s'.u+n.\frac{E}{K}.u,$$

und wird diese Gleichung von der Gleichung (2.) subtrahirt, so entsteht

$$4.\quad \mu\left(\mathrm{el}\,v-\frac{F}{L}v\right) =$$
$$-n.\frac{E}{K}u+\mathrm{el}\,u+\mathrm{el}\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{el}\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)\dots+\mathrm{el}\left(u+\frac{(n-1)iK'}{n}\right)$$
$$+\mathrm{el}\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{el}\left(u-\frac{4iK'}{n}\right)\dots+\mathrm{el}\left(u-\frac{(n-1)iK'}{n}\right).$$

Da $\mathrm{el}(a+b)+\mathrm{el}(a-b)=2\,\mathrm{el}\,a-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b(\mathrm{sn}(a+b)-\mathrm{sn}(a-b))$ ist, so kann die vorige Gleichung auch also dargestellt werden:

$$5.\quad \mu\left(\mathrm{el}\,v-\frac{F}{L}v\right)=$$
$$n\left(\mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u\right)+2k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\left(\frac{\mathrm{sn}'^2\frac{2K}{n}}{1-\mathrm{sn}'^2\frac{2K'}{n}\mathrm{dn}^2 u}+\frac{\mathrm{sn}'^2\frac{4K'}{n}}{1-\mathrm{sn}'^2\frac{4K'}{n}\mathrm{dn}^2 u}\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{\mathrm{sn}'^2\frac{n-1}{n}K'}{1-\mathrm{sn}'^2\frac{n-1}{n}K'.\mathrm{dn}^2 u}\right).$$

Wir stellen denselben Ausdruck noch auf eine andere Art dar. Es ist zunächst

$$\mu.\left(\mathrm{el}\,v-\frac{F}{L}v\right)=$$

$$n\left(\mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u\right)-2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}\,\mathrm{sn}^2u}+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}\,\mathrm{sn}^2u}\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'\,\mathrm{sn}^2u}\right).$$

Es ist aber $k\,\mathrm{sn}\frac{n-1}{n}iK'=\dfrac{1}{\mathrm{sn}\left(iK'-\frac{n-1}{n}iK'\right)}=\dfrac{1}{\mathrm{sn}\left(\frac{iK'}{n}\right)}$, u. s. w.

Hiernach haben wir

$$6.\quad \mu.\left(\mathrm{el}\,v-\frac{F}{L}v\right)=n.\left(\mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u\right)+\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}+\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}$$
$$+\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{5iK'}{n}}\dots+\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}.$$

Aus der Gleichung (2.) leiten wir eine Gleichung her, welche die conjugirten Quadranten betrifft. Multipliciren wir dieselbe mit $n\frac{L'}{\mu}=K'$, so erhalten wir zunächst

$$nL'F=-2k'^2s'.KK'+n.EK'.$$

Da aber nach *Legendre's* Satze $EK'+E'K-KK'=FL'+F'L-LL'=\frac{1}{2}\pi$, also auch

$$nFL'+nF'L-nLL'=nEK'+nE'K-nKK'$$

ist, so erhalten wir durch Subtraction

$$nL(L'-F')=(-2k'^2s'+n)KK'-nE'K,$$

und wird diese Gleichung durch $L=\mu.K$ dividirt, so entsteht

$$7.\quad \mu(L'-F')=-\frac{2k'^2s'}{n}K'+K'-E'.$$

Nach §. 290. ist für $u=iK'$ das Argument $v=niL'$, also ist auch für $u=2iK'$, $v=2niL'$.

Setzen wir nun in der Formel (2.) wirklich $u=2iK'$, also $v=2niL'$, und beachten, dafs $\mathrm{el}(2iK')=2i(K'-E')$, $\mathrm{el}(2niL')=2ni(L'-F')$, ferner $\mathrm{el}(2iK'+u)+\mathrm{el}(2iK'-u)=4i(K'-E')$ ist, so ist

$$\mu.2ni(L'-F')=-2k'^2s'.2iK'+2ni(K'-E'),$$

und wird diese Gleichung durch $2ni$ dividirt, so erhalten wir wie vorhin

$$\mu(L'-F')=-\frac{2k'^2s'}{n}.K'+K'-E'.$$

§. 299.

Wollen wir nun Formeln herleiten, welche die umgekehrten sind im Vergleiche mit denen §. 298., so müssen wir von der Formel (30.) §. 296. ausgehen. Multipliciren wir dieselbe mit λ^2 und subtrahiren sie dann von n, so erhalten wir

$$n-\mu'^2+\mu'^2\,\mathrm{dn}^2(nu) =$$
$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{dn}^2 v+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{4L}{n}\right)\ldots\ldots+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)\\ +\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{4L}{n}\right)\ldots\ldots+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)\end{array}\right\}+2\lambda^2 s,$$

wenn wieder gesetzt wird $s=\mathrm{sn}^2\frac{2L}{n}+\mathrm{sn}^2\frac{4L}{n}+\mathrm{sn}^2\frac{6L}{n}\ldots\ldots+\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}L.$ Da nach Formel (14.) §. 296. $\mathrm{dn}(nu)=0$ für $\mathrm{dn}\,v=0$ ist, so setzen wir $v=L+iL'$, wodurch wir, da $\mathrm{dn}(u+K+iK')=ik'\mathrm{tn}\,u=\frac{i}{\mathrm{tnc}\,u}$ ist, erhalten:

$$n-\mu'^2 = -2t+2\lambda^2 s,$$

wenn wir setzen:

$$1.\quad t=\frac{1}{\mathrm{tn}^2\frac{L}{n}}+\frac{1}{\mathrm{tn}^2\frac{3L}{n}}+\frac{1}{\mathrm{tn}^2\frac{5L}{n}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\mathrm{tn}^2\frac{n-2}{n}L}\ (\mathrm{mod.}\ \lambda)$$

und der vorige Ausdruck reducirt sich also auf

$$\mu'^2\mathrm{dn}^2(nu)=2t+\mathrm{dn}^2 v+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{4L}{n}\right)\ldots+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)$$
$$+\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{4L}{n}\right)\ldots+\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{n-1}{n}L\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{\partial(nu)}{\mu}=\partial v$, und integrirt, so entsteht

$$2.\quad \mu'.\mathrm{el}(nu) =$$
$$2t.v+\mathrm{el}\,v+\mathrm{el}\left(v+\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{el}\left(v+\frac{4L}{n}\right)\ldots\ldots+\mathrm{el}\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)$$
$$+\mathrm{el}\left(v-\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{el}\left(v-\frac{4L}{n}\right)\ldots\ldots+\mathrm{el}\left(v-\frac{n-1}{n}L\right),$$

und hierdurch ist die Function $\mathrm{el}(nu)$ mit dem Modul k auf ähnliche Functionen mit dem gröfseren Modul λ zurückgeführt, welche sämmtlich reell sind. Da für $v=L$, $u=K$ ist, also $\mathrm{el}(nu)=nE$, so erhalten wir

$$\mu'.n.E = 2t.L+n.F,\ \text{oder auch}$$
$$3.\quad \mu'.E=\frac{2t}{n}.L+F.$$

Da $nu = \mu'.v$ und $nK = \mu'.L$, also $\frac{u}{K} = \frac{v}{L}$ ist, so erhält man, wenn diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt wird,

$$\mu'.\frac{E}{K}.nu = 2t.v + n\frac{F}{L}.v,$$

und wird diese Gleichung von (2.) subtrahirt, so entsteht

$$4.\quad \mu'\left(\mathrm{el}(nu) - \frac{E}{K}nu\right) =$$

$$-n.\frac{F}{L}.v + \mathrm{el}\,v + \mathrm{el}\left(v+\frac{2L}{n}\right) + \mathrm{el}\left(v+\frac{4L}{n}\right) \dots + \mathrm{el}\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)$$
$$+ \mathrm{el}\left(v-\frac{2L}{n}\right) + \mathrm{el}\left(v-\frac{4L}{n}\right) \dots + \mathrm{el}\left(v-\frac{n-1}{n}L\right).$$

Da $\frac{E}{K}.nu = \frac{2tv}{\mu'} + \mu.\frac{F}{L}$ und nach §. 298. $\mu.\frac{F}{L}.v = -2k'^2 s'u + \frac{E}{K}.nu$ ist, so ist $\frac{2t.v}{\mu'} = 2k'^2 s'u$, und da $v = \mu.u$ ist, so ist endlich

$$5.\quad \mu.t = \mu'.k'^2 s'.$$

Zusatz. Nach §. 294. können aus den Formeln §. 298. und 299. noch ebensoviele neue Formeln hergeleitet werden, wenn man k mit λ, k' mit λ', K mit L und K' mit L' vertauscht, wobei übrigens nicht die Gröſsen selbst, sondern im Grunde nur ihre Zeichen vertauscht werden. Hierdurch verwandelt sich die Formel (6.) §. 298. in

$$\mu.\left(\mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u\right) =$$

$$n\left(\mathrm{el}\frac{u}{\mu} - \frac{F}{L}.\frac{u}{\mu}\right) + 2\,\mathrm{sn}\frac{u}{\mu}\,\mathrm{cn}\frac{u}{\mu}\,\mathrm{dn}\frac{u}{\mu}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu} - \mathrm{sn}^2\frac{iK'}{\mu}} + \frac{1}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu} - \mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{\mu}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu} - \mathrm{sn}^2\frac{5iK'}{\mu}} \dots + \frac{1}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu} - \mathrm{sn}^2\frac{(n-2)iK'}{\mu}}\right) \;(\mathrm{mod.}\,\lambda).$$

Wird nun die Zahl n vergröſsert, also der Modul λ der Grenze Null nahe gebracht, so nähert sich $\frac{1}{\mu}$ der Grenze η; ferner wird $F = L = \frac{1}{2}\pi$, $\mathrm{el}\left(\frac{u}{\mu}\right) = \frac{u}{\mu} = \eta u$, $\mathrm{sn}\frac{u}{\mu} = \sin\eta u$, $\mathrm{cn}\frac{u}{\mu} = \cos\eta u$, $\mathrm{dn}\frac{u}{\mu} = 1$, $\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha iK'}{\mu}\right) = i\,\mathfrak{Sin}(\eta\alpha K')$, $n\left(\mathrm{el}\frac{u}{\mu} - \frac{F}{L}.\frac{u}{\mu}\right) = 0$; daher haben wir

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}.u + \frac{2\eta\sin\eta u\cos\eta u}{\sin^2\eta u + \mathfrak{Sin}^2\eta K'} + \frac{2\eta\sin\eta u\cos\eta u}{\sin^2\eta u + \mathfrak{Sin}^2 3\eta K'} + \frac{2\eta\sin\eta u\cos\eta u}{\sin^2\eta u + \mathfrak{Sin}^2 5\eta K'} + \dots$$

was mit dem Ausdrucke $\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + H(u)$ übereinstimmt, wenn man für $H(u)$ den unter (4.) §. 200. angegebenen Werth nimmt und be-

achtet, dafs

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\mathfrak{Sin}^2\beta}=\frac{\sin 2\alpha}{\mathfrak{Cos}\,2\beta-\cos 2\alpha}\ \text{ist.}$$

§. 300.

Umformung der Modularlogarithmen und der damit im Zusammenhange stehenden Hülfsfunctionen durch die obigen Substitutionen $n$ten Grades.

Wird die Gleichung (4.) §. 298. noch mit $\frac{\partial v}{\mu}=\partial u$ multiplicirt und integrirt, so erhält man sofort

$$\begin{aligned}
&\operatorname{lm} v-\frac{F}{L}\cdot\tfrac{1}{2}v^2=\\
&-n.\frac{E}{K}\cdot\tfrac{1}{2}u^2+\operatorname{lm}u+\operatorname{lm}\Big(u+\frac{2iK'}{n}\Big)+\operatorname{lm}\Big(u+\frac{4iK'}{n}\Big)\ldots.+\operatorname{lm}\Big(u+\frac{n-1}{n}iK'\Big)\\
&\qquad+\operatorname{lm}\Big(u-\frac{2iK'}{n}\Big)+\operatorname{lm}\Big(u-\frac{4iK'}{n}\Big)\ldots.+\operatorname{lm}\Big(u-\frac{n-1}{n}iK'\Big)\\
&\qquad-2\Big(\operatorname{lm}\Big(\frac{2iK'}{n}\Big)+\operatorname{lm}\Big(\frac{4iK'}{n}\Big)+\operatorname{lm}\Big(\frac{6iK'}{n}\Big)\ldots+\operatorname{lm}\Big(\frac{n-1}{n}iK'\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Da ferner $\operatorname{lm}u=\frac{E}{K}\cdot\frac{1}{2}u^2+\log\Big(\frac{\operatorname{Hl}u}{\sqrt{k'}}\Big)$ und ebenso $\operatorname{lm}v=\frac{F}{L}\cdot\frac{1}{2}v^2+\log\Big(\frac{\operatorname{Hl}v}{\sqrt{\lambda'}}\Big)$ ist, so ist

$$\begin{aligned}
&\log\Big(\frac{\operatorname{Hl}v}{\sqrt{\lambda'}}\Big)=\\
&-n.\frac{E}{K}\cdot\tfrac{1}{2}u^2+\log\left(\frac{\operatorname{Hl}u.\operatorname{Hl}\big(u+\frac{2iK'}{n}\big)\operatorname{Hl}\big(u-\frac{2iK'}{n}\big)\ldots\operatorname{Hl}\big(u+\frac{n-1}{n}iK'\big).\operatorname{Hl}\big(u-\frac{n-1}{n}iK'\big)}{\sqrt{k'^n}}\right)\\
&\qquad-\log\left(\frac{\operatorname{Hl}^2\big(\frac{2iK'}{n}\big)\operatorname{Hl}^2\big(\frac{4iK'}{n}\big)\ldots.\operatorname{Hl}^2\big(\frac{n-1}{n}iK'\big)}{k'^{\frac{1}{2}(n-1)}}\right)\\
&+\frac{E}{2K}\Big(u^2+\Big(u+\frac{2iK'}{n}\Big)^2+\Big(u-\frac{2iK'}{n}\Big)^2+\ldots+\Big(u+\frac{n-1}{n}iK'\Big)^2+\Big(u-\frac{n-1}{n}iK'\Big)^2\\
&\qquad-2\Big(\frac{2iK'}{n}\Big)^2-2\Big(\frac{4iK'}{n}\Big)^2\ldots.-2\Big(\frac{n-1}{n}iK'\Big)^2\Big).
\end{aligned}$$

Diese Formel reducirt sich aber auf

$$\operatorname{Hl}(v)=\sqrt{\Big(\frac{\lambda'}{k'}\Big)}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{c}\operatorname{Hl}(u)\operatorname{Hl}\big(u+\frac{2iK'}{n}\big)\operatorname{Hl}\big(u-\frac{2iK'}{n}\big)\operatorname{Hl}\big(u+\frac{4iK'}{n}\big)\operatorname{Hl}\big(u-\frac{4iK'}{n}\big)\ldots\\ \ldots\operatorname{Hl}\big(u+\frac{n-1}{n}iK'\big)\operatorname{Hl}\big(u-\frac{n-1}{n}iK'\big)\end{array}\right\}}{\Big(\operatorname{Hl}\big(\frac{2iK'}{n}\big)\operatorname{Hl}\big(\frac{4iK'}{n}\big)\operatorname{Hl}\big(\frac{6iK'}{n}\big)\ldots.\operatorname{Hl}\big(\frac{n-1}{n}iK'\big)\Big)^2}.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$1.\quad \left\{\begin{aligned} h &= \mathrm{Hl}\left(\tfrac{2iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(\tfrac{4iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(\tfrac{6iK'}{n}\right)\dots\mathrm{Hl}\left(\tfrac{n-1}{n}iK'\right) \text{ oder} \\ h &= \mathfrak{H}\mathrm{l}\left(\tfrac{2K'}{n}\right)\mathfrak{H}\mathrm{l}\left(\tfrac{4K'}{n}\right)\mathfrak{H}\mathrm{l}\left(\tfrac{6K'}{n}\right)\dots\mathfrak{H}\mathrm{l}\left(\tfrac{n-1}{n}K'\right)\end{aligned}\right\} (\text{mod. } k),$$

so haben wir den einfacheren Ausdruck

$$2.\quad \mathrm{Hl}(v) = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot\frac{1}{h^2}\cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{Hl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\},$$

wenn man der Zahl α die Werthe $0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots \pm\frac{1}{2}(n-1)$ giebt, und P das Zeichen des aus dem allgemeinen Factor $\mathrm{Hl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)$ hiernach zu bildenden Productes ist.

Da $\mathrm{Hl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\mathrm{Al}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\mathrm{sn}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}$ und ebenso auch $\mathrm{Hl}(v) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\mathrm{Al}(v)}{\mathrm{sn}\, v}$ ist, so erhalten wir zunächst

$$\frac{\mathrm{Al}(v)}{\mathrm{sn}\, v} = \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot\frac{1}{h^2}\,\mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{Al}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\mathrm{sn}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}\right].$$

Aufserdem ist $\mathrm{sn}\, v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}\cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{sn}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}$, und wird die vorige Gleichung hiermit multiplicirt, so erhalten wir

$$3.\quad \mathrm{Al}(v) = \frac{1}{h^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{Al}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}.$$

Benutzt man auf ähnliche Art, wie vorhin die Sinus, noch die Cosinus und Differenten, so entstehen

$$4.\quad \mathrm{Bl}(v) = \frac{1}{h^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{Bl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\},$$

$$5.\quad \mathrm{Gl}(v) = \frac{1}{h^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{Gl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}.$$

Nach §. 185. ist $\mathrm{Hl}\, u = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{B}\mathrm{l}'u$, und ebenso ist

$$\mathrm{Hl}\, v = e^{-\frac{\pi v^2}{4LL'}}.\mathfrak{B}\mathrm{l}'v.$$

Da aber $LL' = \frac{\mu^2}{n}.KK'$ und $v^2 = \mu^2.u^2$, also $\frac{v^2}{LL'} = \frac{nu^2}{KK'}$ ist, so ist

$$\mathrm{Hl}\, v = e^{-\frac{\pi n u^2}{4KK'}}.\mathfrak{B}\mathrm{l}'v.$$

Werden diese Werthe benutzt, und hiernach alle in der Formel (2.) enthaltenen cyklischen Hülfsfunctionen in hyperbolische mit dem conjugirten

Modul umgesetzt, so erhält man nach einigen leichten Reductionen, wenn man zur Abkürzung

$$6.\quad \begin{cases} b = \mathfrak{Bl}'\left(\frac{2iK'}{n}\right).\mathfrak{Bl}'\left(\frac{4iK'}{n}\right).\mathfrak{Bl}'\left(\frac{6iK'}{n}\right)\ldots.\mathfrak{Bl}'\left(\frac{n-1}{n}iK'\right) \text{ oder} \\ b = \mathrm{Bl}'\left(\frac{2K'}{n}\right).\mathrm{Bl}'\left(\frac{4K'}{n}\right).\mathrm{Bl}'\left(\frac{6K'}{n}\right)\ldots.\mathrm{Bl}'\left(\frac{n-1}{n}K'\right) \end{cases}$$

setzt, die Formel

$$7.\quad \mathfrak{Bl}'(v) = \frac{1}{b^2}.\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}.\mathrm{P}\left\{\mathfrak{Bl}'\left(u+\frac{2\alpha iK}{n}\right)\right\}.$$

Beachtet man nun, dafs nach §. 192. $\mathfrak{Bl}'u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathrm{sn}\,u} = \sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}.\frac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathrm{cn}\,u} = \sqrt{k'}.\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathrm{dn}\,u}$ ist, so erhält man noch

$$8.\quad \mathfrak{Al}'(v) = \frac{1}{b^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}.\mathrm{P}\left\{\mathfrak{Al}'\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\},$$

$$9.\quad \mathfrak{Hl}'(v) = \frac{1}{b^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}.\mathrm{P}\left\{\mathfrak{Hl}'\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\},$$

$$10.\quad \mathfrak{Gl}'(v) = \frac{1}{b^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}.\mathrm{P}\left\{\mathfrak{Gl}'\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}.$$

Nach §. 191. ist

$$\frac{\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)}{\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Hl}\,a}{\sqrt{k'}}\right)^2.(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b).$$

Ferner ist $\mathrm{Hl}(a\pm b) = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\mathrm{Al}(a\pm b)}{\mathrm{sn}(a\pm b)}$, also ist

$$\frac{\mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b)}{\mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b).\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Al}\,a}{\mathrm{sn}\,a\sqrt{k'}}\right)^2(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b),$$

und da $\frac{\mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b)}{\mathrm{sn}^2 a} = \frac{1-\frac{\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{sn}^2 a}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}$ ist, so ist

$$\frac{\mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b)}{\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Al}\,a}{\sqrt{k'}}\right)^2\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{sn}^2 a}\right).$$

Setzt man in diesen Formeln noch $K-a$ statt a, so verwandeln sie sich in

$$\frac{\mathrm{Gl}(a+b).\mathrm{Gl}(a-b)}{\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Gl}\,a}{\sqrt{k'}}\right)^2.(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{snc}^2 a) \text{ und}$$

$$\frac{\mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b)}{\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Bl}\,a}{\sqrt{k'}}\right)^2.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{snc}^2 a}\right).$$

Hiernach können die Formeln (2. bis 5.) auch also dargestellt werden:

$$11.\left\{\begin{aligned}
\mathrm{Hl}(v) &= \sqrt{\left(\tfrac{\lambda'}{k'^n}\right)}.(\mathrm{Hl}\,u)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{5iK'}{n}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}\right),\\
\mathrm{Al}(v) &= \sqrt{\left(\tfrac{\lambda'}{k'^n}\right)}.(\mathrm{Al}\,u)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}}{\mathrm{sn}^2 u}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}}{\mathrm{sn}^2 u}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{6iK'}{n}}{\mathrm{sn}^2 u}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'}{\mathrm{sn}^2 u}\right),\\
\mathrm{Gl}(v) &= \sqrt{\left(\tfrac{\lambda'}{k'^n}\right)}.(\mathrm{Gl}\,u)^n.\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{5iK'}{n}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}\right),\\
\mathrm{Bl}(v) &= \sqrt{\left(\tfrac{\lambda'}{k'^n}\right)}.(\mathrm{Bl}\,u)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}}{\mathrm{snc}^2 u}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}}{\mathrm{snc}^2 u}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{6iK'}{n}}{\mathrm{snc}^2 u}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'}{\mathrm{snc}^2 u}\right),
\end{aligned}\right.$$

Nach §. 213. ist $\frac{\mathfrak{Bl}'(a+b).\mathfrak{Bl}'(a-b)}{\mathfrak{Bl}'^2 b} = \left(\frac{\mathfrak{Bl}'a}{\sqrt{k'}}\right).(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b)$, und da ferner $\mathfrak{Bl}'u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathrm{sn}\,u} = \sqrt{\frac{k'}{k}}.\frac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathrm{cn}\,u} = \sqrt{k'}.\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathrm{dn}\,u}$ ist, so ist auch

$$\frac{\mathfrak{Al}(a+b).\mathfrak{Al}'(a-b)}{\mathfrak{Bl}'^2 b} = \left(\frac{\mathfrak{Al}'a}{\sqrt{k'}}\right)^2.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{sn}^2 a}\right),$$

$$\frac{\mathfrak{Hl}'(a+b).\mathfrak{Hl}'(a-b)}{\mathfrak{Bl}'^2 b} = \left(\frac{\mathfrak{Hl}'a}{\sqrt{k'}}\right)^2.\left(1-\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}^2 a}\right),$$

$$\frac{\mathfrak{Gl}'(a+b).\mathfrak{Gl}'(a-b)}{\mathfrak{Bl}'^2 b} = \left(\frac{\mathfrak{Gl}'a}{\sqrt{k'}}\right)^2.(1-k^2\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b).$$

Hiernach können die Formeln (7. bis 10.) auf ähnliche Art umgeformt werden, wie die Formeln (1. bis 5.) umgeformt worden sind. Man gelangt aber zu denselben Resultaten noch einfacher. Es ist, wie schon gezeigt wurde,

$$\mathrm{Hl}\,v = e^{-\frac{\pi n u^2}{4KK'}}.\mathfrak{Bl}'v \quad \text{und auch} \quad (\mathrm{Hl}\,u) = e^{-\frac{\pi n u^2}{4KK'}}.(\mathfrak{Bl}'u)^n;$$

daher haben wir die Gleichung:

$$\frac{\mathrm{Hl}\,v}{(\mathrm{Hl}\,u)^n} = \frac{\mathfrak{Bl}'v}{(\mathfrak{Bl}'u)^n}.$$

Ebenso findet man die drei Formeln

$$\frac{\mathrm{Al}\,v}{(\mathrm{Al}\,u)^n} = \frac{\mathfrak{Al}'v}{(\mathfrak{Al}'u)^n},\quad \frac{\mathrm{Bl}\,v}{(\mathrm{Bl}\,v)^n} = \frac{\mathfrak{Hl}'v}{(\mathfrak{Hl}'u)^n} \quad\text{und}\quad \frac{\mathrm{Gl}\,v}{(\mathrm{Gl}\,u)^n} = \frac{\mathfrak{Gl}'v}{(\mathfrak{Gl}'u)^n},$$

und ihnen gemäfs darf man in den Formeln (11.) statt $\mathrm{Hl}v$, $\mathrm{Al}v$, $\mathrm{Gl}v$, $\mathrm{Bl}v$ der Reihe nach setzen $\mathfrak{Bl}'v$, $\mathfrak{Al}'v$, $\mathfrak{Gl}'v$ und $\mathfrak{Hl}'v$, wenn man gleichzeitig statt $\mathrm{Hl}u$, $\mathrm{Al}u$, $\mathrm{Gl}u$ und $\mathrm{Bl}u$ der Reihe nach die Functionen $\mathfrak{Bl}'u$, $\mathfrak{Al}'u$, $\mathfrak{Gl}'u$ und $\mathfrak{Hl}'u$ setzt.

§. 301.

Durch die vorhergehenden Formeln werden die Modular-Logarithmen und cyklischen Hülfs-Functionen mit dem Modul λ zurückgeführt auf

gleiche Functionen mit dem Modul k, (die hyperbolischen Hülfs-Functionen mit dem Modul λ' auf gleiche Functionen mit dem Modul k'). Wollen wir Formeln herleiten, welche in Bezug auf die vorstehenden die umgekehrten scheinen, so müssen wir von den Formeln §. 299. ausgehen. Multipliciren wir zu dem Ende die Formel (4. §. 299.) mit $\frac{\partial(nu)}{\mu'} = \partial v$, so erhalten wir

$$1.\quad \text{lm}(nu) - \frac{E}{K}\cdot\frac{(nu)^2}{2}$$

$$= -n.\frac{F}{L}.\tfrac{1}{2}v^2 + \text{lm}\,v + \text{lm}\Big(v+\frac{2L}{n}\Big) + \text{lm}\Big(v+\frac{4L}{n}\Big)\ldots + \text{lm}\Big(v+\frac{n-1}{n}L\Big)$$
$$+ \text{lm}\Big(v-\frac{2L}{n}\Big) + \text{lm}\Big(v-\frac{4L}{n}\Big)\ldots + \text{lm}\Big(v-\frac{n-1}{n}L\Big)$$
$$-\Big(2\,\text{lm}\frac{2L}{n} + 2\,\text{lm}\frac{4L}{n}\ldots + 2\,\text{lm}\frac{n-1}{n}L\Big).$$

Da nun $\text{lm}(nu) - \frac{E}{K}.\frac{(nu)^2}{2} = \log\frac{\text{Hl}(nu)}{\sqrt{k'}}$, ferner $\text{lm}\,v = \frac{F}{L}.\tfrac{1}{2}v^2 + \log\frac{\text{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda}}$ ist, so reducirt sich die Formel, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{ll} & g = \text{Hl}\Big(\frac{2L}{2}\Big).\text{Hl}\Big(\frac{4L}{n}\Big).\text{Hl}\Big(\frac{6L}{n}\Big)\ldots\text{Hl}\Big(\frac{n-1}{n}L\Big) \text{ oder} \\ 2. & g = \text{Gl}\Big(\frac{L}{n}\Big).\text{Gl}\Big(\frac{3L}{n}\Big).\text{Gl}\Big(\frac{5L}{n}\Big)\ldots\text{Gl}\Big(\frac{n-2}{n}L\Big)\end{array}\right\}(\text{mod. }\lambda)$$

setzt, auf die einfachere:

$$3.\quad \text{Hl}(nu) = \frac{1}{g^2}.\sqrt{\Big(\frac{k'}{\lambda'}\Big)}.\text{Hl}\,v.\text{Hl}\Big(\frac{2L}{n}+v\Big).\text{Hl}\Big(\frac{4L}{n}+v\Big)\ldots\text{Hl}\Big(\frac{n-1}{n}L+v\Big)$$
$$.\text{Hl}\Big(\frac{2L}{n}-v\Big).\text{Hl}\Big(\frac{4L}{n}-v\Big)\ldots\text{Hl}\Big(\frac{n-1}{n}L-v\Big).$$

Hieraus folgt nun aber auf ähnliche Art, wie in §. 300. gezeigt worden ist,

$$4.\quad \text{Al}(nu) = \frac{1}{g^2}.\sqrt{\Big(\frac{k'}{\lambda'}\Big)}.\text{Al}\,v.\text{Al}\Big(\frac{2L}{n}+v\Big).\text{Al}\frac{4L}{n}+v\Big)\ldots\text{Al}\Big(\frac{n-1}{n}L+v\Big)$$
$$.\text{Al}\Big(\frac{2L}{n}-v\Big).\text{Al}\Big(\frac{4L}{n}-v\Big)\ldots\text{Al}\Big(\frac{n-1}{n}L-v\Big),$$

$$5.\quad \text{Bl}(nu) = \frac{1}{g^2}.\sqrt{\Big(\frac{k'}{\lambda'}\Big)}.\text{Bl}\,v.\text{Bl}\Big(\frac{2L}{n}+v\Big).\text{Bl}\Big(\frac{4L}{n}+v\Big)\ldots\text{Bl}\Big(\frac{n-1}{n}L+v\Big)$$
$$.\text{Bl}\Big(\frac{2L}{n}-v\Big).\text{Bl}\Big(\frac{4L}{n}-v\Big)\ldots\text{Bl}\Big(\frac{n-1}{n}L-v\Big),$$

$$6.\quad \text{Gl}(nu) = \frac{1}{g^2}.\sqrt{\Big(\frac{k'}{\lambda'}\Big)}.\text{Gl}\,v.\text{Gl}\Big(\frac{2L}{n}+v\Big).\text{Gl}\Big(\frac{4L}{n}+v\Big)\ldots\text{Gl}\Big(\frac{n-1}{n}L+v\Big)$$
$$.\text{Gl}\Big(\frac{2L}{n}-v\Big).\text{Gl}\Big(\frac{4L}{n}-v\Big)\ldots\text{Gl}\Big(\frac{n-1}{n}L-v\Big).$$

Hierdurch sind nun schon die Modular-Logarithmen und die cyklischen Hülfs-Functionen des Arguments nu mit dem Modul k auf ähnliche Functionen mit dem gröfseren Modul λ zurückgeführt worden.

Es können die vorigen Formeln auch also dargestellt werden:

$$7.\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Hl}(nu)}{\sqrt{k'}} &= \left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n \left(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{2L}{n}\mathrm{sn}^2 v\right)\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{4L}{n}\mathrm{sn}^2 v\right)\ldots\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}L.\mathrm{sn}^2 v\right),\\
\frac{\mathrm{Al}(nu)}{\sqrt{k'}} &= \left(\frac{\mathrm{Al}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n \left(\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2L}{n}}{\mathrm{sn}^2 v}-1\right)\left(\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4L}{n}}{\mathrm{sn}^2 v}-1\right)\ldots\left(\frac{\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}L}{\mathrm{sn}^2 v}-1\right),\\
\frac{\mathrm{Bl}(nu)}{\sqrt{k'}} &= \left(\frac{\mathrm{Bl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n \left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2L}{n}}{\mathrm{snc}^2 v}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4L}{n}}{\mathrm{snc}^2 v}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}L}{\mathrm{snc}^2 v}\right),\\
\frac{\mathrm{Gl}(nu)}{\sqrt{k'}} &= \left(\frac{\mathrm{Gl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n \left(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{2L}{n}\mathrm{snc}^2 v\right)\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{4L}{n}\mathrm{snc}^2 v\right)\ldots\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}L.\mathrm{snc}^2 v\right).
\end{aligned}\right.$$

Es ist $K'=\mu'.L'$ und $K=\frac{\mu'}{n}.L$, also $KK'=\frac{\mu'^2}{n}.LL'$, und da $(nu)^2 = \mu'^2.v^2$ ist, so ist

$$\frac{(nu)^2}{KK'} = \frac{nv^2}{LL'}.$$

Da nun $\mathrm{Hl}(nu)=e^{-\frac{\pi(nu)^2}{4KK'}}.\mathfrak{Bl}'(nu)$ und $\mathrm{Hl}\,v=e^{-\frac{\pi v^2}{4LL'}}.\mathfrak{Bl}'(v)$ ist, so findet man

$$\frac{\mathrm{Hl}(nu)}{(\mathrm{Hl}(v))^n} = \frac{\mathfrak{Bl}'(nu)}{(\mathfrak{Bl}'v)^n},\ \text{und ebenso}\ \frac{\mathrm{Al}(nu)}{(\mathrm{Al}\,v)^n} = \frac{\mathfrak{Al}'(nu)}{(\mathfrak{Al}'v)^n},\quad \frac{\mathrm{Bl}(nu)}{(\mathrm{Bl}\,v)^n} = \frac{\mathfrak{Hl}'(nu)}{(\mathfrak{Hl}'v)^n}$$

$$\text{und}\ \frac{\mathrm{Gl}(nu)}{(\mathrm{Gl}\,v)^n} = \frac{\mathfrak{Gl}'(nu)}{(\mathfrak{Gl}'v)^n}.$$

Demnach darf man in den Formeln (7.) statt $\mathrm{Hl}(nu)$, $\mathrm{Al}(nu)$, $\mathrm{Bl}(nu)$ und $\mathrm{Gl}(nu)$ der Reihe nach setzen $\mathfrak{Bl}'(nu)$, $\mathfrak{Al}'(nu)$, $\mathfrak{Hl}'(nu)$ und $\mathfrak{Gl}'(nu)$, wenn man gleichzeitig statt $\mathrm{Hl}\,v$, $\mathrm{Al}\,v$, $\mathrm{Bl}\,v$ und $\mathrm{Gl}\,v$ der Reihe nach $\mathfrak{Bl}'v$, $\mathfrak{Al}'v$, $\mathfrak{Hl}'v$ und $\mathfrak{Gl}'v$ setzt.

Zusatz. Nach §. 297. können nun auch die so eben entwickelten Formeln ihrer Zahl nach verdoppelt werden. Die Formeln (11. §. 300.) verwandeln sich in

$$\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}} = \left(\frac{\mathrm{Hl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{\mu}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{(n-2)iK'}{\mu}}\right)\ (\text{mod.}\ \lambda),$$

$$\frac{\mathrm{Al}\,u}{\sqrt{k'}} = \left(\frac{\mathrm{Al}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{(n-1)iK'}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}\right)\ (\text{mod.}\ \lambda),$$

$$\frac{\mathrm{Gl}\,u}{\sqrt{k'}} = \left(\frac{\mathrm{Gl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{\mu}}\right)\cdots\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{(n-2)iK'}{\mu}}\right) \quad (\mathrm{mod.}\ \lambda),$$

$$\frac{\mathrm{Bl}\,u}{\sqrt{k'}} = \left(\frac{\mathrm{Bl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{\mu}}{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{\mu}}{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}\right)\cdots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{(n-1)iK'}{\mu}}{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}\right) \quad (\mathrm{mod.}\ \lambda).$$

Auch in diesen Formeln wollen wir n unendlich nehmen, wodurch bekanntlich der Modul $\lambda = 0$ wird.

Es ist $\log\frac{\mathrm{Hl}\left(\frac{u}{\mu}\right)}{\sqrt{\lambda'}} = \mathrm{lm}\left(\frac{u}{\mu}\right) - \frac{F}{L}\cdot\frac{\left(\frac{u}{\mu}\right)^2}{2}$. Wird nun der Modul $\lambda = 0$, also $\frac{1}{\mu} = \eta$ gesetzt, so wird $\mathrm{lm}\left(\frac{u}{\mu}\right) = \frac{(\eta u)^2}{2}$; ferner wird $F = L = \frac{1}{2}\pi$ und $\left(\frac{u}{\mu}\right)^2 = (\eta u)^2$, also wird $\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right) = 0$ und also $\frac{\mathrm{Hl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}} = 1$. Hiernach verwandelt sich die erste der vorstehenden vier Formeln in

1. $\mathrm{Hl}\,u = \sqrt{k'}.\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta K'}\right)\ldots$

Da nun aber $\mathrm{Al}\,u = \sqrt{k}.\mathrm{sn}\,u.\mathrm{Hl}\,u$, $\mathrm{Bl}\,u = \sqrt{\frac{k}{k'}}\mathrm{cn}\,u.\mathrm{Hl}\,u$ und $\mathrm{Gl}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u.\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}$ ist, so erhalten wir, wenn die in §. 297. für $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ und $\mathrm{dn}\,u$ gefundenen Producte substituirt werden, die Formeln

2. $\mathrm{Al}\,u = \frac{\sqrt{(kk')}}{\eta}\sin\eta u\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 6\eta K'}\right)\ldots$

3. $\mathrm{Bl}\,u = \sqrt{k}.\cos\eta u.\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}\right)\ldots$

4. $\mathrm{Gl}\,u = \left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 7\eta K'}\right)\ldots,$

welche mit den im §. 186. gefundenen übereinstimmen.

§. 302.

Umformung der Modular-Integrale der zweiten Art durch Substitutionen $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Wählen wir aufser den durch die Gleichung $v = \mu.u$ mit einander verbundenen Argumenten u und v noch die Argumente u' und v' so, dafs auch $v' = \mu.u'$ ist, so ist ebensowohl

$$v+v' = \mu(u'+u), \quad \text{als} \quad v-v' = \mu(u-u'),$$

mithin dürfen wir in den sich auf die früheren Umformungen beziehenden Gleichungen durchweg $u \pm u'$ statt u setzen, wenn gleichzeitig $v \pm v'$ statt v gesetzt wird.

Hiernach erhalten wir aus der Gleichung (2. §. 300.) sofort

$$(\alpha.)\qquad \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(v+v')}{\mathrm{Hl}(v-v')}} = S\left\{\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}\left(u+u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\mathrm{Hl}\left(u-u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}}\right\},$$

wenn in dem Summen-Ausdruck auf der rechten Seite α die Werthe 0, ± 1, ± 2, ± 3, ... $\pm\frac{1}{2}(n-1)$ erhält.

Da aber $\partial v' = \mu.\partial u'$, also $\frac{v}{\partial v'} = \frac{u}{\partial u'} = \frac{u}{\partial\left(u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}$ ist, so ist auch

$$\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\,v'}{\partial v'}.v = S\left\{\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\left(u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\partial\left(u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}.u\right\}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir zusammen durch Subtraction:

$$\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\,v'}{\partial v'}.v - \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(v+v')}{\mathrm{Hl}(v-v')}}$$

$$= S\left\{\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\left(u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\partial\left(u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}.u - \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}\left(u+u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\mathrm{Hl}\left(u-u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}}\right.$$

oder auch

$$\mathrm{H}(v').v - \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(v+v')}{\mathrm{Hl}(v-v')}} = S\left\{\mathrm{H}\left(u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right).u - \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}\left(u+u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\mathrm{Hl}\left(u-u'-\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}}\right\}.$$

Nach Formel (1. §. 202.) kann aber diese Gleichung einfacher also dargestellt werden:

$$1.\qquad \mathfrak{S}(v,v') = S\left\{\mathfrak{S}\left(u,u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}.$$

Differentiirt man die Formeln (5. und 4. §. 300.) logarithmisch, nachdem zuvor v' statt v und u' statt u gesetzt worden ist, und multiplicirt die neue Gleichung mit $\frac{v}{\mu} = u$, so erhält man

$$G(v').v = S\left\{G\left(u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right).u\right\},\qquad B(v').v = S\left\{B\left(u'+\frac{2\alpha iK'}{n}\right).u\right\}.$$

Werden diese Gleichungen mit (α.) verbunden, so erhält man, den For-

meln (2. und 3. §. 202.) gemäfs,

$$2. \quad \mathfrak{C}(v,v') = S\left\{\mathfrak{C}\left(u, u' + \frac{2\alpha i K'}{n}\right)\right\},$$

$$3. \quad \mathfrak{D}(v,v') = S\left\{\mathfrak{D}\left(u, u' + \frac{2\alpha i K'}{n}\right)\right\}.$$

Setzt man hierin noch $u'i$ statt u' und $v'i$ statt v', so verwandeln sich die drei vorigen Gleichungen in

$$4. \quad \begin{cases} S(v,v') = S\left\{S\left(u, u' + \frac{2\alpha K'}{n}\right)\right\}, \\ C(v,v') = S\left\{C\left(u, u' + \frac{2\alpha K'}{n}\right)\right\}, \\ D(v,v') = S\left\{D\left(u, u' + \frac{2\alpha K'}{n}\right)\right\}, \end{cases}$$

und die Gleichungen $v = \mu.u$ und $v' = \mu.u'$ gelten auch nun wieder. Ohne das Summations-Zeichen sind diese Gleichungen

$$S(v,v') = S(u,u) + S\left(u, u' + \frac{2K'}{n}\right) + S\left(u, u' + \frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + S\left(u, u' + \frac{n-1}{n}K'\right)$$
$$+ S\left(u, u' - \frac{2K'}{n}\right) + S\left(u, u' - \frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + S\left(u, u' - \frac{n-1}{n}K'\right),$$

$$C(v,v') = C(u,u') + C\left(u, u' + \frac{2K'}{n}\right) + C\left(u, u' + \frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + C\left(u, u' + \frac{n-1}{n}K'\right)$$
$$+ C\left(u, u' - \frac{2K'}{n}\right) + C\left(u, u' - \frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + C\left(u, u' - \frac{n-1}{n}K'\right),$$

$$D(v,v') = D(u,u') + D\left(u, u' + \frac{2K'}{n}\right) + D\left(u, u' + \frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + D\left(u, u' + \frac{n-1}{n}K'\right)$$
$$+ D\left(u, u' - \frac{2K'}{n}\right) + D\left(u, u' - \frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + D\left(u, u' - \frac{n-1}{n}K'\right).$$

Aus Formel (4. §. 300.) folgt

$$\log \sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(v-v')}{\mathrm{Bl}(v+v')}} = S\left\{\log \sqrt{\frac{\mathrm{Bl}\left(v - v' - \frac{2\alpha i K'}{n}\right)}{\mathrm{Bl}\left(v + v' + \frac{2\alpha i K'}{n}\right)}}\right\}.$$

Aufserdem erhält man die Gleichungen

$$B(v').v = S\left\{B\left(u' + \frac{2\alpha i K'}{n}\right).u\right\},$$

$$G(v').v = S\left\{G\left(u' + \frac{2\alpha i K'}{n}\right).u\right\},$$

$$H(v').v = S\left\{H\left(u' + \frac{2\alpha i K'}{n}\right).u\right\},$$

und daraus, den Formeln (1. §. 203.) gemäfs,

$$5. \begin{cases} \mathfrak{S}'(v,v') = \\ '\mathfrak{S}(u,u') + '\mathfrak{S}\left(u,u'+\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{S}\left(u,u'+\frac{4iK'}{n}\right) \ldots\ldots + '\mathfrak{S}\left(u,u'+\frac{n-1}{n}iK'\right) \\ \quad + '\mathfrak{S}\left(u,u'-\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{S}\left(u,u'-\frac{4iK'}{n}\right) \ldots\ldots + '\mathfrak{S}\left(u,u'-\frac{n-1}{n}iK'\right), \\ '\mathfrak{C}(v,v) = \\ (u,u') + '\mathfrak{C}\left(u,u'+\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{C}\left(u,u'+\frac{4iK'}{n}\right) \ldots\ldots + '\mathfrak{C}\left(u,u'+\frac{n-1}{n}iK'\right) \\ \quad + '\mathfrak{C}\left(u,u'-\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{C}\left(u,u'-\frac{4iK'}{n}\right) \ldots\ldots + '\mathfrak{C}\left(u,u'-\frac{n-1}{n}iK'\right), \\ '\mathfrak{D}(v,v(= \\ '\mathfrak{D}(u,u') + '\mathfrak{D}\left(u,u'+\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{D}\left(u,u'+\frac{4iK'}{n}\right) \ldots\ldots + '\mathfrak{D}\left(u,u'+\frac{n-1}{n}iK'\right) \\ \quad + '\mathfrak{D}\left(u,u'-\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{D}\left(u,u'-\frac{4iK'}{n}\right) \ldots\ldots + '\mathfrak{D}\left(u,u'-\frac{n-1}{n}iK'\right). \end{cases}$$

Setzt man auch in diesen Formeln $u'i$ statt u' und $v'i$ statt v', so erhält man

$$6. \begin{cases} 'S(v,v') = \\ 'S(u,u') + 'S\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + 'S\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + 'S\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right), \\ \quad + 'S\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + 'S\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + 'S\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right), \\ 'C(v,v') = \\ 'C(u,u') + 'C\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + 'C\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + 'C\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right) \\ \quad + 'C\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + 'C\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + 'C\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right), \\ 'D(v,v) = \\ 'D(u,u') + 'D\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + 'D\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + 'D\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right) \\ \quad + 'D\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + 'D\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right) \ldots\ldots + 'D\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right). \end{cases}$$

Durch die vorstehenden Formeln sind die Modular-Integrale mit dem Modul λ zurückgeführt auf ähnliche Integrale mit dem Modul k, welcher kleiner als λ ist. Die umgekehrten Formeln haben dieselbe Form. Man hat in den vorstehenden Formeln nur v statt u, v' statt u', nu statt v, nu' statt v', λ statt k, k statt λ, $\frac{L}{n}$ statt $\frac{iK'}{n}$ oder $\frac{iL}{n}$ statt $\frac{K'}{n}$ zu setzen.

§. 303.

Differenzial-Gleichungen für den Zähler und Nenner der Substitution $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Setzen wir $x=\sqrt{k}.\mathrm{sn}\,u$ und $X=\sqrt{\lambda}.\mathrm{sn}\,v$ für $v=\mu.u$, so verwandelt sich, wie oben gezeigt worden ist, $\mathrm{sn}\,v$ in $\frac{1}{\lambda\,\mathrm{sn}\,v}$ oder X in $\frac{1}{X}$, wenn sich $\mathrm{sn}\,u$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$ oder x in $\frac{1}{x}$ verwandelt.

Auf ähnliche Art wie in §. 164. findet sich, dafs man setzen könne:

$$X=\frac{\overset{m}{a}x+\overset{m-1}{a}.x^3+\overset{m-2}{a}.x^5\,\ldots.\,\overset{1}{a}.x^{2m-1}+x^{2m+1}}{1+\overset{1}{a}.x^2+\overset{2}{a}.x^4\,\ldots.+\overset{m}{a}.x^{2m}}\ \text{für}\ m=\tfrac{1}{2}(n-1)$$

oder $2m+1=n$, oder auch $X=\frac{U}{V}$, wenn man setzt:

$$U=\overset{m}{a}.x+\overset{m-1}{a}.x^3+\overset{m-2}{a}.x^5\,\ldots.+\overset{1}{a}\,x^{2m-1}+x^{2m+1},$$
$$V=1+\overset{1}{a}x^2+\overset{2}{a}x^4+\ldots.+\overset{m}{a}.x^{2m}.$$

Auch findet man leicht den Coëfficienten $\overset{m}{a}$. Es ist nämlich $\frac{\overset{m}{a}.\sqrt{k}}{\sqrt{\lambda}}=\mu$, und also rückwärts

$$1.\quad \overset{m}{a}=\mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.$$

Setzt man wirklich $\frac{1}{x}$ statt x, so verwandelt sich

$$U\ \text{in}\ \frac{V}{x^n}\ \text{und}\ V\ \text{in}\ \frac{U}{x^n}.$$

Aus der Gleichung $x=\sqrt{k}.\mathrm{sn}\,u$ folgt

$$\partial u=\frac{\partial x}{\sqrt{k}.\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}\ \text{für}\ \alpha=\tfrac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right),$$

und aus der Gleichung $X=\sqrt{\lambda}.\mathrm{sn}\,v$ folgt ebenso

$$\mu.\partial u=\frac{\partial X}{\sqrt{\lambda}\sqrt{(1-2\beta X^2+X^4)}}\ \text{für}\ \beta=\tfrac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right):$$

daher ist $\mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.\frac{\partial x}{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}=\frac{\partial X}{\sqrt{(1-2\beta X^2+X^4)}}$, oder auch

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.\sqrt{\frac{1-2\beta X^2+X^4}{1-2\alpha x^2+x^4}}.$$

Der ersten von den Formeln (12. §. 295.) gemäfs ist

$$X = \frac{\sqrt{k^n}\,\mathrm{sn}\,u\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}\right)\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}\right)\ldots\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'\right)}{\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}\right)},$$

und wird dieser Ausdruck mit den vorigen verglichen, so hat man

$$U = \sqrt{k^n}.\,\mathrm{sn}\,u\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}\right)\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}\right)\ldots\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'\right),$$

$$V = \left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}\right).$$

Der Ausdruck V kommt auch in der ersten der Formeln (11. §. 300.) vor; daher haben wir einfacher:

$$2.\quad V = \left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right) : \left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)^n \quad \text{oder}$$

$$\log V = \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right) - n\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Da ferner nach §. 171. $X = \sqrt{\lambda}.\,\mathrm{sn}\,v = \frac{\mathrm{Al}\,v}{\mathrm{Hl}\,v} = \frac{U}{V}$ ist, so haben wir

3. $U = \left(\frac{\mathrm{Al}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right) : \left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)^n$ oder auch $\log U = \log\left(\frac{\mathrm{Al}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right) - n.\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)$.

Nach §. 183. ist $\mathrm{lm}\,v - \frac{F}{L}.\tfrac{1}{2}v^2 = \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)$ und $\mathrm{lm}\,u - \frac{E}{K}.\tfrac{1}{2}u^2 = \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)$; daher haben wir

$$\log V = \mathrm{lm}\,v - \frac{F}{L}.\tfrac{1}{2}v^2 - n\left(\mathrm{lm}\,u - \frac{E}{K}.\tfrac{1}{2}u^2\right).$$

In §. 298. wurde $\mu.\frac{F}{L}.v = -2k'^2.s'.u + n.\frac{E}{K}.u$ gefunden; wird diese Gleichung noch mit $\frac{v}{2\mu} = \tfrac{1}{2}u$ multiplicirt, so erhält man $\frac{F}{L}.\tfrac{1}{2}v^2 = -k'^2 s'.\tfrac{1}{2}u^2 + n.\frac{E}{K}.\tfrac{1}{2}u^2$, und es reducirt sich also die vorige Gleichung auf

$$\log V = \mathrm{lm}\,v - n\,\mathrm{lm}\,u + k'^2 s'.u^2.$$

Differenziirt man diese Gleichung zweimal nach einander nach u, so erhält man

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u} = \mu^2\mathrm{dn}^2 v - n\,\mathrm{dn}^2 u + 2k'^2 s' = \mu^2 - n + 2k'^2 s' - \mu^2\lambda.X^2 + nkx^2,$$

und da nach §. 298. $\mu^2 - n + 2k'^2 s' = 2k^2 t'$ ist, so reducirt sich die vorige Gleichung noch auf

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u} = 2k^2 t' - \mu^2\lambda . X^2 + nk . x^2,$$

worin $t' = \text{tn}'^2 \frac{2K'}{n} + \text{tn}'^2 \frac{4K'}{n} + \text{tn}'^2 \frac{6K'}{n} \ldots . + \text{tn}'^2 \frac{n-1}{n} K'$. Setzen wir

$$\tau = \frac{1}{\text{tn}'^2 \frac{K'}{n}} + \frac{1}{\text{tn}'^2 \frac{3K'}{n}} + \frac{1}{\text{tn}'^2 \frac{5K'}{n}} + \ldots . + \frac{1}{\text{tn}'^2 \frac{n-2}{n} K'},$$

so haben wir auch

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u} = 2\tau - \mu^2\lambda . X^2 + nkx^2.$$

Wie in §. 164. findet man aber

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u} = \frac{k(1-2\alpha x^2+x^4)}{V} . \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{k(2x^3-2\alpha x)}{V} . \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k(1-2\alpha x^2+x^4)}{V^2} . \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2.$$

Wird dieser Werth mit V^2 multiplicirt und beachtet, dafs $V^2 . X^2 = U^2$ ist, so erhält man

$$k(1-2\alpha x^2+x^4) . \frac{V\partial^2 V}{\partial x^2} - k(1-2\alpha x^2+x^4) . \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + k(2x^3-2\alpha x) . \frac{V\partial V}{\partial x}$$

$$= 2\tau . V^2 - \mu^2\lambda U^2 + nkx^2 V^2$$

oder auch

$$4. \quad (1-2\alpha x^2+x^4)\left(V . \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} . \frac{\partial V}{\partial x}\right) - (\alpha x - x^3) . \frac{\partial (V^2)}{\partial x}$$

$$= (2kt'+nx^2) V^2 - \frac{\mu^2\lambda}{k} . U^2.$$

Setzt man in der obigen Gleichung $u+iK'$ statt u, also $\frac{1}{x}$ statt x und $\frac{1}{X}$ statt X, so bleibt ∂u ungeändert, aber V verwandelt sich in $\frac{U}{X^n}$, also $\log V$ in $\log U - n \log x$, daher erhalten wir

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log U}{\partial u}\right)}{\partial u} - n . \frac{\partial\left(\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)}{\partial u} = 2\tau - \mu^2\lambda . \frac{V^2}{U^2} + \frac{nk}{x^2}.$$

Da aber $\frac{\partial\left(\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)}{\partial} = kx^2 - \frac{k}{x^2}$ ist, so erhält man

$$5. \quad (1-2\alpha x^2+x^4)\left(U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} . \frac{\partial U}{\partial x}\right) - (\alpha x - x^3) . \frac{\partial (U^2)}{\partial x}$$

$$= (2kt'+nx^2) U^2 - \frac{\mu^2\lambda}{k} V^2.$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen verglichen, so zeigt sich, dafs sich die eine Gleichung in die andere verwandelt, wenn man U mit V vertauscht.

Substituirt man in einer von diesen Gleichungen die Polynome

$$U = \overset{m}{a}x + \overset{m-1}{a}.x^3 + \overset{m-2}{a}.x^5 \ldots. + \overset{1}{a}x^{2m-1} + x^{2m+1} \text{ und}$$
$$V = 1 + \overset{1}{a}x^2 + \overset{2}{a}x^4 + \ldots. + \overset{m}{a}.x^{2m},$$

so kann man dadurch eine Recursionsformel herleiten, welcher gemäfs man dann die Coëfficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots. \overset{m}{a}$ recurrirend berechnen kann. Die Ausdrücke dieser Coëfficienten werden aber ziemlich zusammengesetzt, und da ihre Anwendung überflüssig ist, so übergehen wir die Angabe der Ausdrücke der ersten von ihnen.

Schlufsbemerkung. Die Gleichung $x = \text{sn}\,u$ läfst sich auch durch eine Substitution $n$ten Grades unter der Voraussetzung, dafs n eine gerade Zahl ist, in eine ähnliche Gleichung mit einem andern Modul umformen, wobei das Argument u wieder mit einem constanten Factor μ multiplicirt wird. Es bietet diese Umformung wenige Schwierigkeiten dar; sie scheint aber wenig interessant, und daher übergehen wir die Ausführung derselben, zumal da der in Ansehung seiner Anwendungen allein wichtige besondere Fall für $n = 2$ schon in §. 51. bis §. 54., ferner in §. 82. und 83. und in §. 251. bis §. 253. umständlich behandelt worden ist.

Verbindet man die Formeln für ein ungerades n mit den so eben genannten für $n = 2$, so übersieht man sogleich, welche Formen die zu substituirenden Ausdrücke haben werden, wenn der Grad der Substitution durch eine beliebige andere gerade Zahl ausgedrückt wird.

Der folgende zweite Theil wird die Behandlung der ebenen und sphärischen Modularcurven, der Rectification und Quadratur der sphärischen Kegelschnitte und hauptsächlich eine Theorie der sphärischen Kettenlinien enthalten. Die Untersuchung dieser statischen Curven, in ihren verschiedenen Formen, erfordert die ausgedehntesten Anwendungen der Theorie der Modularfunctionen und der Modular-Integrale, wodurch allein die merkwürdigen Gesetze dieser und auch der reciproken Curven ermittelt werden konnten.

Beschlufs dieser Abhandlung.

21.
Aufgaben.

1. Wenn m eine positive ganze Zahl ist, und man setzt die $m$te Potenz des Polynoms $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots . a_n x^n$:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots . + a_n x^n)^m = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \ldots . + A_{mn} x^{mn},$$

so wird bekanntlich jeder beliebige Coëfficient A rechterhand, z. B. A_k, durch

$$A_k = \Sigma\left(\frac{2.3.4\ldots . m \times a_0^{\varepsilon_0}.a_1^{\varepsilon_1}.a_2^{\varepsilon_2}\ldots . a_k^{\varepsilon_k}}{2.3.4\ldots .\varepsilon_0 \times 2.3.4\ldots .\varepsilon_1 \times 2.3.4\ldots .\varepsilon_2 \times \ldots . \times 2.3.4\varepsilon_k}\right)$$

ausgedrückt, wo den ε alle die positiven ganzzahligen Werthe zu geben sind, welche die beiden Gleichungen

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots . + \varepsilon_k = m \text{ und}$$
$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 \ldots . + k\varepsilon_k = k$$

zugleich zulassen. Von den auf diese Weise entstehenden Gliedern ist A_k die Summe.

Ferner ist bekannt, dafs die *Anzahl der sämmtlichen Glieder* der Entwickelung von $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots . + a_n x^n)^m$, mit gleichen oder ungleichen Potenzen von x, allgemein durch den Binomialcoëfficienten $(m+n)_n$, oder, was das nemliche ist, durch den Binomialcoëfficienten $(m+n)_m$ ausgedrückt wird.

Es fragt sich nun, welches *der allgemeine Ausdruck der Anzahl der Glieder in jedem Coëfficienten* A_k für ein beliebiges k sei. Die Summe dieser Zahlen für alle verschiedenen Werthe von k, von 1 bis mn, wird dann $(m+n)_n$ oder $(m+n)_m$ geben.

2. Wenn man

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots . \text{ ins } \infty = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4 \ldots .$$

setzt, so drücken bekanntlich die Zahlencoëfficienten λ aus, wie oft ihr

Zeiger aus den ungleichen Zahlen 1, 2, 3, 4 .... durch die Addition zusammengesetzt werden kann: z. B. der Coëfficient λ_n zeigt an, auf wie vielerlei Art die Zahl n die Summe ungleicher Zahlen aus denen 1, 2, 3, 4 .... sein kann. Es hat keine Schwierigkeit, die Coëfficienten λ der Reihe nach aus einander durch die bloſse Addition zu finden. *Euler* z. B. lehrt es im 16ten Cap. des ersten Bandes der „Einleitung in die Analysis des Unendlichen": aber es läſst sich ein directer Ausdruck verlangen, der λ_n unmittelbar durch n giebt.

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXV. Heft 4

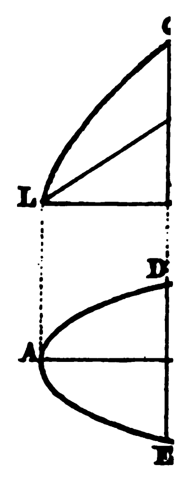
Fac-simile einer Handschrift von Ampère.

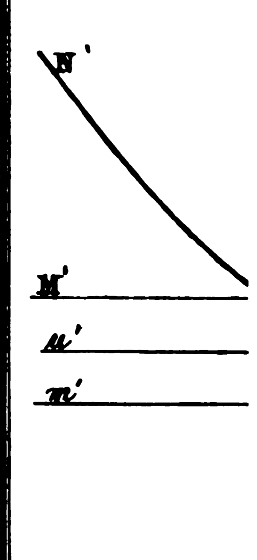
Monsieur et très-cher ami,

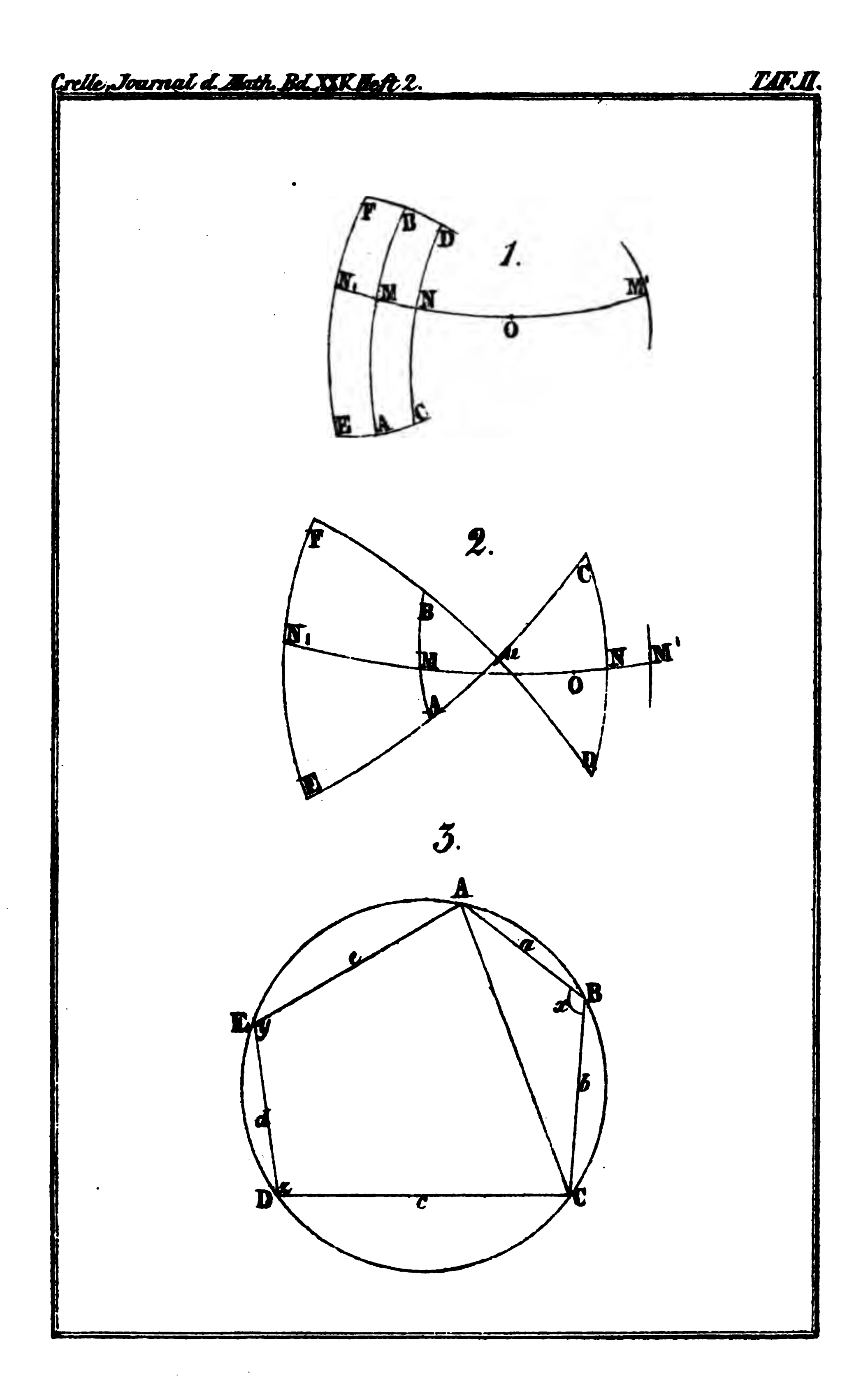
j'ai bien des remercîments à vous faire de l'ouvrage sur les caustiques que vous avez eu la bonté de m'envoyer, je vous prie de les agréer. rien ne pourroit m'être plus agréable que la lecture de vos savantes recherches sur cet objet. Vous m'avez fait aussi un grand plaisir en me marquant qu'on alloit imprimer dans les Mémoires de l'académie de Bruxelles le mémoire que je vous remis pour y être inséré à votre dernier voyage à paris. ce qui fait que j'attache beaucoup de prix à sa publication, c'est qu'outre qu'on y trouve la solution de plusieurs difficultés que je n'ai éclaircies nulle part ailleurs, et qu'on vient de reproduire dans un mémoire lu il y a environ un mois à l'académie des sciences de paris, quoiqu'il n'y ait à cela aucune sorte de raisons, j'ai considéré dans ce mémoire les choses sous un point de vue différent de celui sous lequel je les ai présentées dans mes autres écrits, etc.

paris 13. 8bre 1827.

tout à vous A. Ampère


L
D
A
E


N'
M'
μ'
m'


1.
F
B
D
N₁
M
N
M'
O
E
A
C
2.
F
C
B
N₁
M
μ
N
M'
O
A
D
E
3.
A
a
e
B
x
E
y
b
d
D
z
c
C

STORAGE AREA

